এখানে, $\sqrt{7}=\frac{p}{q}$ $\therefore$ $\frac{p^2}{q^2}=7$ (উভয় পক্ষে বর্গ করিয়া)

$\therefore$ $p^2=7q^2$. সুতরাং p^2-এর একটি উৎপাদক 7.

সুতরাং 7, p-এরও উৎপাদক।

কারণ, যদি $p=7k+1$ হয়, তবে $p^2=49k^2+14k+1$ এবং 7 দ্বারা p^2 বিভাজ্য হয় না। $\therefore$ $p \neq 7k+1$.

যদি $p=7k+2$ হয়, তবে $p^2=49^2+28k+1$ এবং 7 দ্বারা p^2 বিভাজ্য হয় না। $\therefore$ $p \neq 7k+2$.

অনুরূপে $p \neq 7k+3$, $7k+4$, $7k+5$ ও $7k+6$.

$\therefore$ p, 7 দ্বারা বিভাজ্য। মনে কর $p=7k$.

$\therefore$ $p^2=49k^2$ $\therefore$ $7q^2=49k^2$ বা, $q^2=7k^2$.

সুতরাং পূর্বের ন্যায় q, 7 দ্বারা বিভাজ্য।

সুতরাং p ও q উভয়েই 7 দ্বারা বিভাজ্য অর্থাৎ p ও q পরস্পর মৌলিক নহে। কিন্তু প্রথমেই মনে করা হইয়াছে যে p ও q পরস্পর মৌলিক। সুতরাং $\sqrt{7}$ কে মূলদ মনে করার জন্যই এই কল্পনা বিরোধী ফল পাওয়া গেল। $\therefore$ $\sqrt{7}$ অমূলদ।

উদাহরণ 3. নীচের কোন্‌টি সত্য ?

(ক) যে কোন দুইটি অমূলদ সংখ্যার যোগফল একটি মূলদ সংখ্যা।

(খ) যে কোন দুইটি অমূলদ সংখ্যার যোগফল একটি অমূলদ সংখ্যা।

(গ) (ক) ও (খ) এর কোনটিই সত্য নহে।

উত্তর। (গ) সত্য। কারণ, $\sqrt{3}$ ও $\sqrt{5}$ অমূলদ সংখ্যা দুইটির যোগফল একটি অমূলদ সংখ্যা। সুতরাং (ক) সত্য নহে।

আবার, $2+\sqrt{3}$ ও $2-\sqrt{3}$ অমূলদ সংখ্যা দুইটির যোগফল 4 একটি মূলদ সংখ্যা। সুতরাং (খ) সত্য নহে।

উদাহরণ 4. নিম্নের সমীকরণ দুইটি অভেদ কিনা বল।

(i) $\frac{x^2}{x}=x$ (ii) $\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}=1+\sqrt{x}$.

(i) $x=0$ হইলে, $\frac{x^2}{x}$ রাশিটি অনির্ণেয় হয়। সুতরাং $\frac{x^2}{x}=x$ হইলে যখন $x=0$, তখন অনির্ণেয় $=0$ হয়। সুতরাং $x=0$ এই মানের জন্য $\frac{x^2}{x}=x$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না। সুতরাং সমীকরণটি একটি অভেদ নহে।

(ii) যখন $\sqrt{x}=1$, তখন $x=1$ এবং $\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}=\frac{0}{0}$.

$\therefore$ $\sqrt{x}=1$ হইলে প্রদত্ত সমীকরণের বামপক্ষ অনির্ণেয় এবং ডানপক্ষ 2 অর্থাৎ সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না। সুতরাং সমীকরণটি অভেদ নহে।

উদাহরণ 5. দেখাও যে, যে কোন বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গকে 8 দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগশেষ সর্বদা 1 হইবে। [A. I. H. S. '72]

যে কোন বিজোড় সংখ্যাকে $2n+1$ আকারে লেখা যায়, যেখানে n একটি অখণ্ড সংখ্যা।

এখানে, $(2n+1)^2=4n^2+4n+1$

এখানে যদি n একটি যুগ্ম সংখ্যা হয়, মনে কর $n=2m$.

$\therefore\quad 4n^2+4n+1=4.(2m)^2+4.2m+1=16m^2+8m+1$

এখন $16m^2$ ও $8m$ প্রত্যেকে 8 দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং সংখ্যাটিকে 8 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ 1 হইবে।

আবার যদি n একটি অযুগ্ম সংখ্যা হয়, মনে কর $n=2m+1$

$\therefore\quad 4n^2+4n+1=4(2m+1)^2+4.(2m+1)+1$

$=16m^2+16m+4+8m+4+1=16m^2+24m+8+1.$

এখানে, $16m^2+24m+8$, 8 দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং এই ক্ষেত্রেও সংখ্যাটিকে 8 দ্বারা ভাগ করিলে 1 অবশিষ্ট থাকিবে। সুতরাং যে কোন অযুগ্ম সংখ্যার বর্গকে 8 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ সর্বদা 1 হয়।

উদাহরণ 6. প্রমাণ কর যে, $|ab|=|a|.|b|$.

প্রথমে মনে কর, $a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\quad \therefore\quad |a|=a$ এবং $|b|=b$

এবং $ab\geqslant 0\quad \therefore\quad |ab|=ab=|a|\ |b|$

এইবার মনে কর $a<0,\ b<0.\quad \therefore\ |a|=-a,\ |b|=-b$

এবং $ab>0\quad \therefore\quad |ab|=ab=(-a).(-b)=|a|\ |b|$

উদাহরণ 7. প্রমাণ কর যে, $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

যদি $a>0$ হয়, তবে $|a|=a$ এবং $a<0$ হইলে $|a|=-a$.

$\therefore$ a-র ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক মানের জন্য, $a\leqslant|a|$ এবং $-a\leqslant|a|$

এখানে, $a+b\geqslant 0$ হইলে, $|a+b|=a+b\leqslant|a|+|b|$

আবার $a+b<0$ হইলে, $|a+b|=-(a+b)$

$=-a-b\leqslant|a|+|b|$

অতএব a ও b-এর যে কোন মানের জন্য $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

EXAMPLES
IN
Higher Secondary
MATHEMATICS

(BENGALI)

VOL. II

TEN TEACHERS

B S (P)

BOOK SYNDICATE PRIVATE LTD.

EXAMPLES IN HIGHER SECONDARY

MATHEMATICS

[IN BENGALI]

VOLUME II

[FOR CLASSES XI & XII]

By

TEN TEACHERS

BOOK SYNDICATE PRIVATE LIMITED
2, RAMNATH BISWAS LANE, CALCUTTA-700009

Published by :

Sri K. Das, M. A , B T.
For **Book Syndicate Private Limited**
2, Ramnath Biswas Lane,
Calcutta—700 009

First Edition—1978

Price : Rupees Fourteen only

Printed by Sri P. L. Dutta, at **Printograph** (101, Baitakkhana Road, Calcutta-700009) ; Sri **P. K.** Hazra, at **Sree Mudran, (**40, Sibnarayan Das Lane, Calcutta-700006) ; Sri N. Das, at **Das Printers** (17, Buddhu Ostagar Lane, Calcutta-700009) and Sri **P. N.** Paul, at **Lakshmishree Press** (15/1, Iswar Mill Lane, Calcutta-700006)

অন্তরকলন বিদ্যা (Differential Calculus)

সমাকলন বিদ্যা (Integral Calculus)

বলবিদ্যা (Mechanics)

গতিবিদ্যা (Dynamics)

স্থিতিবিদ্যা (Statics)

অন্তরকলন বিদ্যা

(Differential Calculus)

১ বাস্তব সংখ্যা ও বাস্তব সংখ্যার অপেক্ষক

(**Real Numbers and Functions of Real Variables**)

কতিপয় সংজ্ঞা ও জ্ঞাতব্য :

1. মূলদ সংখ্যা (Rational Numbers).

যে সকল সংখ্যাকে দুইটি অখণ্ড সংখ্যা (দ্বিতীয়টি শূন্য নয়) এর অনুপাতরূপে প্রকাশ করা যায়, তাহাদের **মূলদ সংখ্যা** বলে। সুতরাং p ও q দুইটি অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$ হইলে, $\frac{p}{q}$ আকারের যে কোন সংখ্যা একটি মূলদ সংখ্যা।

মূলদ সংখ্যার কতকগুলি ধর্ম :

(i) দুই বা ততোধিক সংখ্যার যোগফল ও গুণফল একটি মূলদ সংখ্যা। দুইটি মূলদ সংখ্যার বিয়োগফল ও ভাগফল একটি মূলদ সংখ্যা।

(ii) মূলদ সংখ্যার যোগ ও গুণের বিনিময় নিয়ম (Commutative law) সিদ্ধ। অর্থাৎ a, b দুইটি মূলদ সংখ্যা হইলে,

$a+b=b+a$ এবং $ab=ba$.

(iii) মূলদ সংখ্যার যোগ ও গুণের ক্ষেত্রে সংযোগ নিয়ম (associative law) সিদ্ধ।

অর্থাৎ a, b ও c তিনটি মূলদ সংখ্যা হইলে,

$$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c \text{ এবং } a(bc)=(ab)c=abc.$$

(iv) মূলদ সংখ্যার ক্ষেত্রে বিচ্ছেদ নিয়ম (distributive law) সিদ্ধ।

অর্থাৎ a, b, c তিনটি মূলদ সংখ্যা হইলে, $a(b+c)=ab+ac$.

(v) x, y, z তিনটি মূলদ সংখ্যা হইলে,

(a) $x<y$ (b) $x=y$ এবং (c) $x>y$ সম্পর্ক তিনটির একটি এবং একটি মাত্র সত্য হয়।

(vi) x, y, z তিনটি মূলদ সংখ্যা এবং $x<y$ এবং $y<z$ হইলে $x<z$ হয়। ইহাকে ক্রমের নিয়ম (law of order) বলে।

(vii) যে-কোন দুইটি মূলদ সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য মূলদ সংখ্যা পাওয়া যায়।

(viii) মূলদ সংখ্যার দশামক প্রকাশ হয় সসীম দশমিক নতুবা আবৃত্ত দশমিক।

2. অমূলদ সংখ্যা (Irrational Numbers).

প্রত্যেক মূলদ সংখ্যাকে কোন সরলরেখার একটি বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করা যায়। যে সরলরেখার বিন্দু দ্বারা সকল মূলদ সংখ্যাকে প্রকাশ করা যায়, তাহাকে **সংখ্যারেখা** (Number line) বলে। প্রত্যেক মূলদ সংখ্যার জন্য সংখ্যারেখার একটি এবং একটি মাত্র বিন্দু পাওয়া যায়। কিন্তু সংখ্যারেখার প্রত্যেকটি বিন্দুর জন্য একটি মূলদ সংখ্যা পাওয়া যায় না। প্রকৃত পক্ষে সংখ্যারেখার উপর অসংখ্য বিন্দু থাকে, যাহাদের সহিত একটি করিয়া মূলদ সংখ্যা যুক্ত করা যায় না। এই সকল বিন্দুর প্রত্যেকটি সহিত একটি নূতন ধরণের সংখ্যা যুক্ত করা হয়। এই সকল সংখ্যাকে **অমূলদ সংখ্যা** বলা হয়। **করণী** এক প্রকার অমূলদ সংখ্যা; কিন্তু প্রত্যেক অমূলদ সংখ্যাই করণী নহে । প্রত্যেক অমূলদ সংখ্যা **অমেয়** (incommensurable) এবং উহাদের দশমিকে প্রকাশ অনাবৃত্ত অসীম।

3. বাস্তব সংখ্যা (Real Numbers).

সকল মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার সমাহার বা সমষ্টি (collection) হইল **বাস্তব সংখ্যা** সমূহ। সুতরাং প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যা হয় মূলদ নয় অমূলদ। অতএব সংখ্যারেখার প্রত্যেকটি বিন্দুর জন্য একটি এবং একটি মাত্র বাস্তব সংখ্যা এবং প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংখ্যারেখার একটি এবং একটি মাত্র বিন্দু পাওয়া যায়। এইজন্য বলা হয় বাস্তব সংখ্যাসমূহ এবং সংখ্যারেখার বিন্দুসমূহের মধ্যে একটি **এক-এক সম্পর্ক** (one-one correspondence) আছে। পূর্বে আলোচিত মূলদ সংখ্যাসমূহের সকল ধর্ম বাস্তব সংখ্যা সমূহেরও ধর্ম।

4. পরমমান (absolute value).

মনে কর, a কোন বাস্তব সংখ্যা $a > 0$ হইলে a-র পরমমান a.

$a=0$ হইলে a-র পরমমান 0 এবং $a < 0$ হইলে a-র পরমমান $-a$.

কোন বাস্তব সংখ্যা a-র পরমমান $|a|$ দ্বারা সূচিত হয়।

সুতরাং $|a| = a$ যখন $a > 0$

$= 0$ যখন $a = 0$

এবং $= -a$ যখন $a < 0$.

5. বিস্তার (Interval).

দুইটি বাস্তব সংখ্যা a ও b $(b > a)$-র মধ্যে অসংখ্য বাস্তব সংখ্যা পাওয়া যায়। এই সকল বাস্তব সংখ্যার সমষ্টিকে একটি **বিস্তার** বলে। a এবং b ঐ বিস্তারের অন্তর্ভুক্ত হইলে বিস্তারটিকে $a \leqslant x \leqslant b$ বা $[a, b]$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং

ইহাকে একটি **বদ্ধ বিস্তার** (closed interval) বলে। a এবং b বিস্তারটির অন্তর্ভুক্ত না হইলে বিস্তারটি একটি **অবদ্ধ বিস্তার** (open interval) এবং এই অবদ্ধ বিস্তারকে $a < x < b$ বা (a, b) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণমালা I

উদাহরণ 1. x-এর কোন্ কোন্ মানের জন্য নিম্নলিখিত রাশিমালা সমূহ অনির্ণেয় ?

(i) $\frac{x}{x}$ (ii) $\frac{x^2}{x}$ (iii) $\frac{\sin x}{x}$ (iv) $\frac{x^3-64}{x-4}$ (v) $\frac{1}{x^2-5x+6}$

(i) $x=0$ হইলে, $\frac{x}{x}$ রাশিটির আকার হয় $\frac{0}{0}$. যেহেতু 0 দ্বারা ভাগের কোন সংজ্ঞা নাই, সুতরাং রাশিটি x-এর মান 0 হইলে অনির্ণেয়।

(ii) $x=0$ হইলে, $\frac{x^2}{x}$ রাশিটির আকার হয় $\frac{0}{0}$. সুতরাং x-এর মান শূন্য হইলে $\frac{x^2}{x}$ রাশিটি অনির্ণেয় হয়।

(iii) $x=0$ হইলে $\frac{\sin x}{x}$ রাশিটির আকার হয় $\frac{0}{0}$. সুতরাং x-এর মান শূন্য হইলে $\frac{\sin x}{x}$ রাশিটি অনির্ণেয় হয়।

(iv) $x=4$ হইলে $\frac{x^3-64}{x-4}$ রাশিটির আকার হয় $\frac{0}{0}$. সুতরাং x-এর মান 4 হইলে প্রদত্ত রাশিটি অনির্ণেয় হয়।

(v) $x=2$ বা $x=3$ হইলে $x^2-5x+6=0$ হয়। সুতরাং $\frac{1}{x^2-5x+6}$ রাশিটির আকার x-এর এই দুইটি মানের জন্য $\frac{1}{0}$ হয়। অতএব x-এর মান 2 বা 3 হইলে প্রদত্ত রাশিটির মান অনির্ণেয় হয়।

উদাহরণ 2. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{7}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

$\sqrt{7}$ যদি অমূলদ রাশি না হয়, তবে ইহা একটি মূলদ রাশি হইবে। মনে কর $\sqrt{7}=\frac{p}{q}$.

এখানে, যেহেতু $\sqrt{7}$ ধনাত্মক, সুতরাং p ও q উভয়কেই ধনাত্মক মনে করা যায়। আবার p ও q কে পরস্পর মৌলিক মনে করা যাইতে পারে। কারণ, উহাদের কোন সাধারণ উৎপাদক থাকিলে, প্রথমেই তাহা অপসারণ (অর্থাৎ কাটিয়া) করা যায়।

উদাহরণ 8. $|x-a| < \delta$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a-\delta < x < a+\delta$.

প্রথমে মনে কর, $x-a \geqslant 0$ $\therefore$ $x-a=|x-a| < \delta$

$\therefore$ $x < a+\delta$.

আবার $x-a > 0$ বলিয়া $x > a$ বা $a < x$

$\therefore$ $a-\delta < x$ [কারণ $|x-a|$ ধনাত্মক বলিয়া, $\delta > 0$]

$\therefore$ $x-a \geqslant 0$ হইলে, $a-\delta < x < a+\delta$,

এইবার মনে কর $x-a < 0$.

$\therefore$ $|x-a| = -(x-a) = a-x$.

এখানে $|x-a| < \delta$ $\therefore$ $a-x < \delta$ $\therefore$ $a-\delta < x$.

আবার $x-a < 0$ বলিয়া $x < a$ $\therefore$ $x < a+\delta$.

সুতরাং এই ক্ষেত্রেও $a-\delta < x < a+\delta$.

সুতরাং উভয় ক্ষেত্রেই $a-\delta < x < a+\delta$.

অপেক্ষক (Function) :

1. **চলরাশি** (Variable quantity) যে সকল রাশি মান পরিবর্তন করিতে পারে, তাহাদের চলরাশি বলা হয়। যেমন, কোন রুগীর দেহের তাপমাত্রা, কোন গাড়ীর জ্বালানির খরচ ইত্যাদি।

2. **ধ্রুবক রাশি** (Constant) যে সকল রাশি মান পরিবর্তন করিতে পারে না, তাহাদের ধ্রুবক রাশি বলে। যথা, বৃত্তের পরিধির দৈর্ঘ্য ও ব্যাসের দৈর্ঘ্যের অনুপাত, কোন পদার্থের আপেক্ষিক গুরুত্ব ইত্যাদি।

অপেক্ষক দুইটি চলরাশি x এবং y এর মধ্যে যদি এরূপ কোন সম্পর্ক বিদ্যমান থাকে যে, x-এর সম্ভাব্য প্রত্যেকটি মানের জন্য y-এর একটি নির্দিষ্ট মান থাকে, তবে y-কে x-এর একটি **অপেক্ষক** (function) বলে এবং লেখা হয় $y=f(x)$. x-কে **স্বাধীন চল** (independent variable) এবং y-কে **অধীন চল** (dependent variable) বলে।

উদাহরণ 9. $f(x)=x^2-7x+12$.

$f(0), f(1), f(2), f(3)$ ও $f(4)$-এর মান নির্ণয় কর।

$f(0)=0^2-7.0+12=12$. $f(1)=1^2-7.1+12=1-7+12=6$

$f(2)=2^2-7.2+12=4-14+12=2$.

$f(3)=3^2-7.3+12=9-21+12=0$.

$f(4)=4^2-7.4+12=16-28+12=0$.

উদাহরণ 10. যদি $f(x)=(x-l)(x-m)(x-n)$ হয়,

তবে দেখাও যে $f(l)=f(m)=f(n)$

$f(l)=(l-l)(l-m)(l-n)=0.(l-m)(l-n)=0.$

$f(m)=(m-l)(m-m)(m-n)=(m-l).0.(m-n)=0.$

$f(n)=(n-l)(n-m)(n-n)=(n-l)(n-m).0=0.$

$\therefore \quad f(l)=f(m)=f(n)=0.$

উদাহরণ 11. $f(x)=q.\dfrac{x-p}{q-p}+p.\dfrac{x-q}{p-q}$ হইলে

প্রমাণ কর যে, $f(p)+f(q)=f(p+q)$.

$$f(p)=q.\frac{p-p}{q-p}+p.\frac{p-q}{p-q}=q.0+p.1=p.$$

$$f(q)=q.\frac{q-p}{q-p}+p.\frac{q-q}{p-q}=q.1+p.0=q.$$

$$f(p+q)=q.\frac{p+q-p}{q-p}+p.\frac{p+q-q}{p-q}=\frac{q^2}{q-p}+\frac{p^2}{p-q}$$

$$=\frac{p^2-q^2}{p-q}=p+q=f(p)+f(q).$$

উদাহরণ 12. $f(x)=ax^2+bx+c$. হইলে, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$-এর মান নির্ণয় কর।

$$f(x+h)=a(x+h)^2+b(x+h)+c$$

$$\therefore \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-ax^2-bx-c}{h}$$

$$=\frac{ax^2+2axh+ah^2+bx+bh+c-ax^2-bx-c}{h}$$

$$=\frac{2axh+ah^2+bh}{h}=\frac{h(2ax+ah+b)}{h}=2ax+ah+b.$$

উদাহরণ 13. $f(x)=\sin x$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$=\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

উদাহরণ 14. $f(x)=\sin x$ এবং $g(x)=\cos x$ হইলে,

দেখাও যে, $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$ ধ্রুবক।

$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=(\sin x)^2+(\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x=1.$

সুতরাং $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$, ধ্রুবক।

উদাহরণ 15. $f(x)=\sin x$ এবং $g(x)=\cos x$ হইলে, দেখাও যে,

(i) $f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$.

(ii) $\frac{1-g(x)}{1+g(x)}=\left\{\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{g\left(\frac{x}{2}\right)}\right\}^2$.

সমাধান :

(i) $f(x+y)=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

$=f(x)g(y)+g(x)f(y)$

(ii) $\frac{1-g(x)}{1+g(x)}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\left\{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right\}^2=\left\{\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{g\left(\frac{x}{2}\right)}\right\}^2$.

উদাহরণ 16. (i) $f(x)=\sin x+\operatorname{cosec} x$ হইলে, দেখাও যে, $f(-x)=-f(x)$ এবং (ii) $g(x)=\sec x+\cos x$ হইলে, দেখাও যে, $g(-x)=g(x)$.

সমাধান :

(i) $f(-x)=\sin(-x)+\operatorname{cosec}(-x)=-\sin x-\operatorname{cosec} x$

$=-(\sin x+\operatorname{cosec} x)=-f(x)$.

(ii) $g(-x)=\sec(-x)+\cos(-x)=\sec x+\cos x=g(x)$.

উদাহরণ 17. $f(x)=[x]$ এবং $[x]$ এর অর্থ x অপেক্ষা বৃহত্তর নয় এরূপ বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা। $f(\frac{1}{3})$, $f(0)$, $f(1)$ ও $f(\frac{5}{2})$-এর মান নির্ণয় কর।

$f(\frac{1}{3})=[\frac{1}{3}]$, এখানে $\frac{1}{3}$ অপেক্ষা বৃহত্তর নয় এরূপ বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা হইল 0.

$\therefore\ f(\frac{1}{3})=0$,

$f(0)=[0]=0$ (যেহেতু, 0 অপেক্ষা বৃহত্তর নয় এরূপ বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা 0).

$f(1)=[1]=1$

$f(\frac{5}{2})=[\frac{5}{2}]=2.$ (যেহেতু $\frac{5}{2}$ অপেক্ষা বৃহত্তর নয় এরূপ বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা 2).

উদাহরণ 18. $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{(1-x)(1-x-h)}$$ [C. U. '58]

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\dfrac{x+h}{1-x-h}-\dfrac{x}{1-x}}{h}=\frac{\dfrac{(x+h)(1-x)-x(1-x-h)}{(1-x-h)(1-x)}}{h}$$

$$=\frac{x+h-x^2-hx-x+x^2+hx}{(1-x-h)(1-x)h}=\frac{h}{(1-x-h)(1-x)h}$$

$$=\frac{1}{(1-x-h)(1-x)}$$

উদাহরণ 19. $f(x)=3^x$ হইলে, দেখাও যে (i) $f(x+1)=3f(x)$.

(ii) $\dfrac{f(x+2)+f(x-1)}{f(x+1)}=\dfrac{28}{9}$ এবং (iii) $f(a).\,f(b)=f(a+b)$

সমাধান :

(i) $f(x+1)=3^{x+1}=3\,.\,3^x=3f(x)$.

(ii) $$\frac{f(x+2)+f(x-1)}{f(x+1)}=\frac{3^{x+2}+3^{x-1}}{3^{x+1}}=\frac{3^x\,.\,3^2+3^x\,.\,\frac{1}{3}}{3^x\,.\,3}$$

$$=\frac{3^x(9+\frac{1}{3})}{3^x\,.\,3}=\frac{\frac{28}{3}}{3}=\frac{28}{9}.$$

(iii) $f(a)=3^a,\ f(b)=3^b,\ f(a+b)=3^{a+b}$

$\therefore\ f(a)\,.\,f(b)=3^a\,.\,3^b=3^{a+b}=f(a+b)$.

উদাহরণ 20. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ হইলে, দেখাও যে,

(i) $f(x^3)=[f(x)]^3-3f(x)$.

(ii) $[f(x)]^2=f(x^2)+2$ এবং (iii) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$.

সমাধান ঃ

(i) $f(x^3)=x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\,.\,x\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$$=[f(x)]^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=[f(x)]^3-3f(x)$$

(ii) $[f(x)]^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=f(x^2)+2.$

(iii) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}+x=f(x).$

উদাহরণ 21. $f(x)=\log_e x$ এবং $g(x)=e^x$ হইলে, দেখাও যে, $f\{g(x)\}=g\{f(x)\}$.

$f\{g(x)\}=\log_e g(x)=\log_e e^x=x.\quad g\{f(x)\}=e^{f(x)}=e^{\log_e x}=x.$

$$\therefore\quad f\{g(x)\}=g\{f(x)\}.$$

উদাহরণ 22. $y=f(x)=\dfrac{2x-3}{x-2}$ হইলে, দেখাও যে, $x=f(y)$.

$$y=\frac{2x-3}{x-2}\qquad\therefore\quad y(x-2)=2x-3$$

বা, $x(y-2)=2y-3$; $\quad\therefore\quad x=\dfrac{2y-3}{y-2}=f(y).$

উদাহরণ 23. $y=f(x)=\dfrac{ax-b}{bx-a}$; দেখাও যে, $f(x).f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1.$

$$f(x)\,.\,f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{ax-b}{bx-a}\cdot\frac{a\,.\frac{1}{x}-b}{b\,.\frac{1}{x}-a}=\frac{ax-b}{bx-a}\cdot\frac{\frac{a-bx}{x}}{\frac{b-ax}{x}}$$

$$=\frac{ax-b}{bx-a}\cdot\frac{a-bx}{b-ax}=\frac{ax-b}{bx-a}\cdot\frac{-(bx-a)}{-(ax-b)}=1.$$

উদাহরণ 24. $f(x)=\log_e x$ হইলে, দেখাও যে,

(i) $f(e)=1,$ (ii) $f(xy)=f(x)+f(y),$

(iii) $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ (iv) $f(x^m)=mf(x)$

সমাধান :

(i) $f(e)=\log_e e=1.$

(ii) $f(xy)=\log_e xy=\log_e x+\log_e y=f(x)+f(y)$

(iii) $f\left(\frac{x}{y}\right)=\log_e \frac{x}{y}=\log_e x-\log_e y=f(x)-f(y)$

(iv) $f(x^m)=\log_e x^m=m\log_e x=mf(x).$

উদাহরণ 25. $f^2(x)=f\{f(x)\}$ হইলে, দেখাও $f^2(x)=x$

যেখানে $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$.

$$f^2(x)=f\{f(x)\}=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}=\frac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}}=\frac{\dfrac{1+x-1+x}{1+x}}{\dfrac{1+x+1-x}{1+x}}=\frac{2x}{2}=x.$$

উদাহরণ 26. প্রমাণ কর যে, (i) $\sin^2x+x^2+4$ একটি যুগ্ম অপেক্ষক এবং (ii) দুইটি যুগ্ম অপেক্ষকের যোগফল একটি যুগ্ম অপেক্ষক।

(i) মনে কর $f(x)=\sin^2x+x^2+4$

$\therefore\ f(-x)=\sin^2(-x)+(-x)^2+4$

$=(-\sin x)^2+x^2+4=\sin^2x+x^2+4=f(x).$

$\therefore\ f(x)$ একটি যুগ্ম অপেক্ষক।

(ii) মনে কর $f(x)$ ও $g(x)$ দুইটি যুগ্ম অপেক্ষক এবং $\phi(x)=f(x)+g(x)$

এক্ষণে, $\phi(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=\phi(x)$

$\therefore\ \phi(x)$ একটি যুগ্ম অপেক্ষক।

উদাহরণ 27. প্রমাণ কর যে, দুইটি অযুগ্ম অপেক্ষকের গুণফল একটি যুগ্ম অপেক্ষক কিন্তু উহাদের যোগফল একটি অযুগ্ম অপেক্ষক।

মনে কর $f(x)$ ও $g(x)$ দুইটি অযুগ্ম অপেক্ষক।

$\therefore\ f(-x)=-f(x)$ এবং $g(-x)=-g(x).$

এখানে মনে কর $\phi(x)=f(x)\,g(x).$

$\therefore\ \phi(-x)=f(-x).g(-x)=\{-f(x)\}.\{-g(x)\}$

$=f(x)\,.\,g(x)=\phi(x)$

$\therefore\ \phi(x)$ একটি যুগ্ম অপেক্ষক।

আবার মনে কর $F(x)=f(x)+g(x)$

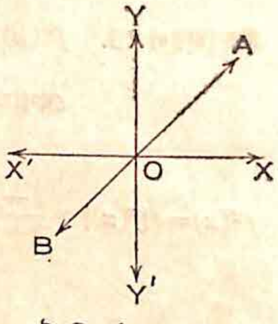
$\therefore \quad F(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)$

$=-\{f(x)+g(x)\}=-F(x)$

$\therefore \quad F(x)$ একটি অযুগ্ম অপেক্ষক।

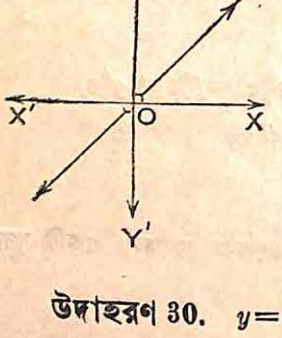
উদাহরণ 28. $y=x$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর। সমীকরণটি হইতে নিম্নের তালিকায় প্রদর্শিত লেখের কয়েকটি বিন্দু নির্ণয় করা হইল।

x	0	1	-2	3
y	0	1	-2	3



(0, 0), (1, 1), (−2, −2), (3, 3) বিন্দুসমূহ স্থাপন করা হইল। বিন্দুসমূহ যোগ করিয়া মূলবিন্দুগামী $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাটি পাওয়া গেল। $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাটি নির্ণেয় লেখচিত্র।

উদাহরণ 29. $y=\dfrac{x^2}{x}$ অপেক্ষকের লেখচিত্র অঙ্কন কর।



$y=\dfrac{x^2}{x}$ অপেক্ষকটি $x=0$ বিন্দুতে অনির্ণেয়, x-এর অন্যান্য সকলমানের জন্য সংজ্ঞা যুক্ত।

সুতরাং অপেক্ষকটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়।

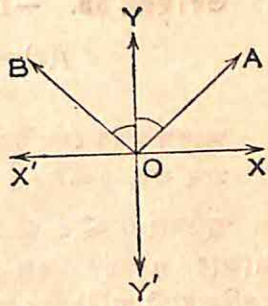
$y=x$ যখন $x \neq 0$ এবং অনির্ণেয় যখন $x=0$.

সুতরাং অপেক্ষকটির লেখচিত্র $y=x$ সরলরেখার লেখচিত্রই হইবে, কেবলমাত্র (0, 0) বিন্দুতে লেখচিত্রটি বিচ্ছিন্ন হইবে।

উদাহরণ 30. $y=|x|$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

x	0	1	2	3	-3	-2	-1
$y=f(x)$	0	1	2	3	3	2	1

(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (−1, 1), (−2, 2), (−3, 3) ইত্যাদি বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া পাওয়া গেল নির্ণেয় লেখচিত্র $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ রশ্মি দুইটি।



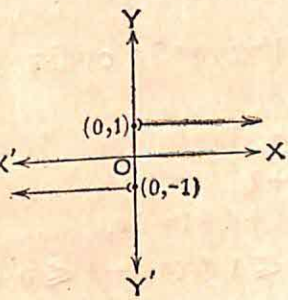
লেখচিত্র হইতে নিম্নলিখিত বিষয় সমূহ লক্ষ্য কর।

(i) y-অক্ষের নীচের দিকে লেখটির কোন অংশ নাই, অর্থাৎ অপেক্ষকটি সর্বদা ধনাত্মক এবং সর্বনিম্ন বিন্দু মূলবিন্দু 0. সুতরাং অপেক্ষকটির ক্ষুদ্রতম মান 0.

(ii) অপেক্ষকটির দুইটি অংশ আছে এবং এই অংশ দুইটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন নহে।

(iii) অপেক্ষকটি y-অক্ষে সুসমঞ্জস (symmetrical).

উদাহরণ 31. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।



অপেক্ষকটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়।

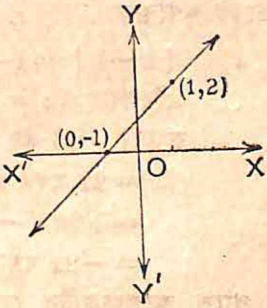
$$y=f(x)=1 \text{ যখন } x>0.$$
$$=-1 \text{ যখন } x<0.$$

যখন $x=0$, অপেক্ষকটি হয়, $\dfrac{|0|}{0}=\dfrac{0}{0}$

সুতরাং যখন $x=0$, তখন অপেক্ষকটি অনির্ণেয়।

সুতরাং y-অক্ষের ডানদিকে অপেক্ষকটির লেখ। x-অক্ষের উপর দিকে x-অক্ষ হইতে 1 একক দূরে অবস্থিত x-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা। (0, 1) বিন্দুটি লেখচিত্রে অন্তর্গত নয়। $y=-1$ যখন $x<0$ অপেক্ষকের লেখ x-অক্ষের নীচের দিকে x-অক্ষ হইতে 1 একক নীচে y-অক্ষের বামদিকে অবস্থিত একটি সরলরেখা। (0, −1) বিন্দুটি লেখচিত্রের অন্তর্গত নয়। লেখচিত্র হইতে লক্ষ্য কর, লেখচিত্রটির দুইটি অংশ এবং অংশ দুইটি $x=0$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ 32. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।



$x=1$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি অনির্ণেয়।

অন্যত্র অপেক্ষকটি $y=f(x)=x+1$.

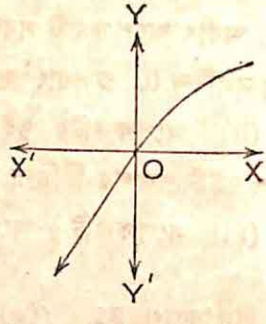
পার্শ্বে অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন করা হইল। অপেক্ষকটির দুইটি অংশ এবং অংশ দুইটি (1, 2) বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ 33. $-1 \leqslant x \leqslant 1$ বিস্তারে অপেক্ষক $f(x)$-এর সংজ্ঞা নিম্নরূপ :—

$$f(x)=x^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$$
$$=2x,\ -1 \leqslant x \leqslant 0$$

অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

মনে কর, $y=f(x)$.



সুতরাং $0 \leqslant x \leqslant 1$ বিস্তারে অপেক্ষকটির আকার $y=x^2$ এবং ইহার লেখ একটি মূলবিন্দুগামী অধিবৃত্তের অংশ।

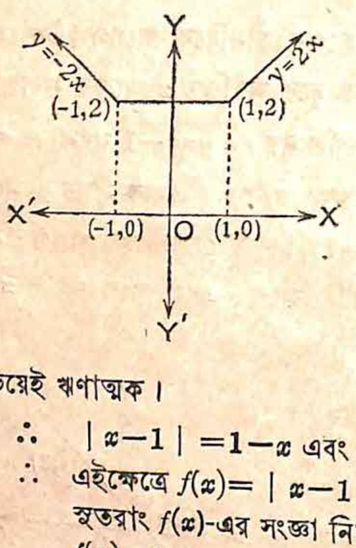
$-1 \leqslant x \leqslant 0$ বিস্তারে অপেক্ষকটির আকার $y=2x$ এবং ইহার লেখ একটি সরলরেখাংশ। পাশে লেখচিত্রটি অঙ্কন করা হইল।

উদাহরণ 34. $f(x)=|x-1|+|x+1|$ অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

$x > 1$ হইলে, $x-1$ এবং $x+1$ উভয়েই ধনাত্মক

$\therefore\ |x-1|=x-1$ এবং $|x+1|=x+1$

সুতরাং $f(x)=|x-1|+|x+1|=x-1+x+1=2x.$



$-1 \leqslant x \leqslant 1$ হইলে $x-1 \leqslant 0$ এবং $x+1 \geqslant 0.$

$\therefore\ |x-1|=-(x-1)=1-x$

এবং $|x+1|=x+1$

$\therefore$ এইক্ষেত্রে $f(x)$

$=|x-1|+|x+1|$

$=1-x+x+1=2.$

$x < -1$ হইলে, $x-1$ এবং $x+1$ উভয়েই ঋণাত্মক।

$\therefore\ |x-1|=1-x$ এবং $|x+1|=-(1+x)$

$\therefore$ এইক্ষেত্রে $f(x)=|x-1|+|x+1|=1-x-1-x=-2x.$

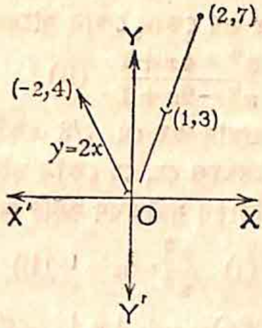
সুতরাং $f(x)$-এর সংজ্ঞা নিম্নরূপে দেওয়া যায়।

$$f(x)=2x \text{ যখন } x > 1.$$
$$=2 \text{ যখন } -1 \leqslant x \leqslant 1$$
$$=-2x \text{ যখন } x < -1$$

পাশে অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন করা হইল। লেখচিত্রটির তিনটি অংশ; কিন্তু অংশ তিনটি পরস্পরের সহিত অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ 35. $-2 \leqslant x \leqslant 2$ বিস্তারে অপেক্ষক $f(x)$-এর সংজ্ঞা নিম্নরূপ :—

$$f(x) = -2x, \quad -2 \leqslant x < 0$$
$$= 2x+1 \quad 0 \leqslant x < 1$$
$$= 4x-1 \quad 1 \leqslant x \leqslant 2.$$



প্রদত্ত অপেক্ষকটির লেখ চিত্রের তিনটি অংশ এবং অংশ তিনটি পরস্পরের সহিত বিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ 36. $f(x)=[x]$, যেখানে $[x]$ এর অর্থ x-এর অখণ্ড অংশ অপেক্ষকটির $0 \leqslant x \leqslant 3$ বিস্তারে লেখচিত্র অঙ্কন কর।

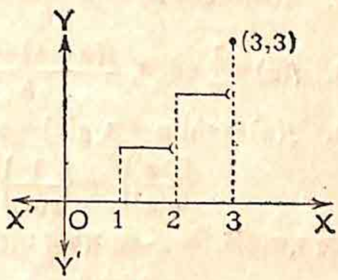
অপেক্ষকটির সংজ্ঞা নিম্নলিখিতরূপে দেওয়া যাইতে পারে।

$f(x)=0$, যখন $0 \leqslant x < 1$

$=1$, যখন $1 \leqslant x < 2$

$=2$ যখন $2 \leqslant x < 3$

$=3$ যখন $x=3$.



অপেক্ষকটির লেখের চারিটি অংশ। প্রত্যেকটি অংশ y-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখাংশ।

অপেক্ষকের সন্ততা (Continuity of function) :

কোন অপেক্ষক $f(x)$-এর সংজ্ঞার ক্ষেত্রে (অর্থাৎ কোন বিস্তারে) কোন বিন্দু $x=a$-র অনুরূপ অপেক্ষকটির লেখচিত্রের (a, $f.a$) বিন্দুর দুইদিকে অপেক্ষকটির লেখচিত্র অবিচ্ছিন্ন হইলে অপেক্ষক $f(x)$কে $x=a$ বিন্দুতে **সন্তত** বলা হয়। কোন বিন্দুতে কোন অপেক্ষক সন্তত না হইলে অপেক্ষকটি ঐ বিন্দুতে **অসন্তত** (discontinuous). কোন বিস্তারের প্রত্যেকটি বিন্দুতে কোন অপেক্ষক সন্তত হইলে অপেক্ষকটি ঐ বিস্তারে সন্তত বলা হয়।

উদাহরণ 28-এর অপেক্ষক $y=x$-এর লেখ সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন। সুতরাং অপেক্ষকটি x-এর সকল মানের জন্য সন্তত। উদাহরণ 29-এর অপেক্ষক $y=\frac{x^2}{x}$ এর লেখচিত্রটি মূল বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন এবং অপেক্ষকটি ঐ বিন্দুতে অসন্তত। অন্যত্র অপেক্ষকটি সন্তত। উদাহরণ 30-এর অপেক্ষক $y=[x]$ সর্বত্র সন্তত।

প্রশ্নমালা 1

1. x-এর কোন্ কোন্ মানের জন্য নিম্নলিখিত রাশিগুলি অনির্ণেয় ?

(i) $\dfrac{x^2+4x+1}{x^2-2x+1}$ (ii) $\dfrac{\tan x}{x}$ (iii) $\dfrac{x^4-16}{x-2}$

2. প্রমাণ কর যে $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ রাশি।

3. দেখাও যে, যে কোন দুইটি মূলদ সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য মূলদ সংখ্যা আছে।

4. নিম্নের সমীকরণ দুইটি অভেদ কিনা বল।

(i) $\dfrac{x^3}{x^2}=x$ (ii) $\dfrac{1-x}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}$.

5. $f(x)=x+|x|$. $f(4)$ এবং $f(-4)$ সমান কিনা বল।

6. $f(x)=x^2+6x+5$. $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(-5)$ এর মান নির্ণয় কর।

7. $f(x)=\cos x$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ এর মান নির্ণয় কর।

8. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ হইলে, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ এর মান নির্ণয় কর।

9. $f(x)=\sin x$ এবং $g(x)=\cos x$ হইলে, দেখাও যে,

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}^2=\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}^2-1.$$

উপরের সম্পর্কটি কি x-এর সকল মানের জন্য সত্য ?

10. $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{bx-a}$, দেখাও যে $(y)=x$.

11. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ হইলে, দেখাও যে, $\dfrac{f(x)-f(y)}{1+f(x)f(y)}=\dfrac{x-y}{1+xy}$

12. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

(i) $y=2x$ (ii) $y=\cos x$ (iii) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$.

13. একটি অপেক্ষক $f(x)$-এর সংজ্ঞা নিম্নরূপ :—

$$f(x)=3 \text{ যখন } x \geqslant 0$$
$$=0 \text{ যখন } x < 0.$$

অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

14. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ অপেক্ষকটির লেখ অঙ্কন কর। লেখটি কোন্ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন ?

15. একটি অপেক্ষক $f(x)$-এর সংজ্ঞা নিম্নরূপ :—

$f(x)=1$ যখন x একটি অখণ্ড সংখ্যা

$=0$ যখন x অখণ্ড সংখ্যা নয়।

অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

২ সীমা ও সন্ততা

(**Limit and Continuity**)

1. **সীমা :** কোন চলরাশি x কোন ধ্রুবক a-র দিকে অগ্রসর হইতেছে বলিতে মনে করা হয় যে চলরাশি x এরূপে মান পরিবর্তন করিতেছে যে শেষ পর্যন্ত x এবং a-র মধ্যে দূরত্ব $|x-a|$ যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা (যতক্ষুদ্রই হোক না কেন) অপেক্ষা ছোট হইতে পারে। x যে কোন ধ্রুবক a-র দিকে অগ্রসর হইতেছে তাহা $x \to a$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণস্বরূপ $x \to 3$ বলিতে মনে করা হয়, x এরূপে মান পরিবর্তন করিতেছে যে, x এবং 3 এর মধ্যে দূরত্ব $|x-3|$ কে যে-কোন ধনাত্মক সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করা যাইতে পারে।

মনে কর ধনাত্মক সংখ্যাটি ·1.

সুতরাং x-এর মান এরূপ হইবে যে, $|x-3| < \cdot 1$

বা, $3 - \cdot 1 < x < 3 + \cdot 1$ অর্থাৎ x-এর মান $2\cdot 9 < x < 3\cdot 1$ বিস্তারের মধ্যে থাকিবে।

ধনাত্মক সংখ্যাটি ·00004 হইলে x-এর মান এরূপ হইবে যে

$|x-3| < \cdot 00004$ অর্থাৎ x-এর মান $3 - \cdot 00004 < x < 3 + \cdot 00004$ অর্থাৎ $2\cdot 99996 < x < 3\cdot 00004$ বিস্তারের মধ্যে থাকিবে।

2. $\underset{x \to a}{Lt}\ f(x) = l$-এর অর্থ।

$x \to a$-এর অর্থ x, a-র দিকে অগ্রসর হইতেছে। এক্ষণে, x, a-এর দিকে a-অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর মান হইতে এবং a-অপেক্ষা বৃহত্তর মান হইতে a-র দিকে অগ্রসর হইতে পারে। যখন x, a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর মান হইতে a-র দিকে অগ্রসর হয়, তখন লেখা হয় $x \to a-$. যখন x, a অপেক্ষা বৃহত্তর মান হইতে a-র দিকে অগ্রসর হয়, তখন লেখা হয় $x \to a+$.

$\underset{x \to a-}{Lt}\ f(a) = l_1$ বলিতে বুঝায়, x-এর মান a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কিন্তু যথেষ্ট নিকটবর্তী হইলে, $f(x)$ ও l_1-এর মানের অন্তর যে কোন পূর্ব নির্ধারিত ধনাত্মক সংখ্যা (যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করা যায়। $\underset{x \to a-}{Lt}\ f(x) = l_1$ কে বামপক্ষের সীমা (Left hand limit) বলা হয়।

অনুরূপে $\underset{x \to a+}{Lt} f(x)=l_2$ কে দক্ষিণ পক্ষের সীমা (Right hand limit) বলা হয়। $\underset{x \to a+}{Lt} f(x)=l_2$-এর অর্থ x-এর মান a অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু যথেষ্ট নিকটবর্তী হইলে, $f(x)$ ও l_2-এর মানের অন্তর যে কোন পূর্ব নির্ধারিত ধনাত্মক সংখ্যা (যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করা যায়।

$\underset{x \to a-}{Lt} f(x)=\underset{x \to a+}{Lt} f(x)=l$ অর্থাৎ $l_1=l_2=l$ হইলে বলা হয় $\underset{x \to a}{Lt} f(x)=l$,

উদাহরণ 1, $\underset{x \to 2}{Lt} (5x+2)$-এর মান নির্ণয় কর।

x	1·9	1·99	1·999	1·9999
$f(x)=5x+2$	11·5	11·95	11·995	11·9995

x	2·1	2·01	2·001	2·0001
$f(x)=5x+2$	12·5	12·05	12·005	12·0005

উপরের তালিকা দুইটির প্রথমটিতে x-এর 2 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কিন্তু 2-এর নিকটবর্তী মান সমূহের জন্য $f(x)=5x+2$-এর মান সমূহ নির্ণয় করা হইয়াছে। দ্বিতীয় তালিকাটিতে x-এর 2 অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 2-এর নিকটবর্তী মান সমূহের জন্য $f(x)=5x+2$-এর মান সমূহ নির্ণয় করা হইয়াছে। প্রথম তালিকা হইতে ইহা স্পষ্ট যে x-এর মান যত 2-এর নিকটবর্তী হইতেছে, ততই $f(x)$ ও 12-এর অন্তর ক্ষুদ্র হইতেছে এবং x-এর মান 2-এর যথেষ্ট নিকটবর্তী লইয়া $f(x)$ ও 12-এর অন্তর যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা (যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করা যায়।

$$\therefore \underset{x \to 2-}{Lt} (2x+5)=12.$$

অনুরূপে দ্বিতীয় তালিকা হইতে ইহা স্পষ্ট যে

$$\underset{x \to 2+}{Lt} (2x+5)=12.$$

$$\therefore \underset{x \to 2-}{Lt} (2x+5)=\underset{x \to 2+}{Lt} (2x+5)=12.$$

$$\therefore \underset{x \to 2}{Lt} (2x+5)=12.$$

উদাহরণ 2. দেখাও যে, $\underset{x \to 2}{Lt}\ x^2 = 4.$

নিম্নে x-এর নিকটবর্তী মান সমূহের জন্য $f(x)$-এর মান সমূহ তালিকা ভুক্ত করা হইল।

$x=$	2·1	2·01	2·001	2·0001
$f(x)=x^2$	4·41	4·0401	4·004001	4·00040001

$x=$	1·9	1·99	1·999	1·9999
$f(x)=x^2$	3·61	3·9601	3·996001	3·9 96 001

উপরের তালিকা দুইটি হইতে স্পষ্টতঃ $\underset{x \to 2+}{Lt}\ f(x) = 4$

এবং $\underset{x \to 2-}{Lt}\ f(x) = 4.$

সুতরাং $\underset{x \to 2}{Lt}\ f(x) = 4$ অর্থাৎ $\underset{x \to 2}{Lt}\ x^2 = 4.$

উদাহরণ 3. $f(x) = 3x$ যখন $x \geqslant 1$

$= x$ যখন $x < 1.$

দেখাও যে $\underset{x \to 1}{Lt}\ f(x)$-এর মান নাই।

প্রথমে $\underset{\to 1-}{Lt}\ f(x)$ নির্ণয় করা যাক। এইক্ষেত্রে $x < 1.$ সুতরাং $f(x) = x.$

নিম্নে 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কিন্তু 1 এর নিকটবর্তী x-এর মান সমূহের জন্য $f(x)$-এর মান সমূহ তালিকা বদ্ধ করা হইল।

x	0·9	0·99	0·999	0·9999
$f(x)=x$	0·9	0·99	0·999	0·9999

স্পষ্টতঃ $\underset{x \to 1-}{Lt}\ f(x) = 1.$

এইবার $\underset{\to 1+}{Lt}\ f(x)$ এর মান নির্ণয় করা যাক। এখানে $x > 1.$

সুতরাং $f(x) = 3x.$ নিম্নে 1 অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 1-এর নিকটবর্তী x-এর মান সমূহের জন্য $f(x)$ এর মান সমূহ তালিকাবদ্ধ করা হইল।

x	1·1	1·01	1·001	1·0001
$f(x)=3x$	3·3	3·03	3·003	3·0003

স্পষ্টতঃ $\underset{x \to 1+}{Lt} f(x) = 3.$

$\because \underset{x \to 1-}{Lt} f(x) \neq \underset{x \to 1+}{Lt} f(x).$

সুতরাং $\underset{x \to 1}{Lt} f(x)$-এর মান নাই।

উদাহরণ 4. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{x^2}{x}$-এর মান নির্ণয় কর।

0 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ও বৃহত্তর কিন্তু 0-র নিকটবর্তী x-র মান সমূহের জন্য $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$-এর মান সমূহ নিম্নে তালিকা বদ্ধ করা হইল।

x	$-\cdot 1$	$-\cdot 01$	$-\cdot 001$
x^2	$\cdot 01$	$\cdot 0001$	$\cdot 000001$
$f(x) = \dfrac{x^2}{x}$	$-\cdot 1$	$-\cdot 01$	$-\cdot 001$

এই তালিকা হইতে স্পষ্টতঃ $\underset{x \to 0-}{Lt} \dfrac{x^2}{x} = 0$

x	$\cdot 1$	$\cdot 01$	$\cdot 001$	$\cdot 0001$
x^2	$\cdot 01$	$\cdot 0001$	$\cdot 000001$	$\cdot 00000001$
$f(x) = \dfrac{x^2}{x}$	$\cdot 1$	$\cdot 01$	$\cdot 001$	$\cdot 0001$

স্পষ্টতঃ $\underset{x \to 0+}{Lt} \dfrac{x^2}{x} = 0$

যেহেতু $\underset{x \to 0-}{Lt} \dfrac{x^2}{x} = \underset{x \to 0+}{Lt} \dfrac{x^2}{x} = 0$

$\therefore \underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{x^2}{x} = 0.$

উদাহরণ 5. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{|x|}{x}$-এর মান নির্ণয় কর।

মনে কর $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. 0-র নিকটবর্তী x-এর মান সমূহের জন্য $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$-এর মান সমূহ নির্ণয় করা যাক।

x	$-\cdot1$	$-\cdot01$	$-\cdot001$	$-\cdot0001$
$\|x\|$	$\cdot1$	$\cdot01$	$\cdot001$	$\cdot0001$
$f(x)=\frac{\|x\|}{x}$	-1	-1	-1	-1

x	$\cdot1$	$\cdot01$	$\cdot001$	$\cdot0001$
$\|x\|$	$\cdot1$	$\cdot01$	$\cdot001$	$\cdot0001$
$f(x)=\frac{\|x\|}{x}$	1	1	1	1

$\therefore \underset{x \to 0-}{Lt} \frac{|x|}{x} = -1$ এবং $\underset{x \to 0+}{Lt} \frac{|x|}{x} = 1$

যেহেতু $\underset{x \to 0-}{Lt} \frac{|x|}{x} \neq \underset{x \to 0-}{Lt} \frac{|x|}{x}$

সুতরাং $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{|x|}{x}$-এর মান নাই।

উদাহরণ 6. $\underset{x \to 3}{Lt} [x]$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $[x]$-এর অর্থ x-এর অখণ্ড অংশ।

3 এর নিকটবর্তী x-এর মান সমূহের জন্য $[x]$-এর মান সমূহ নিম্নে তালিকা ভুক্ত করা হইল।

x	3	3·5	3·1	3·01	3·001	3·0001
$[x]$	3	3	3	3	3	3

স্পষ্টতঃ $\underset{x \to 3+}{Lt} [x] = 3.$

x	2·9	2·99	2·999	2·9999
$[x]$	2	2	2	2

স্পষ্টতঃ $\underset{x \to 3-}{Lt} [x] = 2.$

$\because \underset{x \to 3-}{Lt} [x] \neq \underset{x \to 3+}{Lt} [x]$

সুতরাং $\underset{x \to 3}{Lt} [x]$ এর মান নাই।

3. f(a) ও $\underset{x\to a}{Lt}$ f(x)-এর পার্থক্য (Distinction between $f(a)$ and $\underset{\to a}{Lt}\, f(x)$.)

$\underset{\to a}{Lt}\, f(x)$-এর অর্থ a-এর নিকটবর্তী মানসমূহে x-এর মান পরিবর্তনের জন্য $f(x)$-এর মান পরিবর্তনের প্রকৃতি নির্ণয়। x, a মানটি গ্রহণ করে কি করে না তাহা অপ্রাসঙ্গিক। $f(a)$ অনির্ণেয় হইলে ও $\underset{x\to a}{Lt}\, f(x)$-এর মান থাকিতে পারে। যেমন, উদা. 4-এ $\underset{x\to 0}{Lt}\, \frac{x^2}{x}$-এর মান আছে কিন্তু 0 বিন্দুতে $\frac{x^2}{x}$ অনির্ণেয়। আবার a বিন্দুতে $f(x)$ নির্ণেয় হইলেও $\underset{x\to a}{Lt}\, f(x)$-এর মান নাও থাকিতে পারে। $f(x)$-তে $x=a$ বসাইলে যে মান পাওয়া যায় তাহা হইল $f(a)$। যেমন উদা. 6-এ $[x]$-এর $x=3$ বিন্দুতে মান 3. কিন্তু $\underset{x\to 3}{Lt}\, [x]$-এর মান নাই।

উদাহরণ 7. মান নির্ণয় কর : $\underset{x\to 3}{Lt}\, \frac{x^2-9}{x-3}$.

$$\underset{x\to 3}{Lt}\, \frac{x^2-9}{x-3}=\underset{x\to 3}{Lt}\, \frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$$
$$=\underset{x\to 3}{Lt}\,(x+3)=6.$$

উদাহরণ 8. $\underset{x\to 2}{Lt}\, \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\underset{x\to 2}{Lt}\, \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\underset{x\to 2}{Lt}\, \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)}=\underset{x\to 2}{Lt}\, \frac{x-3}{x-1}=-1.$$

উদাহরণ 9. $\underset{h\to 0}{Lt}\, \frac{4h^2+4h}{h}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\underset{h\to 0}{Lt}\, \frac{4h^2+4h}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\, \frac{4h(h+1)}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\, 4(h+1)=4.$$

উদাহরণ 10. মান নির্ণয় কর : $\underset{x\to 3}{Lt}\, \frac{2-6x}{1-3x}$

$$\underset{x\to 3}{Lt}\, \frac{2-6x}{1-3x}=\underset{x\to 3}{Lt}\, \frac{2(1-3x)}{1\;\;3x}=\underset{x\to 3}{Lt}\, 2=2.$$

উদাহরণ 11. সীমা নির্ণয় কর :

(i) $\underset{x\to 0}{Lt}\, \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ (ii) $\underset{x\to 0}{Lt}\, \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}$

(iii) $\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$

সমাধান :

(i) $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)}$

$=\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}=\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}$

$=\underset{x\to 0}{Lt}(\sqrt{x+1}+1)=2.$

(ii) $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}$

$=\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x})(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})}{(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})\cdot x}$

$=\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{(1+2x)-(1-3x)}{(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})\cdot x}$

$=\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{5x}{(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})\cdot x}$

$=\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{5}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}}=\dfrac{5}{2}.$

(iii) $\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}=\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{(a-\sqrt{a^2-x^2})(a+\sqrt{a^2-x^2})}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})}$

$=\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{a^2-(a^2-x^2)}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})}=\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{x^2}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})}$

$=\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{1}{a+\sqrt{a^2-x^2}}=\dfrac{1}{a}.$

উদাহরণ 12. সীমা নির্ণয় কর :— $\underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

$\underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$=\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

4. **সীমা ও সন্তত্য** (Limit and Continuity)

পূর্বেই বলা হইয়াছে কোন বিন্দুর দুই পার্শ্বে অঙ্কিত অপেক্ষকটির লেখচিত্র অবিচ্ছিন্ন হইলে অপেক্ষকটিকে ঐ বিন্দুতে সন্তত বলা হয়। কোন অপেক্ষক $x=a$ বিন্দুতে সন্তত হইলে $\underset{x\to a}{Lt}\, f(x)=f(a)$ হয়। সুতরাং $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত না হইলে হয় $f(a)$ অনির্ণেয় হয়, অথবা $\underset{x\to a}{Lt}\, f(x)$ নির্ণয় করা যায় না অথবা, $\underset{x\to a}{Lt}\, f(x)\neq f(a)$ হয়।

উদাহরণ 13. নিম্নলিখিত সীমাগুলি নির্ণয় কর :—

(i) $\underset{x\to 2}{Lt}\, x^2$ (ii) $\underset{x\to \theta}{Lt}\, \sin x$ (iii) $\underset{x\to 2}{\text{Lim}}\, (3x+4)$

(iv) $\underset{x\to \frac{\pi}{2}}{Lt}\, \text{cosec}\, x$ (v) $\underset{x\to 0}{Lt}\, e^x$.

সমাধান :

(i) যেহেতু $y=x^2$ অপেক্ষকটির লেখচিত্র সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন।

সুতরাং $\underset{x\to 2}{Lt}\, x^2=(2)^2=4$

(ii) যেহেতু $\sin x$-এর লেখ অবিচ্ছিন্ন

সুতরাং $\underset{x\to \theta}{Lt}\, (\sin x)=\sin\theta.$

(iii) $y=3x+4$ অপেক্ষকটির লেখচিত্র অবিচ্ছিন্ন হওয়ায়

$$\underset{x\to 2}{Lt}\,(3x+4)=3.2+4=10.$$

(iv) $y=\text{cosec}\, x$ অপেক্ষকটির লেখচিত্র $\frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে সন্তত।

সুতরাং $\underset{x\to \frac{\pi}{2}}{Lt}\, \text{cosec}\, x=\text{cosec}\, \frac{\pi}{2}=1.$

(v) $y=e^x$ অপেক্ষকটির লেখচিত্র সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন

$\therefore$ $x=0$ বিন্দুতে $y=e^x$ অপেক্ষকটি সন্তত।

সুতরাং $\underset{x\to 0}{Lt}\, e^x=e^0=1.$

উদাহরণ 14. একটি অপেক্ষক $f(x)$-এর সংজ্ঞা নিম্নরূপ :—

$$f(x)=-x \text{ যখন } x<0$$
$$=0 \text{ যখন } x=0$$
$$=x \text{ যখন } x>0.$$

$\underset{x\to 0}{Lt}\, f(x)$ এর মান নির্ণয় কর এবং ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকটি সন্তত কিনা বল।

$$\underset{x\to 0-}{Lt}\, f(x)=\underset{x\to 0-}{Lt}\,(-x)=0$$

$$\underset{x\to 0+}{Lt}\, f(x)=\underset{x\to 0+}{Lt}\, x=0$$

$$\because\ \underset{x\to 0-}{Lt}\, f(x)=\underset{x\to 0+}{Lt}\, f(x)=0$$

$$\therefore\ \underset{x\to 0}{Lt}\, f(x)=0=f(0)$$

সুতরাং $x=0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি সন্তত।

উদাহরণ 15. একটি অপেক্ষক $f(x)$-এর সংজ্ঞা নিম্নরূপ :—

$$f(x)=x^2 \text{ যখন } x<1.$$
$$=2 \text{ যখন } x=1$$
$$=x^2+2 \text{ যখন } x>1$$

$\underset{x\to 1}{Lt}\, f(x)$ নির্ণেয় কিনা বল এবং $x=1$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি সন্তত কিনা নির্ণয় কর।

$$\underset{x\to 1-}{Lt}\, f(x)=\underset{x\to 1-}{Lt}\, x^2=1^2=1$$

$$\underset{x\to 1+}{Lt}\, f(x)=\underset{x\to 1+}{Lt}\,(x^2+2)=1^2+2=3$$

$$\because\ \underset{x\to 1-}{Lt}\, f(x)\neq\underset{x\to 1+}{Lt}\, f(x).$$

$\therefore\ \underset{x\to 1}{Lt}\, f(x)$ অনির্ণেয় এবং অপেক্ষকটি $x=1$ বিন্দুতে অসন্তত।

উদাহরণ 16. একটি অপেক্ষক $f(x)$ এর সংজ্ঞা নিম্নরূপ

$$f(x)=-x \text{ যখন } x\leqslant 0$$
$$=x \text{ যখন } 0<x<1$$
$$=2-x \text{ যখন } x\geqslant 1$$

প্রমাণ কর যে, অপেক্ষকটি $x=0$ এবং $x=1$ বিন্দু দুইটিতে সন্তত।

[C. U. 1942]

$$\underset{x\to 0-}{Lt}\, f(x)=\underset{x\to 0-}{Lt}\,(-x)=0$$

$$\underset{x\to 0+}{Lt}\, f(x)=\underset{x\to 0+}{Lt}\, x=0.$$

$\because \underset{x\to 0-}{Lt} f(x) = \underset{x\to 0+}{Lt} f(x) = 0$

$\therefore \underset{x\to 0}{Lt} f(x) = 0 = f(0)$

সুতরাং অপেক্ষকটি $x=0$ বিন্দুতে সন্তত।

আবার $\underset{x\to 1-}{Lt} f(x) = \underset{x\to 1-}{Lt} x = 1.$

$\underset{x\to 1+}{Lt} f(x) = \underset{x\to 1+}{Lt} (2-x) = 1.$

$\because \underset{x\to 1-}{Lt} f(x) = \underset{x\to 1+}{Lt} f(x) = 1$

$\therefore \underset{x\to 1}{Lt} f(x) = 1 = f(1).$

সুতরাং অপেক্ষকটি $x=1$ বিন্দুতে সন্তত।

উদাহরণ 17. $\phi(x)=0$ যখন $x=0$

$=\frac{1}{2}-x$ যখন $0 < x < \frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}$ যখন $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$

প্রমাণ কর যে, অপেক্ষকটি $x=0$ ও $x=\frac{1}{2}$ বিন্দু দুইটিতে অসন্তত।

[C. f. C. U. 1966]

$\underset{x\to 0+}{Lt} \phi(x) = \underset{x\to 0+}{Lt} (\frac{1}{2}-x) = \frac{1}{2}.$

যেহেতু $\underset{x\to 0+}{Lt} \phi(x) \neq \phi(0)$ [এখানে $\phi(0)=0$]

$\therefore$ প্রদত্ত অপেক্ষকটি $x=0$ বিন্দুতে অসন্তত।

আবার $\underset{x\to \frac{1}{2}-}{Lt} \phi(x) = \underset{x\to \frac{1}{2}-}{Lt} (\frac{1}{2}-x) = 0.$

$\underset{x\to \frac{1}{2}+}{Lt} \phi(x) = \underset{x\to \frac{1}{2}+}{Lt} (\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$\because \underset{x\to \frac{1}{2}+}{Lt} \phi(x) \neq \underset{x\to \frac{1}{2}+}{Lt} \phi(x).$

সুতরাং $\underset{x\to \frac{1}{2}}{Lt} \phi(x)$ অনির্ণেয়; সুতরাং $\phi(x)$ অপেক্ষকটি $x=\frac{1}{2}$ বিন্দুতে অসন্তত।

উদাহরণ 18. নিম্নের অপেক্ষকটি $x=4$ বিন্দুতে সন্তত কিনা বল।

$f(x)=4x+3$ যখন $x > 4$ অথবা $x < 4$

$=3x+7$ যখন $x=4$

[C. U. 1964]

$$\underset{x\to 4-}{Lt}\ f(x)=\underset{x\to 4-}{Lt}\ (4x+3)=19.$$

$$\underset{x\to 4+}{Lt}\ f(x)=\underset{x\to 4+}{Lt}\ (4x+3)=19.$$

$$\therefore\ \underset{x\to 4}{Lt}\ f(x)=19.$$

আবার $f(4)=3\ .\ 4+7=19.$

$$\therefore\ \underset{x\to 4}{Lt}\ f(x)=f(4).$$

সুতরাং প্রদত্ত অপেক্ষকটি $x=4$ বিন্দুতে সন্তত।

উদাহরণ 19. $x=\frac{1}{2}$ এবং $x=1$ বিন্দু দুইটিতে নিম্নলিখিত অপেক্ষকটি সন্তত না অসন্তত পরীক্ষা কর।

$$f(x)=x,\ x<1.$$

$$f(x)=1+x,\ x>1 \text{ এবং}$$

$$f(1)=\tfrac{3}{2}.$$

$$\underset{x\to 1-}{Lt}\ f(x)=\underset{x\to 1-}{Lt}\ x=1$$

$$\underset{x\to 1+}{Lt}\ f(x)=\underset{x\to 1+}{Lt}\ (1+x)=2.$$

$$\because\ \underset{x\to 1-}{Lt}\ f(x)\neq \underset{x\to 1+}{Lt}\ f(x)$$

$\therefore\ \underset{x\to 1}{Lt}\ f(x)$ অনির্ণেয় ও সুতরাং অপেক্ষকটি $x=1$ বিন্দুতে অসন্তত।

$$\underset{x\to \frac{1}{2}-}{Lt}\ f(x)=\underset{x\to \frac{1}{2}-}{Lt}\ x=\tfrac{1}{2}.$$

$$\underset{x\to \frac{1}{2}+}{Lt}\ f(x)=\underset{x\to \frac{1}{2}+}{Lt}\ x=\tfrac{1}{2}.$$

$$\therefore\ \underset{x\to \frac{1}{2}-}{Lt}\ f(x)=\underset{x\to \frac{1}{2}+}{Lt}\ f(x)=\tfrac{1}{2}=f(\tfrac{1}{2})$$

সুতরাং অপেক্ষকটি $x=\frac{1}{2}$ বিন্দুতে সন্তত।

5. সীমা সম্বন্ধীয় উপপাদ্য সমূহ (Limit Theorems).

$f(x)$ এবং $g(x)$ x-এর দুইটি অপেক্ষক হইলে এবং যদি $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

এবং $\underset{x\to a}{Lt}\ g(x)=m$ হয়, তবে— [l ও m নির্দিষ্ট মানযুক্ত]

1. $\underset{x \to a}{Lt}\, cf(x) = c \,.\, \lim_{x \to a} f(x) = c.l$ [যেখানে c একটি ধ্রুবক]

2. $\underset{x \to a}{Lt}\, \{f(x)+g(x)\} = \underset{x \to a}{Lt}\, f(x) + \underset{x \to a}{Lt}\, g(x) = l + m.$

3. $\underset{x \to a}{Lt}\, \{f(x)-g(x)\} = \underset{x \to a}{Lt}\, f(x) - \underset{x \to a}{Lt}\, g(x) = l - m.$

4. $\underset{x \to a}{Lt}\, \{f(x)\, g(x)\} = \underset{x \to a}{Lt}\, f(x) \,.\, \underset{x \to a}{Lt}\, g(x) = l \,.\, m.$

5. $\underset{x \to a}{Lt}\, \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\underset{x \to a}{Lt}\, f(x)}{\underset{x \to a}{Lt}\, g(x)} = \dfrac{l}{m}$ [যেখানে $m \neq 0.$]

6. $\lim_{x \to a} f\{g(x)\} = f\{\underset{x \to a}{Lt}\, g(x)\} = f(m)$, যেখানে $f(x)$, $x = m$ বিন্দুতে সন্তত।

উদাহরণ 20. সীমা নির্ণয় কর : $\underset{x \to 3}{Lt}\, 5x$

$$\underset{x \to 3}{Lt}\, (5x) = 5\, \underset{x \to 3}{Lt}\, x = 5 \,.\, 3 = 15.$$

উদাহরণ 21. সীমাস্থ মানগুলি নির্ণয় কর :

(i) $\underset{x \to \cdot 1}{Lt}\, (100x^2 + 10x + 1)$

(ii) $\underset{x \to 0}{Lt}\, \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n}$ $(b_n \neq 0)$

সমাধান :

(i) $\underset{x \to \cdot 1}{Lt}\, (100x^2 + 10x + 1) = \underset{x \to \cdot 1}{Lt}\, 100x^2 + \underset{x \to \cdot 1}{Lt}\, 10x + \underset{x \to \cdot 1}{Lt}\, 1$

$$= 100 \times \underset{x \to \cdot 1}{Lt}\, x^2 + 10\, \underset{x \to \cdot 1}{Lt}\, x + 1$$

$$= 100 \times (\cdot 01) + 10 \times \cdot 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

(ii) $\underset{x \to 0}{Lt}\, \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n}$

$$= \frac{\underset{x \to 0}{Lt}\, (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n)}{\underset{x \to 0}{Lt}\, (b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n)}$$

[যেহেতু লব ও হরের অপেক্ষক দুইটির সীমা নির্ণেয়]

$$= \frac{\underset{x \to 0}{Lt}\, a_0x^n + \underset{x \to 0}{Lt}\, a_1x^{n-1} + \cdots + \underset{x \to 0}{Lt}\, a_n}{\underset{x \to 0}{Lt}\, b_0x^n + \underset{x \to 0}{Lt}\, b_1x^{n-1} + \cdots + \underset{x \to 0}{Lt}\, b_n}$$

$$= \frac{0 + 0 + \cdots + a_n}{0 + 0 + \cdots + b_n} = \frac{a_n}{b_n}.$$

উদাহরণ 22. দেখাও যে, $\underset{x\to1}{Lt}\ \frac{x^4-1}{x-1}=4.$

$$\underset{x\to1}{Lt}\ \frac{x^4-1}{x-1}=\underset{x\to1}{Lt}\ \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x-1}=\underset{x\to1}{Lt}\ \{(x^2+1)(x+1)\}$$

$$=\lim_{x\to1}(x^2+1).\underset{x\to1}{Lt}(x+1)=2\ .\ 2=4.$$

উদাহরণ 23. $f(x)=ax^2+bx+c.$

$\underset{h\to0}{Lt}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$=\underset{h\to0}{Lt}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\underset{h\to0}{Lt}\ \frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-ax^2-bx-c}{h}$$

$$=\underset{h\to0}{Lt}\ \frac{ax^2+2axh+h^2+bx+bh+c-ax^2-bx-c}{h}$$

$$=\underset{h\to0}{Lt}\ \frac{2axh+h^2+bh}{h}=\underset{h\to0}{Lt}\ \frac{h(2ax+h+b)}{h}$$

$$=\underset{h\to0}{Lt}(2ax+h+b)=\underset{h\to0}{Lt}(2ax)+\underset{h\to0}{Lt}\ h+\underset{h\to0}{Lt}\ b$$

$$=2ax+0+b=2ax+b.$$

উদাহরণ 24. সীমা নির্ণয় কর :

$$\lim_{x\to1}3^{x^2-4x+2}$$

যেহেতু 3^x একটি সন্তত অপেক্ষক,

$$\therefore\quad \underset{x\to1}{Lt}\ 3^{x^2-4x+2}$$

$$=3^{\underset{x\to1}{Lt}(x^2-4x+2)}=3^{-1}=\tfrac{1}{3}.$$

উদাহরণ 25. সীমা নির্ণয় কর :

(i) $\underset{x\to0}{Lt}\ e^{x^2+4x+3}$ (ii) $\underset{x\to0}{Lt}\ \cos(x^2-x)$

সমাধান :

(i) $\underset{x\to0}{Lt}\ e^{x^2+4x+3}=e^{\underset{x\to0}{Lt}(x^2+4x+3)}$

$$=e^{\underset{x\to0}{Lt}x^2+\underset{x\to0}{Lt}4x+\underset{x\to0}{Lt}3}=e^{0+0+3}=e^3$$

(ii) $\underset{x\to 0}{Lt}\ \cos(x^2-x)=\cos\{\underset{x\to 0}{Lt}\ (x^2-x)\}$

$$=\cos 0=1.$$

উদা. 26. প্রমাণ কর যে,

(i) $\underset{x\to 1}{Lt}\ \dfrac{x^5-1}{x-1}=5$ (ii) $\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=1$

সমাধান :

(i) $\underset{x\to 1}{Lt}\ \dfrac{x^5-1}{x-1}=\underset{x\to 1}{Lt}\ (x^4+x^3+x^2+x+1)$

$$=\underset{x\to 1}{Lt}\ x^4+\underset{x\to 1}{Lt}\ x^3+\underset{x\to 1}{Lt}\ x^2+\underset{x\to 1}{Lt}\ x+\underset{x\to 1}{Lt}\ 1$$
$$=1+1+1+1+1=5.$$

(ii) $\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\underset{x\to 0}{Lt}\ \dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$

$$=\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1}=\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$=\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{\underset{x\to 0}{Lt}\ 1}{\underset{x\to 0}{Lt}\ \{\sqrt{1+x}+1\}}$$

$$=\frac{1}{\underset{x\to 0}{Lt}\ \sqrt{1+x}+\underset{x\to 0}{Lt}\ 1}=\frac{1}{\sqrt{\underset{x\to 0}{Lt}\ (1+x)}+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

উদা. 27. নীচের সম্পর্ক দুইটি সত্য কিনা বল।

(i) $\underset{x\to 2}{Lt}\ \dfrac{x^2}{x-2}-\underset{x\to 2}{Lt}\ \dfrac{4}{x-2}=\underset{x\to 2}{Lt}\ \dfrac{x^2-4}{x-2}$

(ii) $\underset{x\to 2}{Lt}\ (x^2-4)\times\underset{x\to 2}{Lt}\ \dfrac{1}{x-2}=\underset{x\to 2}{Lt}\ \dfrac{x^2-4}{x-2}$

সমাধান :

(i) বাম পক্ষের সীমা দুইটির প্রত্যেকটি অনির্ণেয় হওয়ায় সম্পর্কটি সত্য হইতে পারে না।

(ii) $\underset{x\to 2}{Lt}\ \dfrac{1}{x-2}$ অনির্ণেয় হওয়ায় সম্পর্কটি সত্য নয়।

[**দ্রষ্টব্য :** সীমা সম্বন্ধীয় উপপাদ্য সমূহে l ও m নির্দিষ্ট মান যুক্ত হওয়া আবশ্যক]

6. কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ সীমা (Some Important Limits) :

(ক) $\underset{x \to a}{Lt} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$, যেখানে n যে কোন একটি ধ্রুবক।

উদা. 28. নিম্নলিখিত সীমাগুলি নির্ণয় কর :

(i) $\underset{x \to 2}{Lt} \dfrac{x^5 - 32}{x - 2}$ (ii) $\underset{x \to 3}{Lt} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$

সমাধান :

(i) $\underset{x \to 2}{Lt} \dfrac{x^5 - 32}{x - 2} = \underset{x \to 2}{Lt} \dfrac{x^5 - 2^5}{x - 2} = 5.2^{5-1}$

$= 5.2^4 = 80.$

(ii) $\underset{x \to 3}{Lt} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3} = \underset{x \to 3}{Lt} \dfrac{x^3 - 3^3}{x - 3} = 3.3^{3-1} = 3.3^2 = 27.$

উদা. 29. সীমা নির্ণয় কর : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^n - 1}{h}$

মনে কর $1 + h = x$, $\therefore$ যখন $h \to 0$, তখন $x \leftarrow 1$ এবং $h = x - 1$.

এক্ষণে, প্রদত্ত সীমা $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^n - 1}{h} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$

$= n.1^{n-1} = n.1 = n.$

উদা. 30. সীমা নির্ণয় কর : $\underset{x \to 2}{Lt} \dfrac{2x^2 - 8}{x - 2}$

$\underset{x \to 2}{Lt} \dfrac{2x^2 - 8}{x - 2} = \underset{x \to 2}{Lt} \dfrac{2(x^2 - 4)}{x - 2} = 2 \underset{x \to 2}{Lt} \dfrac{x^2 - 2^2}{x - 2}$

$= 2.2.2^{2-1} = 2.2.2 = 8.$

উদা. 31. নিম্নলিখিত সীমাগুলি নির্ণয় কর :

(i) $\underset{x \to 3}{Lt} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$ (ii) $\underset{x \to a}{Lt} \dfrac{x^{\frac{3}{7}} - a^{\frac{3}{7}}}{x^{\frac{2}{5}} - a^{\frac{2}{5}}}$

সমাধান :

(i) $\underset{x \to 3}{Lt} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \underset{x \to 3}{Lt} \dfrac{\dfrac{x^3 - 27}{x - 3}}{\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}}$

$= \dfrac{\underset{x \to 3}{Lt} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}}{\underset{n \to 3}{Lt} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}} = \dfrac{3.3^{3-1}}{3.3^{2-1}} = \dfrac{3^3}{3^2} = 3.$

(ii) $$\underset{x\to a}{Lt}\frac{x^{\frac{3}{7}}-a^{\frac{3}{7}}}{x^{\frac{2}{5}}-a^{\frac{2}{5}}}=\underset{x\to a}{Lt}\frac{\dfrac{x^{\frac{3}{7}}-a^{\frac{3}{7}}}{x-a}}{\dfrac{x^{\frac{2}{5}}-a^{\frac{2}{5}}}{x-a}}$$

$$=\frac{\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{x^{\frac{3}{7}}-a^{\frac{3}{7}}}{x-a}}{\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{x^{\frac{2}{5}}-a^{\frac{2}{5}}}{x-a}}=\frac{\frac{3}{7}a^{\frac{3}{7}-1}}{\frac{2}{5}a^{\frac{2}{5}-1}}=\frac{15}{14}a^{\frac{3}{7}-1-\frac{2}{5}+1}$$

$$=\frac{15}{14}a^{\frac{1}{35}}.$$

উদা. 32. প্রমাণ কর যে,

(i) $\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{x^n-a^n}{x^m-a^m}=\dfrac{n}{m}a^{n-m}$ (ii) $\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{x^{-4}-a^{-4}}{x^{-7}-a^{-7}}=\dfrac{4}{7}a^3$

(iii) $\underset{x\to\sqrt{2}}{Lt}\dfrac{x^{\frac{5}{2}}-2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{x}-2^{\frac{1}{4}}}=10$ (iv) $\underset{x\to 2}{Lt}\dfrac{(2x)^4-256}{2(x-2)}=256$

(v) $\underset{x\to 1}{Lt}\dfrac{x^{\frac{7}{2}}-1}{x^{\frac{5}{2}}-1}=\dfrac{7}{5}$

সমাধান ঃ

(i) $$\underset{x\to a}{Lt}\frac{x^n-a^n}{x^m-a^m}=\underset{x\to a}{Lt}\frac{\dfrac{x^n-a^n}{x-a}}{\dfrac{x^m-a^m}{x-a}}$$

$$=\frac{\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}}{\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{x^m-a^m}{x-a}}=\frac{na^{n-1}}{ma^{m-1}}=\frac{n}{m}a^{n-m}$$

(ii) $$\underset{x\to a}{Lt}\frac{x^{-4}-a^{-4}}{x^{-7}-a^{-7}}=\underset{x\to a}{Lt}\frac{\dfrac{x^{-4}-a^{-4}}{x-a}}{\dfrac{x^{-7}-a^{-7}}{x-a}}$$

$$=\frac{\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{x^{-4}-a^{-4}}{x-a}}{\underset{x\to a}{Lt}\dfrac{x^{-7}-a^{-7}}{x-a}}=\frac{-4a^{-5}}{-7a^{-8}}=\frac{4}{7}a^3$$

(iii) $\underset{x\to\sqrt{2}}{Lt}\dfrac{x^{\frac{5}{2}}-2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{x}-2^{\frac{1}{4}}}=\underset{x\to\sqrt{2}}{Lt}\dfrac{x^{\frac{5}{2}}-(\sqrt{2})^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}}$

$$=\underset{x\to\sqrt{2}}{Lt}\frac{\dfrac{x^{\frac{5}{2}}-(\sqrt{2})^{\frac{5}{2}}}{x-\sqrt{2}}}{\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}}{x-\sqrt{2}}}=\frac{\underset{x\to\sqrt{2}}{Lt}\dfrac{x^{\frac{5}{2}}-(\sqrt{2})^{\frac{5}{2}}}{x-\sqrt{2}}}{\underset{x\to\sqrt{2}}{Lt}\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}}{x-\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\frac{5}{2}(\sqrt{2})^{\frac{5}{2}-1}}{\frac{1}{2}(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}-1}}=5.(\sqrt{2})^{\frac{5}{2}-1-\frac{1}{2}+1}$$

$$=5.(\sqrt{2})^2=5.2=10.$$

(iv) $\underset{x\to 2}{Lt}\dfrac{(2x)^4-256}{2(x-2)}=\underset{2x\to 4}{Lt}\dfrac{(2x)^4-4^4}{2x-4}=4.(4)^3=4.64=256.$

(v) $\underset{x\to 1}{Lt}\dfrac{x^{\frac{7}{2}}-1}{x^{\frac{5}{2}}-1}$

$$=\underset{x\to 1}{Lt}\frac{\dfrac{x^{\frac{7}{2}}-1^{\frac{7}{2}}}{x-1}}{\dfrac{x^{\frac{5}{2}}-1^{\frac{5}{2}}}{x-1}}=\frac{\underset{x\to 1}{Lt}\dfrac{x^{\frac{7}{2}}-1^{\frac{7}{2}}}{x-1}}{\underset{x\to 1}{Lt}\dfrac{x^{\frac{5}{2}}-1^{\frac{5}{2}}}{x-1}}=\frac{\frac{7}{2}.1^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}.1^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{7}{5}$$

(খ) $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}}\dfrac{\sin x}{x}=1$ [যেখানে x-এর একক রেডিয়ান]

উদা. 33. নিম্নলিখিত সীমাগুলি নির্ণয় কর।

(i) $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{\tan x}{x}$ (ii) $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{1-\cos x}{x}$

(iii) $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (iv) $\underset{x\to \pi}{Lt}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$

সমাধান :

(i) $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{\tan x}{x}=\underset{x\to 0}{Lt}\left\{\dfrac{\sin x}{x\cos x}\right\}=\underset{x\to 0}{Lt}\left\{\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right\}$

$$=\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\sin x}{x}\cdot\underset{x\to 0}{Lt}\frac{1}{\cos x}=1.1=1$$

[যেহেতু $\cos x$ অপেক্ষকটি সর্বত্র সন্তত,

$$\underset{x\to 0}{Lt}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\underset{x\to 0}{Lt}\cos x}=\frac{1}{\cos 0}=\frac{1}{1}=1\ ]$$

(ii) $$\underset{x\to 0}{Lt}\frac{1-\cos x}{x}=\underset{x\to 0}{Lt}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$$

$$=2\underset{x\to 0}{Lt}\left\{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x\cdot\frac{x}{4}}\cdot\frac{x}{4}\right\}$$

$$=2\underset{x\to 0}{Lt}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\underset{x\to 0}{Lt}\frac{x}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\underset{x\to 0}{Lt}\,x$$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot(1)^2\cdot 0=0.$$

(iii) $$\underset{x\to 0}{Lt}\frac{1-\cos x}{x^2}=\underset{x\to 0}{Lt}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=2\underset{x\to 0}{Lt}\left\{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{2}\cdot\underset{x\to 0}{Lt}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\tfrac{1}{2}\cdot 1^2=\tfrac{1}{2}\cdot 1=\tfrac{1}{2}.$$

(iv) $$\underset{x\to\pi}{Lt}\frac{\sin x}{\pi-x}=\underset{x\to\pi}{Lt}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}$$

$$=\underset{\pi-x\to 0}{Lt}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=1.$$

উদা. 34. প্রমাণ কর যে,

(i) $\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\sin(x^2)}{x}=0.$ (ii) $\underset{x\to 0}{Lt}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2=4.$

(iii) $\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}.$

সমাধান:

(i) $$\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\sin(x^2)}{x}=\underset{x\to 0}{Lt}\left\{\frac{\sin(x^2)}{x^2}\cdot x\right\}$$

$$=\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\sin(x^2)}{x^2}\cdot\underset{x\to 0}{Lt}\,x=1\cdot 0=0.$$

(ii) $$\underset{x\to 0}{Lt}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2=\underset{x\to 0}{Lt}\left\{\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot 4\right\}$$

$$=4\cdot\underset{x\to 0}{Lt}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2$$

$$=4\cdot\left\{\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin 2x}{2x}\right\}^2=\left\{\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{\sin h}{h}\right\}^2$$ [$h=2x$ ধরিয়া]

$$=4\ .\ 1^2=4\ ,\ 1=4.$$

(iii) $\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$.

$$=\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}\ .\ \alpha x}{\frac{\sin \beta x}{\beta x}\ .\ \beta x}$$

$$=\underset{x\to 0}{Lt}\ \left\{\frac{\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\frac{\sin \beta x}{\beta x}}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right\}=\frac{\alpha}{\beta}\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\frac{\sin \beta x}{\beta x}}$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin \beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{\beta}.1=\frac{\alpha}{\beta}.$$

উদা. 35. সীমা নির্ণয় কর :— $\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin x^\circ}{x}$.

$$x^\circ=\frac{\pi}{180}x^c.$$

$$\therefore\quad \underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin x^\circ}{x}=\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin\frac{\pi}{180}x^c}{x}$$

$$=\underset{x\to 0}{Lt}\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}}\cdot\frac{\pi}{180}\right\}=\frac{\pi}{180}\ .\ \underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}}$$

$$=\frac{\pi}{180}\ .\ 1=\frac{\pi}{180}.$$

উদা. 36. সীমা নির্ণয় কর :—

(i) $\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin^{-1}x}{x}$ (ii) $\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\tan^{-1}x}{x}$.

সমাধান :

(i) মনে কর $\sin^{-1}x=\theta$ $\therefore\ \sin\theta=x.$

এক্ষণে, $\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin^{-1}x}{x}=\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\theta}{\sin\theta}$

$$= \underset{x \to 0}{Lt} \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\theta}} = \frac{1}{\underset{x \to 0}{Lt} \frac{\sin\theta}{\theta}} = \frac{1}{1} = 1.$$

[$\because$ $\sin\theta = x$, $\therefore$ যখন $x \to 0$, তখন $\sin\theta \to 0$ অর্থাৎ $\theta \to 0$].

(ii) মনে কর $\tan^{-1}x = \phi$ $\quad \tan\phi = x$.

এবং যখন $x \to 0$, তখন $\tan\phi \to 0$

অর্থাৎ $\phi \to 0$.

এক্ষণে, $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{\tan^{-1}x}{x}$

$$= \underset{\phi \to 0}{Lt} \frac{\phi}{\tan\phi} = \underset{\phi \to 0}{Lt} \frac{\phi\cos\phi}{\sin\phi}$$

$$= \underset{\phi \to 0}{Lt} \frac{\cos\phi}{\frac{\sin\phi}{\phi}} = \frac{\underset{\phi \to 0}{Lt}\cos\phi}{\underset{\phi \to 0}{Lt} \frac{\sin\phi}{\phi}} = \frac{1}{1} = 1.$$

উদা. 37. প্রমাণ কর যে,

(i) $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{\tan 5x}{x} = 5$ $\qquad$ (ii) $\underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\tan m\theta}{\tan n\theta} = \frac{m}{n}$.

সমাধান :

(i) $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{\tan 5x}{x}$

$$= \underset{x \to 0}{Lt} \frac{\frac{\sin 5x}{\cos 5x}}{x} = \underset{x \to 0}{Lt} \left\{ \frac{\sin 5x}{5x} . 5 . \frac{1}{\cos 5x} \right\}$$

$$= 5 \underset{x \to 0}{Lt} \frac{\sin 5x}{5x} . \underset{x \to 0}{Lt} \frac{1}{\cos 5x}$$

$$= 5 . \underset{5x \to 0}{Lt} \frac{\sin 5x}{5x} . \frac{1}{\underset{x \to 0}{Lt} \cos 5x} = 5.1.\frac{1}{1} = 5.$$

(ii) $$\underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\tan m\theta}{\tan n\theta} = \underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\frac{\sin m\theta}{\cos m\theta}}{\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}}$$

$$= \underset{\theta \to 0}{Lt} \left\{ \frac{\sin m\theta}{\sin n\theta} . \frac{\cos n\theta}{\cos m\theta} \right\}$$

$$= \underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\sin m\theta}{\sin n\theta} \cdot \underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\cos n\theta}{\cos m\theta}$$

$$= \underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\dfrac{\sin m\theta}{m\theta} \cdot m}{\dfrac{\sin n\theta}{n\theta} \cdot n} \cdot \frac{\underset{\theta \to 0}{Lt} \cos n\theta}{\underset{\theta \to 0}{Lt} \cos m\theta}$$

$$= \frac{m}{n} \frac{\underset{m\theta \to 0}{Lt} \dfrac{\sin m\theta}{m\theta}}{\underset{n\theta \to 0}{Lt} \dfrac{\sin n\theta}{n\theta}} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} \cdot 1 = \frac{m}{n}.$$

উদা. 38. দেখাও যে, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan ax}{\sin bx} = \dfrac{a}{b}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin ax}{\cos ax} \cdot \frac{1}{\sin bx} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{bx}{\sin bx} \cdot \frac{1}{\cos ax} \cdot \frac{a}{b} \right)$$

$$= \frac{a}{b} \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\dfrac{\sin bx}{bx}} \cdot \underset{x \to 0}{Lt} \frac{1}{\cos ax}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b}.$$

উদা. 39. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\frac{\pi}{4} - x}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\frac{\pi}{4} - x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - y) - \cos(\frac{\pi}{4} - y)}{y}$$

[$y = \frac{\pi}{4} - x$ মনে করিয়া]

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos y - \sin y) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos y + \sin y)}{y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{-\sqrt{2} \sin y}{y} = -\sqrt{2} \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = -\sqrt{2} \cdot 1 = -\sqrt{2}.$$

উদা. 40. সীমা নির্ণয় কর :

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$ (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{mx}{\tan nx}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$ (iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{6x^2}$

(v) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$ (vi) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\frac{\pi}{4}-x}$

(vii) $\lim\limits_{x\to 0} (\tan \alpha x \cos \beta x)$ (viii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}$

(ix) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x \sin a-a \sin x}{x-a}$

সমাধান :

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 \sin \frac{5x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{x^2}$

$=2 \lim\limits_{x\to 0} \left\{\dfrac{\sin \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \cdot \dfrac{5}{2} \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \dfrac{1}{2}\right\}$

$=2 \cdot \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{5}{2} \cdot 1 \cdot 1=\frac{5}{2}.$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{mx}{\tan nx}=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{mx}{\frac{\sin nx}{\cos nx}}$

$=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos nx}{\frac{\sin nx}{mx}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0} \cos nx}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin nx}{mx}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin nx}{nx} \cdot \frac{n}{m}}$

$=\dfrac{1}{\frac{n}{m} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin nx}{nx}}=\dfrac{1}{\frac{n}{m} \cdot 1}=\dfrac{1}{\frac{n}{m}}=\dfrac{m}{n}.$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$

$=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3}{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5}=\dfrac{3}{5} \dfrac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x}}=\dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{1}=\dfrac{3}{5}.$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{6x^2}=\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 \sin^2 3x}{6x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin^2 3x}{(3x)^2} . 3\right)$$

$$= 3 \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 = 3 . \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 = 3.1^2 = 3.$$

(v) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}$$

$$= \lim_{(\frac{\pi}{2}-x)\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x} = 1.$$

(vi) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\frac{\pi}{4}-x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(2 . \frac{\pi}{4} - 2x\right)}{\frac{\pi}{4}-x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\frac{\pi}{4}-x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\frac{\pi}{4}-x}$$

$$= 2 \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\frac{\pi}{4}-x} . \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{Lt} \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 2 . 1 . \cos 0 = 2 . 1 = 2.$$

(vii) $$\lim_{x\to 0} (\tan \alpha x \cot \beta x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \alpha x}{\cos \alpha x} . \frac{\cos \beta x}{\sin \beta x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} . \frac{\cos \beta x}{\cos \alpha x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} . \lim_{a\to 0} \frac{\cos \beta x}{\cos \alpha x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin \alpha x}{\alpha x} . \alpha}{\frac{\sin \beta x}{\beta x} . \beta} . \frac{\lim_{x\to 0} \cos \beta x}{\lim_{x\to 0} \cos \alpha x}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \frac{\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin \beta x}{\beta x}} . \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{\beta} . \frac{1}{1} . 1 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

(viii) $$\lim_{x\to 0} \frac{x(\cos x + \cos 2x)}{\sin x} = \frac{\lim_{x\to 0} (\cos x + \cos 2x)}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}$$

$$= \tfrac{2}{1} = 2.$$

(ix) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x \sin a - a \sin x}{x-a}$

$$= \lim_{x\to a} \frac{x \sin a - a \sin a + a \sin a - a \sin x}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(x-a) \sin a + a(\sin a - \sin x)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \left\{\frac{(x-a) \sin a}{x-a} + a\,\frac{\sin a - \sin x}{x-a}\right\}$$

$$= \lim_{x\to a} \sin a + a \lim_{x\to a} \frac{\sin a - \sin x}{x-a}.$$

$$= \sin a + a \lim_{x\to a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{a-x}{2}}{x-a}$$

$$= \sin a - a \lim_{x\to a} \frac{\sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

$$= \sin a - a\left\{\lim_{x\to a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \lim_{x\to a} \cos \frac{x+a}{2}\right\}$$

$$= \sin a - a\left\{\lim_{(\frac{x-a}{2})\to 0} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} . \cos a\right\}$$

$$= \sin a - a(1 \cos a) = \sin a - a \cos a.$$

উদা. 41. সীমা নির্ণয় কর : $\underset{h\to 0}{Lt} \dfrac{\sin (x+h) - \sin x}{h}$

$$\underset{h\to 0}{Lt} \frac{\sin (x+h) - \sin x}{h} = \underset{h\to 0}{Lt} \frac{2 \cos (x+\frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt} \left\{\cos (x+\tfrac{h}{2}) . \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt} \cos (x+\tfrac{h}{2}) \underset{\frac{h}{2}\to 0}{Lt} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x . 1 = \cos x.$$

(গ) $\underset{h\to 0}{Lt} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1.$

উদা. 42. সীমা নির্ণয় কর :

(i) $\lim_{h\to 0} \frac{e^{2+h}-e^2}{h}$ (ii) $\lim_{h\to 0} \frac{e^{h^3}-1}{h}$

সমাধান :

(i) $\lim_{h\to 0} \frac{e^{2+h}-e^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^2(e^h-1)}{h}$

$= e^2 \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^2 . 1 = e^2.$

(ii) $\lim_{h\to 0} \frac{e^{h^3}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \left\{\frac{e^{h^3}-1}{h^3}\ h^2\right\}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^3}-1}{h^3} . \lim_{h\to 0} h^2 = 1 . 0 = 0.$

উদা. 43. প্রমাণ কর : (i) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x}-1}{x} = 1$

(ii) $\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x.$

সমাধান :

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \left\{\frac{e^{\tan x}-1}{\tan x} . \frac{\tan x}{x}\right\}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x}-1}{\tan x} . \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} . \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} . 1 . \frac{1}{1}$ [$h=\tan x$ বসাইয়া এবং যখন $x\to 0$, তখন $h\to 0$]

$= 1 . 1 = 1.$

(ii) $\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h}$

$= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x . 1 = e^x.$

উদা. 44. প্রমাণ কর যে, (i) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{mx}-1}{x} = m$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{ae^x+be^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{a+b}{2}.$

সমাধান ঃ

(i) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{mx}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{mx}-1}{mx}.m\right)$$

$$=m\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h} \quad [\ h=mx \text{ বসাইয়া }]$$

$$=m\ .\ 1=m.$$

(ii) $$\lim_{x\to 0}\frac{ae^{x}+be^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{\lim_{x\to 0}(ae^{x}+be^{-x})}{\lim_{x\to 0}(e^{x}+e^{-x})}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 0} ae^{x}+\lim_{x\to 0} be^{-x}}{\lim_{x\to 0} e^{x}+\lim_{x\to 0} e^{-x}}=\frac{a+b}{1+1}=\frac{a+b}{2}.$$

উদা. 45. $\lim_{h\to 0}\frac{e^{(x+h)^2}-e^{x^2}}{h}$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{(x+h)^2}-e^{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x^2+2hx+h^2}-e^{x^2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x^2}\left(e^{2hx+h^2}-1\right)}{h}$$

$$=e^{x^2}\lim_{h\to 0}\frac{e^{2hx+h^2}-1}{h}=e^{x^2}\lim_{h\to 0}\frac{e^{h(2x+h)}-1}{h(2x+h)}(2x+h)$$

$$=e^{x^2}\lim_{h\to 0}\frac{e^{h(2x+h)}-1}{h(2x+h)}\lim_{h\to 0}(2x+h)$$

$$=e^{x^2}.\ 1\ .\ 2x=e^{x^2}.\ 2x.$$

$n\to\infty$ বা $n\to-\infty$-র অর্থ

$n\to\infty$-এর অর্থ এই যে n এরূপে মান পরিবর্তন করিতেছে যে, n-এর মান শেষ পর্যন্ত যে কোন পূর্বকল্পিত রাশি (রাশিটির মান যত বড়ই হউকনা কেন) অপেক্ষা বড় হইবে।

$n\to-\infty$-এর অর্থ এই যে n এরূপে মান পরিবর্তন করিতেছে যে, n-এর মান শেষ পর্যন্ত যে কোন পূর্বকল্পিত ঋণাত্মক রাশি (রাশিটির মান যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন অর্থাৎ রাশিটির পরমমান যত বড়ই হউক না কেন) অপেক্ষা ছোট হইবে।

উদা. 46. দেখাও যে, $\lim\limits_{n \to 0+} \frac{1}{n} = \infty$

মনে কর, $m = \frac{1}{n}$. এক্ষণে, 0-র নিকটবর্তী n-এর মান সমূহের জন্য $m = \frac{1}{n}$-এর মান নীচে তালিকাবদ্ধ করা হইল। এখানে n-এর মান সমূহ 0 অপেক্ষা বৃহত্তর লইতে হইবে।

n	1	·5	·2	·1	·01	·001	·00001	·0000001
$m = \frac{1}{n}$	1	2	5	10	100	1000	100000	10000000

উপরের তালিকা হইতে স্পষ্টতঃ লক্ষ্য করা যায় যে, n-এর মান 0 হইতে বৃহত্তর মান হইতে যত 0-র নিকটবর্তী হইতেছে, $m = \frac{1}{n}$-এর মান ততই ক্রমশঃ বাড়িয়া হইতেছে এবং m-এর মান 0-র যথেষ্ট নিকটবর্তী, কিন্তু 0 অপেক্ষা বড় লইয়া $\frac{1}{n}$-এর মান যে কোন পূর্বকল্পিত বৃহৎরাশি (যত বড়ই হউক না কেন) অপেক্ষা বৃহত্তর করা যায়। সুতরাং $\lim\limits_{n \to 0} \frac{1}{n} = \infty$.

উদা.. 47. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

n	1	2	5	10	100	1000	100000	10000000
$\frac{1}{n}$	1	·5	·2	·1	·01	·001	·00001	·0000001

উপরের তালিকা হইতে স্পষ্টত: লক্ষ্য করা যায় যে, n-এর মান যত বড় হইতেছে, $\frac{1}{n}$-এর মান ততই ক্ষুদ্র হইতেছে এবং n-এর মান যথেষ্ট বৃহৎ লইয়া $\frac{1}{n}$-এর মান যে কোন পূর্বকল্পিত ক্ষুদ্ররাশি (রাশিটি যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করা যায়। সুতরাং $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

উদা. 48. প্রমাণ কর যে, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{5}{n^2} = 0$.

মনে কর $m = \frac{1}{n}$; $\therefore$ যখন $n \to \infty$, তখন $m \to 0+$.

সুতরাং $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{5}{n^2} = \lim\limits_{m \to 0+} 5m^2 = 0$.

উদা. 49. দেখাও যে, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^3 - 3n^2 + 1}{n^3 + 2n^2 + n} = 1$

মনে কর $n = \frac{1}{m}$ $\therefore$ যখন $n \to \infty$, তখন $m \to 0+$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} \frac{n^3 - 3n^2 + 1}{n^3 + 2n^2 + n} = \lim_{m \to 0+} \frac{\frac{1}{m^3} - \frac{3}{m^2} + 1}{\frac{1}{m^3} + \frac{2}{m^2} + \frac{1}{m}}$$

$$=\lim_{m\to 0+}\frac{1-3m+m^3}{1+2m+m^2}=\frac{\lim_{m\to 0+}(1-3m+m^3)}{\lim_{m\to 0+}(1+2m+m^2)}$$

$$=\tfrac{1}{1}=1.$$

উদা. 50. দেখাও যে, $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{1}{2}$, যেখানে n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n.n}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{m\to 0+}\frac{1}{2}(1+m)=\frac{1}{2}\lim_{m\to 0}(1+m)$$

$$=\tfrac{1}{2}\,.\,1=\tfrac{1}{2}.$$

উদা. 51. দেখাও যে, $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{3\,.\,4}\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right\}=1$

$$\frac{1}{1\,.\,2}=1-\frac{1}{2}\,;\;\frac{1}{2\,.\,3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\,;\;\frac{1}{3\,.\,4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\,;\;\cdots\cdots\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

$$\therefore\;\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{3\,.\,4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=(1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+\cdots\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore\;\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{3\,.\,4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)$$ [$m=n+1$ মনে করিয়া]

$$=\lim_{p\to 0+}(1-p)=1.$$

উদা. 52. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+n\sin^2\pi x}\right)=0$, যখন x পূর্ণসংখ্যা নয়

$=1$, যখন x একটি পূর্ণসংখ্যা।

যখন x পূর্ণসংখ্যা নয়, $\sin^2\pi x\neq 0$.

$$\therefore\;\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+n\sin^2\pi x}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\sin^2\pi x}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\sin^2\pi x\right)}=\frac{0}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\pi x}$$

$$=\frac{0}{0+\sin^2\pi x}=0 \qquad \left[\because \frac{0}{\text{সসীম রাশি}}=0\right]$$

যখন x একটি অখণ্ড সংখ্যা, তখন $\sin^2\pi x=0$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n\sin^2\pi x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n\,.\,0}=\lim_{n\to\infty}1=1.$$

উদা. 53. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n g(x)+h(x)}{x^n+1}$ হইলে দেখাও যে,

$$f(x)=h(x), \text{ যখন } 0<x<1$$
$$=\tfrac{1}{2}\{g(x)+h(x)\}, \text{ যখন } x=1$$
$$=g(x), \text{ যখন } x>1.$$

যখন $0<x<1$, তখন $x^n\to 0$ যখন $n\to\infty$.

$$\therefore f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n g(x)+h(x)}{x^n+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\{x^n g(x)+h(x)\}}{\lim\limits_{n\to\infty}\{x^n+1\}}=\frac{h(x)}{1}=h(x).$$

যখন $x=1$, তখন $x^n=1$.

$$\therefore f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n g(x)+h(x)}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{g(x)+h(x)}{1+1}$$

যখন $x>1$, তখন $n\to\infty$ হইলে $x^n\to\infty$ এবং $\dfrac{1}{x^n}\to 0$

$$\therefore \lim_{n\to 0}\frac{x^n g(x)+h(x)}{x^n+1}=\lim_{n\to 0}\frac{g(n)+\frac{h(x)}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to 0}\left\{g(n)+\frac{h(n)}{x^n}\right\}}{\lim\limits_{n\to 0}\left\{1+\frac{1}{x^n}\right\}}=\frac{g(x)}{1}=g(x)$$

প্রশ্নমালা II

1. $\underset{x\to 2}{Lt}\,(3x-2)$ এর মান নির্ণয় কর।

2. দেখাও যে, $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$.

3. $f(x)=2x+1$ যখন $x \geqslant 1$

$=x$ যখন $x < 1$

দেখাও যে, $\underset{x\to 1}{Lt}\, f(x)$ এর মান নাই।

4. $\underset{x\to 0}{Lt}\, \frac{x^3}{x}$ এর মান নির্ণয় কর।

5. মান নির্ণয় কর : $\underset{x\to 1}{Lt}\, \frac{x^2-1}{x-1}.$

6. মান নির্ণয় কর : $\underset{x\to 3}{Lt}\, \frac{x^2-7x+12.}{x^2-5x+6}$

7. মান নির্ণয় কর : $\underset{x\to 0}{Lt}\, \frac{x}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}.$

8. মান নির্ণয় কর : $\underset{x\to 0}{Lt}\, \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$

যখন $f(x)=$(i) $\frac{1}{x}$ (ii) x^2.

9. নিম্নলিখিত সীমাগুলি নির্ণয় কর :

(i) $\underset{x\to 2}{Lt}\, x^3$. (ii) $\underset{x\to \theta}{Lt}\, \cos\theta$. (iii) $\underset{x\to 1}{Lt}\, (4x+3)$.

10. একটি অপেক্ষক এর সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

$\underset{x\to 0}{Lt}\, f(x)$ এর মান আছে কিনা নির্ণয় কর।

(i) $f(x)=1$ যখন $x \geqslant 0$

$=0$ যখন $x < 0$.

(ii) $f(x)=1$ যখন x একটি অখণ্ড সংখ্যা।

$=0$ যখন x অখণ্ড সংখ্যা নয়।

11. একটি অপেক্ষক $f(x)$ এর সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

$f(x)=-x$ যখন $x \leqslant 0$

$=x$ যখন $x \geqslant 0$

$\underset{x\to 0}{Lt}\, f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

12. সীমা নির্ণয় কর : $\underset{x\to 2}{Lt}\, 4x$.

13. সীমা নির্ণয় কর : (i) $\underset{x\to \cdot 1}{Lt}\, (100x^2+10x+1)$

(ii) $\underset{x\to 0}{Lt}\, \frac{2x^2+3x+4}{3x^2+4x+5}.$

14. দেখাও যে, $\underset{x\to 1}{Lt} \dfrac{x^3-1}{x-1}=3.$

15. দেখাও যে, $f(x)=x^2+5$ হইলে

$$\underset{h\to 0}{Lt} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2x.$$

16. সীমা নির্ণয় কর : $\underset{x\to 2}{Lt}\, 2^{x^2-3x+4}.$

17. সীমা নির্ণয় কর :

(i) $\underset{x\to 0}{Lt}\, e^{2x+3}$ (ii) $\underset{x\to 0}{Lt} \sin\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)$

18. সীমা নির্ণয় কর : (i) $\underset{x\to 0}{Lt} \dfrac{x^4-81}{x-3}.$

(ii) $\underset{x\to \alpha}{Lt} \dfrac{x^n-\alpha^n}{x^m-\alpha^m}$ (iii) $\underset{x\to a}{Lt} \dfrac{x^{-5}-a^{-5}}{x^{-8}-a^{-8}}.$

19. নিম্নলিখিত সীমাগুলি নির্ণয় কর :

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan \alpha x}{\sin \beta x}$ (ii) $\underset{\theta\to 0}{Lt} \tan 4\theta \operatorname{cosec} 2\theta$

20. নিম্নলিখিত সীমাসমূহের মান নির্ণয় কর :

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{4x^2}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x-\cos 4x}{x^2}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 8x}$ (iv) $\lim\limits_{x\to 0} (mx \cot nx).$

21. প্রমাণ কর যে,

(i) $\underset{h\to 0}{Lt} \dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\sin x.$

(ii) $\underset{h\to 0}{Lt} \dfrac{\tan(x+h)-\tan x}{h}=\sec^2 x.$

22. সীমা নির্ণয় কর :

(i) $\underset{h\to 0}{Lt} \dfrac{e^{3+h}-e^3}{h}$ (ii) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{h^2}-1}{h}$

23. সীমা নির্ণয় কর : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}$

24. সীমা নির্ণয় কর :

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$ (ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n^3+1}$ (iii) $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x^2}}$

25. সীমা নির্ণয় কর :

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+c}{cx^2+dx+a}$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\left(\frac{3}{n}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^3\right\}$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1\,.\,2+2\,.\,3+3\,.\,4+\cdots\cdots+n(n+1)}{n^3}$.

26. প্রমাণ কর যে,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

$=\infty$ যখন $n>m$

$=\frac{a_0}{b_0}$ যখন $n=m$

$=0$ যখন $n<m$.

৩ অপেক্ষকের অন্তরকলন

(Differentiation of functions)

1. **সংজ্ঞা :** মনে কর $y=f(x)$, x-চলের একটি অপেক্ষক।

$\underset{h\to 0}{Lt}\ \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ সীমাটি নির্ণেয় হইলে, সীমাটিকে $f(x)$ অপেক্ষকের x-এর সাপেক্ষে **অন্তরকলজ** (derivative) বা **ডিফারেন্সিয়াল গুণাঙ্ক** বলা হয়। অন্তরকলজ নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে **অন্তরকলন** (differentiation) বলা হয়। $\underset{h\to 0-}{Lt}\ \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$-কে $f(x)$-এর বামপক্ষের অন্তরকলজ

এবং $\underset{h\to 0+}{Lt}\ \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ কে $f(x)$-এর ডানপক্ষের অন্তরকলজ বলা হয়। কোন অপেক্ষকের কোন বিন্দুতে অন্তরকলজ নির্ণয় সম্ভব হইলে, অপেক্ষকটিকে ঐ বিন্দুতে **অন্তরকলন যোগ্য** (differentiable) বলা হয়। কোন অপেক্ষক কোন বিস্তারের প্রত্যেক বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য হইলে, অপেক্ষকটি ঐ বিস্তারে অন্তরকলন যোগ্য।

$y=f(x)$-এর x বিন্দুতে অন্তরকলজকে $\dfrac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন প্রক্রিয়ার প্রতীক $\dfrac{d}{dx}$; $\dfrac{dy}{dx}$ বলিতে $\dfrac{d}{dx}(y)$ বুঝায়।

$x=a$ বিন্দুতে $y=f(x)$-এর অন্তরকলজকে $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=a}$ বা, $f'(a)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\dfrac{dy}{dx}$ এবং $f'(x)$ ব্যতীত y_1, y'. Dy, $D(y)$ ইত্যাদি প্রতীক দ্বারাও y-এর অন্তরকলজকে প্রকাশ করা হইয়া থাকে।

উদা. 1. $y=x^2$ অপেক্ষকটির x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

এখানে, $\dfrac{dy}{dx}=\underset{h\to 0}{Lt}\ \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\ \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{2xh+h^2}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{h(2x+h}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\ (2x+h)=2x.$$

উদা. 2. সংজ্ঞানুসারে $y=x^3$-এর x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

$$\frac{dy}{dx}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(x^3)=3x^2.$$

উদা. 3. সংজ্ঞানুসারে $y=\sqrt{x}$-এর x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

এখানে; $\frac{dy}{dx}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

উদা. 4. সংজ্ঞানুসারে $y=\frac{1}{x^4}$-এর x এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

এখানে, $\frac{dy}{dx}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\frac{1}{(x+h)^4}-\frac{1}{x^4}}{h}$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{x^4-(x+h)^4}{h(x+h)^4x^4}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{x^4-x^4-4x^3h-6x^2h^2-4xh^3-h^4}{h(x+h)^4x^4}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{-h(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3)}{h(x+h)^4x^4}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}-\frac{4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3}{(x+h)^4x^4}$$

$$=-\frac{\underset{h\to 0}{Lt}(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3)}{\underset{h\to 0}{Lt}\{(x+h)^4x^4\}}$$

$$=-\frac{4x^3}{x^8}=-\frac{4}{x^5}$$

উদা. 5. সংজ্ঞানুসারে $y=x^5$-এর x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন কর।

এখানে, $\dfrac{dy}{dx}=\underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{(x+h)^5-x^5}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{(x+h)^5-x^5}{(x+h)-x}=\underset{y\to x}{Lt}\dfrac{y^5-x^5}{y-x}$

[মনে কর, $x+h=y$; $\therefore$ যখন $h\to 0$, তখন $y\to x$].

$$=5x^{5-1}=5x^4.$$

সাধারণ সূত্র : $\dfrac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$ [যেখানে n একটি ধ্রুবক।]

উদা. 6. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

(i) x^4 (ii) x^{101} (iii) $x^{3\cdot 5}$ (iv) $\dfrac{1}{x^3}$ (v) $\sqrt{x^3}$

(vi) $\sqrt[m]{x}$ (vii) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$ (viii) x^{-99} (ix) x^m (x) x^e.

সমাধান :

(i) $\dfrac{d}{dx}(x^4)=4x^{4-1}=4x^3$

(ii) $\dfrac{d}{dx}(x^{101})=101x^{101-1}=101x^{100}$

(iii) $\dfrac{d}{dx}(x^{3\cdot 5})=3\cdot 5x^{3\cdot 5-1}=3\cdot 5x^{2\cdot 5}$

(iv) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)=\dfrac{d}{dx}(x^{-3})=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}=-\dfrac{3}{x^4}$

(v) $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x^3})=\dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

(vi) $\dfrac{d}{dx}(\sqrt[m]{x})=\dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{m}}\right)=\dfrac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}=\dfrac{1}{m}x^{\frac{1-m}{m}}$

(vii) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(x^{-\frac{4}{3}}\right)=-\frac{4}{3}x^{-\frac{4}{3}-1}=-\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}=-\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^7}}$.

(viii) $\dfrac{d}{dx}(x^{-99})=-99x^{-99-1}=-99x^{-100}=-\dfrac{99}{x^{100}}$

(ix) $\dfrac{d}{dx}(x^m)=mx^{m-1}$ (x) $\dfrac{d}{dx}(x^e)=e.x^{e-1}$.

উদা. 7. যদি $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ হয়, তবে সংজ্ঞানুসারে $f'(0)$ নির্ণয় কর।

$$f'(0)=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\frac{1-h^2}{1+h^2}-1}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{1}{h}\cdot\frac{-2h^2}{1+h^2}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{-2h}{1+h^2}=0.$$

উদা. 8. $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ হইলে সংজ্ঞানুসারে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

$$\frac{dy}{dx}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\sqrt{\frac{1+x+h}{1-x-h}}-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\sqrt{1-x}.\sqrt{1+x+h}-\sqrt{1+x}.\sqrt{1-x-h}}{h\sqrt{1-x-h}.\sqrt{1-x}}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{(\sqrt{1-x}\sqrt{1+x+h}-\sqrt{1+x}\sqrt{1-x-h})(\sqrt{1-x}\sqrt{1+x+h}+\sqrt{1+x}\sqrt{1-x-h})}{h\sqrt{1-x-h}\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}\sqrt{1+x+h}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x-h}}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{(1-x)(1+x+h)-(1+x)(1-x-h)}{h\sqrt{1-x-h}\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}\sqrt{1+x+h}+\sqrt{1+x}\sqrt{1-x-h})}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{(1-x^2)-(1-x^2+h(1-x+1+x)}{h\sqrt{1-x-h}\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}\sqrt{1+x+h}+\sqrt{1+x}\sqrt{1-x-h})}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{2h}{h\sqrt{1-x-h}\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}\sqrt{1+x+h}+\sqrt{1+x}\sqrt{1-x-h})}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{2}{\sqrt{1-x-h}\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}\sqrt{1+x+h}+\sqrt{1+x}\sqrt{1-x-h})}$$

$$=\frac{2}{(1-x)\,2\,.\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

উদা. 9. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ হইলে, সংজ্ঞানুসারে $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=0}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h-1}{h+1}+1}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{2h}{h(h+1)}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{2}{h+1}=2.$$

উদা. 10. $y=\sqrt{ax^2+b}$ হইলে সংজ্ঞানুসারে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a(x+h)^2+b}-\sqrt{ax^2+b}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{a(x+h)^2+b}+\sqrt{ax^2+b})(\sqrt{a(x+h)^2+b}-\sqrt{ax^2+b})}{h(\sqrt{a(x+h)^2+b}+\sqrt{ax^2+b})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h)^2+b-(ax^2+b)}{h(\sqrt{a(x+h)^2+b}+\sqrt{ax^2+b})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2ax+ah)}{h(\sqrt{a(x+h)^2+b}+\sqrt{ax^2+b})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2ax+ah}{\sqrt{a(x+h)^2+b}+\sqrt{ax^2+b}}$$

$$= \frac{\lim_{h \to 0}(2ax+ah)}{\lim_{h \to 0}(\sqrt{a(x+h)^2+b}+\sqrt{ax^2+b})}$$

$$= \frac{2ax}{2\sqrt{ax^2+b}} = \frac{ax}{\sqrt{ax^2+b}}.$$

উদা. 11. $S=2t^2+4t$ হইলে $\frac{ds}{dt}$-র মান নির্ণয় কর।

$$\frac{ds}{dt} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{2(t+h)^2+4(t+h)-2t^2-4t}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{4th+4h^2+4h}{h} = \underset{h \to 0}{Lt}(4t+4h+4) = 4t+4.$$

উদা. 12. (i) $y=\sin x$ এবং (ii) $y=\tan x$-কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন কর।

(i) $$\frac{dy}{dx} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \left\{ \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos(x+\tfrac{h}{2}) \right\} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \underset{h \to 0}{Lt} \cos(x+\tfrac{h}{2})$$

$$= 1 \,.\, \cos x = \cos x.$$

(ii) $$\frac{dy}{dx} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\tan(x+h)-\tan x}{h} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\sin(x+h)\cos x-\cos(x+h)\sin h}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\sin h}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\frac{\sin h}{h}\cdot \underset{h\to 0}{Lt}\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$=1 . \frac{1}{\cos x . \cos x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

উদা. 13. $y=\cos^2 x$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

$$\frac{dy}{dx}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\cos^2(x+h)-\cos^2 x}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\{\cos(x+h)+\cos x\}\{\cos(x+h)-\cos x\}}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\cdot\underset{h\to 0}{Lt}\{\cos(x+h)+\cos x\}$$

$$=\left\{\underset{h\to 0}{Lt}\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}\right\}.2\cos x$$

$$=-2\cos x . \underset{h\to 0}{Lt}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.\underset{h\to 0}{Lt}\sin(x+\tfrac{h}{2})$$

$$=-2\cos x . 1 . \sin x=-2\sin x\cos x=-\sin 2x.$$

উদা. 14. $y=\sec^3 x$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

$$\frac{dy}{dx}=\underset{\to 0}{Lt}\frac{\sec^3(x+h)-\sec^3 x}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\sec(x+h)-\sec x}{h}.\underset{h\to 0}{Lt}\{\sec^2(x+h)+\sec(x+h)\sec x+\sec^2 x\}$$

$$=3\sec^2 x.\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\frac{1}{\cos(x+h)}-\frac{1}{\cos x}}{h}$$

$$=3\sec^2 x.\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\cos x-\cos(x+h)}{h\cos x\cos(x+h)}$$

$$=3\sec^2 x.\underset{h\to 0}{Lt}\frac{2\sin(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h\cos x\cos(x+h)}$$

$$=3\sec^2 x.\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\sin(x+\frac{h}{2})}{\cos x\cos(x+h)}\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$=3\sec^2 x\frac{\sin x}{\cos x . \cos x}.1=3\sec^2 x . \sec x\tan x=3\sec^3 x\tan x.$$

উদা. 15. $y=\sin 2x$ হইলে, $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

$$\frac{dy}{dx}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\sin 2(x+h)-\sin 2x}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{2\cos(2x+h)\sin h}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\left\{\frac{\sin h}{h}.\ 2\cos(2x+h)\right\}$$

$$=2\underset{h\to 0}{Lt}\ \cos(2x+h)\ .\ \underset{h\to 0}{Lt}\frac{\sin h}{h}$$

$$=2\ .\ \cos 2x\ .\ 1=2\cos 2x.$$

ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের অন্তরকলজ সমূহের সূত্রাবলী।

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x\ ;\ \frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x.$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x\ ;\ \frac{d}{dx}(\cot x)=-\operatorname{cosec}^2 x.$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x\ ;\ \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x)=-\operatorname{cosec} x\cot x.$$

উদা. 16. $y=a^x$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

$$\frac{dy}{dx}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{a^x(a^h-1)}{h}$$

$$=a^x\underset{h\to 0}{Lt}\frac{a^h-1}{h}=a^x\underset{h\to 0}{Lt}\frac{e^{h\log a}-1}{h\log_e a}.\log_e a$$

$$=a^x\log_e a\underset{h'\to 0}{Lt}\frac{e^{h'}-1}{h'}$$ [$h'=h\log a$ মনে করিয়া]

$$=a^x\log_e a\ .\ 1=a^x\log_e a.$$

উদা. 17. $y=2^x$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

$$\frac{dy}{dx}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{2^{x+h}-2^x}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{2^x(2^h-1)}{h}=2^x.\underset{h\to 0}{Lt}\frac{2^h-1}{h}$$

$$=2^x\underset{h\to 0}{Lt}\left\{\frac{e^{h\log 2}-1}{h\log 2}\ .\ \log_e 2\right\}$$

$$=2^x\log_e 2\quad\underset{h'\to 0}{Lt}\frac{e^{h'}-1}{h'}=2^x\log_e 2\ .\ 1=2^x\log_e 2.$$

উদা. 18. $y=3^{x^2}$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

$$\frac{dy}{dx}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{3^{(x+h)^2}-3^{x^2}}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{3^{x^2}\cdot 3^{2xh+h^2}-3^{x^2}}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{3^{x^2}(3^{2xh+h^2}-1)}{h}=3^{x^2}\cdot\underset{h\to 0}{Lt}\frac{e^{(2xh+h^2)\log 3}-1}{h}$$

$$=3^{x^2}\cdot\underset{h\to 0}{Lt}\left\{\frac{e^{(2xh+h^2)\log 3}-1}{h(2x+h)\log 3}\cdot(2x+h)\log 3\right\}$$

$$=3^{x^2}\cdot\underset{h'\to 0}{Lt}\frac{e^{h'}-1}{h'}\underset{h\to 0}{Lt}(2x+h)\log 3 \qquad [h'=2xh+h^2]$$

$$=3^{x^2}\cdot 1\cdot 2x\log 3=3^{x^2}\cdot 2x\log e^3.$$

উদা. 19. $y=e^x$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

$$\frac{dy}{dx}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=e^x\underset{h\to 0}{Lt}\frac{e^h-1}{h}$$
$$=e^x\cdot 1=e^x.$$

উদা. 20. $y=e^{x^2}$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

$$\frac{dy}{dx}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{e^{(x+h)^2}-e^{x^2}}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{e^{x^2}\cdot e^{2xh+h^2}-e^{x^2}}{h}$$

$$=e^{x^2}\underset{h\to 0}{Lt}\frac{e^{2xh+h^2}-1}{h}=e^{x^2}\cdot\underset{h\to 0}{Lt}\left\{\frac{e^{2xh+h^2}-1}{h(2x+h)}(2x+h)\right\}$$

$$=e^{x^2}\cdot\underset{h'\to 0}{Lt}\frac{e^{h'}-1}{h'}\underset{h\to 0}{Lt}(2x+h) \qquad [h'=2xh+h^2]$$

$$=e^{x^2}\cdot 1\cdot 2x=2xe^{x^2}.$$

উদা. 21. দেখাও যে $\frac{d}{dx}(c)=0$ [যেখানে c একটি ধ্রুবক];

$$\frac{d}{dx}(c)=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{c-c}{h}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{0}{h}=0$$

2. অন্তরকলনের সাধারণ সূত্রাবলী :

$f(x)$ ও $g(x)$, x-এর দুইটি অপেক্ষক এবং c যে কোন ধ্রুবক হইলে,

(i) $\frac{d}{dx}\{c\, f(x)\}=c.\frac{d}{dx}\{f x)\}$

(ii) $\frac{d}{dx}\{f(x)\pm g(x)\}=\frac{d}{dx}\{f(x)\}\pm\frac{d}{dx}\{g(x)\}$

(iii) $\frac{d}{dx}\{f(x)\, g(x)\}=\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}g(x)+f(x)\left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}$

(iv) $\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{\{g(x)\}^2}$

উদা. 22. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন কর :

(i) $3x^2+5$, (ii) ax^2+bx+c, (a, b, c ধ্রুবক).

(iii) $x\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}-\tan x$. (iv) $(x+2)(x+3)$

(v) $x^{2m}-mx^3+7n$. (vi) $\frac{1+x}{\sqrt{x}}$ (vii) $\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}$.

(viii) $\sin x-2\cos x+3\tan x-4\cot x+5\sec x-6\,\mathrm{cosec}\, x+e^x$.

(ix) $(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2$ (x) $(x-\frac{1}{x})^3$.

সমাধান :

(i) $\frac{d}{dx}(3x^2+5)=\frac{d}{dx}(3x^2)+\frac{d}{dx}(5)=3.\frac{d}{dx}(x^2)+0.$

$=3.2x=6x.$

(ii) $\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)=\frac{d}{dx}(ax^2)+\frac{d}{dx}(bx)+\frac{d}{dx}(c)$

$=a.\frac{d}{dx}(x^2)+b.\frac{d}{dx}(x)+0=a.2x+b.1+0=2ax+b.$

(iii) $\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}-\tan x\right)$

$=\frac{d}{dx}(x\sqrt{x})+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)-\frac{d}{dx}(\tan x)$

$$=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)-\sec^2 x$$

$$=\frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\,x^{-\frac{5}{2}}-\sec^2 x=\frac{3}{2}\,\sqrt{x}-\frac{3}{2\,\sqrt{x^5}}-\sec^2 x.$$

(iv) $\frac{d}{dx}\,\{(x+2)(x+3)\}=\frac{d}{dx}(x^2+5x+6)$

$$=\frac{d}{dx}\,(x^2)+\frac{d}{dx}\,(5x)+\frac{d}{dx}\,(6)=2x+5\frac{d}{dx}\,(x)+0$$

$$=2x+5.1=2x+5.$$

(v) $\frac{d}{dx}(x^{2m}-mx^3+7n)=\frac{d}{dx}(x^{2m})-\frac{d}{dx}(mx^3)+\frac{d}{dx}(7n)$

$$=2mx^{2m-1}-m\frac{d}{dx}(x^3)+0=2mx^{2m-1}-m.3x^2$$

$$=2mx^{2m-1}-3mx^2.$$

(vi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{\sqrt{x}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)$

$$=\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)+\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2\,\sqrt{x^3}}+\frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

(vii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)$

$$=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)-\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\tfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{3}{2}\,\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

(viii) $\frac{d}{dx}(\sin x-2\cos x+3\tan x-4\cot x+5\sec x-6\operatorname{cosec} x+e^x)$

$$=\frac{d}{dx}(\sin x)-\frac{d}{dx}\,(2\cos x)+\frac{d}{dx}\,(3\tan x)$$

$$-\frac{d}{dx}(4\cot x)+\frac{d}{dx}(5\sec x)-\frac{d}{dx}(6\operatorname{cosec} x)+\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$=\cos x-2\frac{d}{dx}(\cos x)+3\frac{d}{dx}(\tan x)-4\frac{d}{dx}(\cot x)$$
$$+5\frac{d}{dx}(\sec x)-6\frac{d}{dx}(\text{cosec } x)+\frac{d}{dx}(e^x)$$
$$=\cos x-2(-\sin x)+3\sec^2 x-4(-\text{cosec}^2 x)$$
$$+5\sec x\tan x-6(-\text{cosec } x\cot x)+e^x.$$
$$=\cos x+2\sin x+3\sec^2 x+4\,\text{cosec}^2 x$$
$$+5\sec x\tan x+6\,\text{cosec } x\cot x+e^x.$$

(ix) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)^2=\frac{d}{dx}(x+a+2\sqrt{a}\sqrt{x})$

$$=\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(a)+\frac{d}{dx}(2\sqrt{a}\sqrt{x})=1+0+2\sqrt{a}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$
$$=1+2\sqrt{a}\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)=1+2\sqrt{a}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=1+\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

(x) $\frac{d}{dx}\left(x-\frac{1}{x}\right)^3=\frac{d}{dx}\left(x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\right)$

$$=\frac{d}{dx}\left(x^3\right)-\frac{d}{dx}\left(3x\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$
$$=3x^2-3\frac{d}{dx}\left(x\right)+3\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)-\frac{d}{dx}\left(x^{-3}\right)$$
$$=3x^2-3.1+3(-x^{-2})-(-3x^{-4})$$
$$=3x^2-3-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^4}.$$

উদা. 23. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

(i) $x^2\cos x$ (ii) $(\sqrt{x}+1)^2 e^x$ (iii) $(2x-1)(3+2x^2)$

(iv) $(x^2+x-1)(x^2-x+1)$ (v) $\sec x\tan x$.

(vi) $x^n\tan x$. (vii) $x^2e^x\sin x$ (viii) $\sin^2 x$

(ix) $(x^2+2x\sin x+5)(x^2-3x+e^x)$.

(x) $\frac{\sin x}{x}$ (xi) $\frac{x}{\cos x}$ (xii) $\frac{x^3}{\cot x}$

(xiii) $x^2a^x\tan x$ (xiv) $x^2\tan x-2^x\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}$

সমাধান :

(i) $\frac{d}{dx}\left(x^2 \cos x\right)=\cos x.\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+x^2.\frac{d}{dx}\left(\cos x\right)$

$=\cos x.2x+x^2(-\sin x)=2x \cos x-x^2 \sin x$

(ii) $\frac{d}{dx}\left\{\left(\sqrt{x}+1\right)^2 e^x\right\}=\left\{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+1\right)^2\right\}e^x+\left(\sqrt{x}+1\right)^2\frac{d}{dx}\left(e^x\right)$

$=\left\{\frac{d}{dx}\left(x+2\sqrt{x}+1\right)\right\}e^x+\left(\sqrt{x}+1\right)^2 e^x$

$=(1+2.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})e^x+(\sqrt{x}+1)^2 e^x$

$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)e^x+\left(\sqrt{x}+1\right)^2 e^x$

$=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}e^x+\left(\sqrt{x}+1\right)^2 e^x=\left(\sqrt{x}+1\right)e^x\left(\sqrt{x}+1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

(iii) $\frac{d}{dx}\left\{\left(2x-1\right)\left(3+2x^2\right)\right\}$

$=\left\{\frac{d}{dx}\left(2x-1\right)\right\}\left(3+2x^2\right)+\left(2x-1\right)\frac{d}{dx}\left(3+2x^2\right)$

$=2(3+2x^2)+(2x-1)4x=6+4x^2+8x^2-4x=12x^2-4x+6.$

(iv) $\frac{d}{dx}\left\{(x^2+x-1)(x^2-x+1)\right\}$

$=\left\{\frac{d}{dx}(x^2+x-1)\right\}(x^2-x+1)+(x^2+x-1)\frac{d}{dx}(x^2-x+1)$

$=(2x+1)(x^2-x+1)+(x^2+x-1)(2x-1)$

$=2x^3+x^2-2x^2-x+2x+1+2x^3+2x^2-2x-x^2-x+1$

$=4x^3-2x+2$

(v) $\frac{d}{dx}(\sec x \tan x)=\left\{\frac{d}{dx}(\sec x)\right\}\tan x+\sec x\frac{d}{dx}(\tan x)$

$=\sec x \tan x . \tan x+\sec x \sec^2 x$

$=\sec x \tan^2 x+\sec^3 x.$

(vi) $\frac{d}{dx}(x^n \tan x)=\left\{\frac{d}{dx}(x^n)\right\}\tan x+x^n\frac{d}{dx}(\tan x)$

$=nx^{n-1} \tan x+x^n \sec^2 x.$

(vii) $\frac{d}{dx}(x^2e^x \sin x)=\left\{\frac{d}{dx}(x^2)\right\}e^x \sin x+x^2\frac{d}{dx}(e^x \sin x)$

$=2x\, e^x \sin x+x^2\left[\left\{\frac{d}{dx}(e^x)\right\} \sin x+x^2\frac{d}{dx}(\sin x)\right]$

$=2x\, e^x \sin x+x^2\, e^x \sin x+x^2\, e\quad \cos x$

$=x\, e^x(2 \sin x+x \sin x+x \cos x)$

(viii) $\frac{d}{dx}(\sin^2 x)=\frac{d}{dx}(\sin x. \sin x)$

$=\left\{\frac{d}{dx}(\sin x)\right\} \sin x+\sin x\frac{d}{dx}(\sin x)$

$=\cos x.\sin x+\sin x.\cos x=2 \sin x \cos x=\sin 2x.$

(ix) $\frac{d}{dx}\left\{x^2+2x \sin x+5)(x^2-3x+e^x)\right\}$

$=\left\{\frac{d}{dx}(x^2+2x \sin x+5)\right\}(x^2-3x+e^x)$

$+(x^2+2x \sin x+5)\frac{d}{dx}(x^2-3x+e^x)$

$=\left[2x+\left\{\frac{d}{dx}(2x)\right\} \sin x+2x\frac{d}{dx}(\sin x)+0\right](x^2-3x+e^x)$

$+(x^2+2x \sin x+5)(2x-3+e^x)$

$=(2x+2 \sin x+2x \cos x)(x^2-3x+e^x)+(x^2+2x \sin x+5)$

$\times(2x-3+e^x)$

(x) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\left\{\frac{d}{dx}(\sin x)\right\}\frac{1}{x}+\sin x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$

$=\cos x.\frac{1}{x}+\sin x\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}=\frac{x \cos x-\sin x}{x^2}$

(xi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\cos x}\right)=\frac{d}{dx}(x \sec x)=\left\{\frac{d}{dx}(x)\right\}\sec x+x\frac{d}{dx}(\sec x)$

$=1 . \sec x+x . \sec x \tan x=\sec x\,(1+x \tan x).$

(xii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{\cot x}\right)=\frac{d}{dx}(x^3 \tan x)$

$=\left\{\frac{d}{dx}(x^3)\right\}\tan x+x^3\frac{d}{dx}(\tan x)$

$=3x^2 \tan x+x^3 \sec^2 x.$

(xiii) $\frac{d}{dx}(x^2a^x \tan x)=\left\{\frac{d}{dx}(x^2)\right\} a^x \tan x+x^2 \frac{d}{dx}(a^x \tan x)$

$=2xa^x \tan x+x^2\left[\left\{\frac{d}{dx}(a^x)\right\} \tan x+a^x\frac{d}{dx}(\tan x)\right]$

$=2xa^x \tan x+x^2a^x \log_e a \tan x+x^2a^x \sec^2 x$

$=xa^x (2 \tan x+x \log_e a \tan x+x \sec^2 x)$

(xiv) $\frac{d}{dx}\left(x^2 \tan x - 2^x \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}\right)$

$=\frac{d}{dx}(x^2 \tan x)-\frac{d}{dx}\left(2^x \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}\right)$

$=\left\{\frac{d}{dx}(x^2)\right\} \tan x+x^2 \frac{d}{dx}(\tan x)-\left\{\frac{d}{dx}(2^x)\right\}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}$

$-2^x\frac{d}{dx}(x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})$

$=2x \tan x+x^2 \sec^2 x-2^x \log_e 2 \cdot\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}-2^x(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}})$

$=2x \tan x+x^2 \sec^2 x-2^x\left(\log_e 2 \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)$

উদা. 24. (i) $y=uv$ হইলে দেখাও যে, $\frac{y'}{y}=\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}$ এবং

(ii) $y=uvw$ হইলে দেখাও যে, $\frac{y'}{y}=\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w}$

[y এবং u, v, w, x-এর অপেক্ষক এবং ' ′ ' চিহ্ন দ্বারা অন্তরকলন বুঝান হয়]

(i) $y=uv$ $\therefore \frac{d}{dx}(y)=\frac{d}{dx}(uv)$ বা, $y'=u'v+uv'$

$\therefore \frac{y'}{y}=\frac{u'v+uv'}{uv}$ [$\because y=uv$]

$=\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}$

(ii) $y=uvw$ $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(uvw)$

বা, $y'=u'vw+uv'w+uvw'$

বা, $\frac{y'}{y}=\frac{u'vw+uv'w+uvw'}{uvw}=\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w}.$

উদা. 25. প্রমাণ কর যে $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right)=-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$ [v, x-এর অপেক্ষক]

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right)=\frac{v\cdot\frac{d}{dx}(1)-1\cdot\frac{d}{dx}(v)}{v^2}=\frac{v\cdot 0-1\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}=-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}.$$

উদা. 26. নিম্নলিখিত অপেক্ষক সমূহের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

(i) $\frac{\sin x}{x}$ (ii) $\frac{x+1}{x-1}$ (iii) $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}+2}$ (iv) $\frac{lx+m}{px+q}$

(l, m, p, q ধ্রুবক)

(v) $\frac{ax^2+2bx+c}{ax^2-2bx+c}$ (vi) $\frac{e^x+\sin x}{xe^x-1}$.

সমাধান:

(i) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{x\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$=\frac{x\cos x-\sin x\cdot 1}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

(ii) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{(x-1)\frac{d}{dx}(x+1)-(x+1)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)\cdot 1-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=-\frac{2}{(x-1)^2}$$

(iii) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}+2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x^{\frac{3}{2}}+2}\right)$$

$$=\frac{(x^{\frac{3}{2}}+2)\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}+1)-(x^{\frac{1}{2}}+1)\frac{d}{dx}(x^{\frac{3}{2}}+2)}{(x^{\frac{3}{2}}+2)^2}$$

$$=\frac{(x^{\frac{3}{2}}+2)(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})-(x^{\frac{1}{2}}+1)\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{(x^{\frac{3}{2}}+2)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}x+x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{(x^{\frac{3}{2}}+2)^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-x-\frac{3}{2}\sqrt{x}}{(\sqrt{x^3}+2)^2}.$$

(iv) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{lx+m}{px+q}\right)=\dfrac{(px+q)\frac{d}{dx}(lx+m)-(lx+m)\frac{d}{dx}(px+q)}{(px+q)^2}$

$$=\frac{(px+q)l-(lx+m)\cdot p}{(px+q)^2}=\frac{ql-pm}{(px+q)^2}.$$

(v) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{ax^2+2bx+c}{ax^2-2bx+c}\right)$

$$=\frac{(ax^2-2bx+c)\frac{d}{dx}(ax^2+2bx+c)-(ax^2+2bx+c)\frac{d}{dx}(ax^2-2bx+c)}{(ax^2-2bx+c)^2}$$

$$=\frac{(ax^2-2bx+c)(2ax+2b)-(ax^2+2bx+c)(2ax-2b)}{(ax^2-2bx+c)^2}$$

$$=\frac{2\{(ax^2-2bx+c)(ax+b)-(ax^2+2bx+c)(ax-b)\}}{(ax^2-2bx+c)^2}$$

$$=\frac{2\{a^2x^3-2abx^2+acx+abx^2-2b^2x+bc-a^2x^3-2abx^2-acx+abx^2+2b^2x+bc}{(ax^2-2bx+c)^2}$$

$$=\frac{2(2bc-2abx^2)}{(ax^2-2bx+c)^2}=\frac{4b(c-ax^2)}{(ax^2-2bx+c)^2}$$

(vi) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x+\sin x}{xe^x-1}\right)=\dfrac{(xe^x-1)\frac{d}{dx}(e^x+\sin x)-(e^x+\sin x)\frac{d}{dx}(xe^x-1)}{(xe^x-1)^2}$

$$=\frac{(xe^x-1)(e^x+\cos x)-(e^x+\sin x)(e^x+xe^x)}{(xe^x-1)^2}$$

উদা 27. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{v}\right)=-\dfrac{1}{v^2}\dfrac{dv}{dx}$ [উদা 25] সূত্র সাহায্যে নিম্নলিখিত অপেক্ষক সমূহের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

(i) $\dfrac{1}{x+1}$ (ii) $\dfrac{1}{ax+b}$ (iii) $\dfrac{1}{lx^2+m}$ (iv) $\dfrac{1}{(x-1)(x^2-1)}$

সমাধান ঃ

(i) এখানে $v=x+1$ $\quad\therefore\ \dfrac{dv}{dx}=1$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\frac{d}{dx}(x+1)=-\frac{1}{(x+1)^2}\cdot 1=-\frac{1}{(x+1)^2}$$

(ii) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)=-\dfrac{1}{(ax+b)^2}\dfrac{d}{dx}(ax+b)=-\dfrac{1}{(ax+b)^2}\cdot a$

$$=-\frac{a}{(ax+b)^2}.$$

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{lx^2+m}\right)=-\frac{1}{(lx^2+m)^2}\frac{d}{dx}(lx^2+m)$

$$=-\frac{1}{(lx^2+m)^2}\cdot 2lx=-\frac{2lx}{(lx^2+m)^2}$$

(iv) $\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{(x-1)(x^2-1)}\right\}=-\frac{1}{(x-1)^2(x^2-1)^2}\frac{d}{dx}\{(x-1)(x^2-1)\}$

$$=-\frac{1}{(x-1)^2(x^2-1)^2}\left\{(x^2-1)\frac{d}{dx}(x-1)+(x-1)\frac{d}{dx}(x^2-1)\right\}$$

$$=-\frac{1}{(x-1)^2(x^2-1)^2}\{(x^2-1)\cdot 1+(x-1)\cdot 2x\}$$

$$=-\frac{1}{(x-1)^2(x^2-1)^2}(x^2-1+2x^2-2x)=-\frac{3x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2-1)^2}$$

3. অপেক্ষকের অপেক্ষকের অন্তরকলন (Differentiation of function of a function).

$y=f(z)$ এবং $z=\phi(x)$ হইলে, $y=f\{\phi(x)\}$.

এইক্ষেত্রে y-কে x-এর অপেক্ষকের অপেক্ষক (function of a function of x) বলা হয়।

এইক্ষেত্রে, y-এর x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করিবার সূত্র হইল,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

অর্থাৎ x-এর সাপেক্ষ y-এর অন্তরকলজ

$=z$-এর সাপেক্ষে y-এর অন্তরকলজ এবং x-এর সাপেক্ষে z-এর অন্তরকলজের গুণফল।

যদি $y=f_1(x_1)$, $x_1=f_2(x_2)$,……$x_{n-1}=f_{n-1}(x_n)$ এবং $x_n=f_n(x)$ হয়,

তবে $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{dx_2}\cdots\cdots\frac{dx_{n-1}}{dx_n}\cdot\frac{dx_n}{dx}.$

উদা. 28. নিম্নলিখিত অপেক্ষক সমূহের অন্তরকলজ নির্ণয় কর :

(i) $(x^2+1)^{101}$ (ii) $\sin 2x$ (iii) $\sin^3 x$ (iv) $\tan^2 x$ (v) $e^{\sqrt{x}}$

সমাধান :

(i) মনে কর $y=(x^2+1)^{101}$ এবং $x^2+1=z$

$\therefore\ y=z^{101}=f(z)$ এবং $z=x^2+1=\phi(x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dz}\left(z^{101}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)=101z^{100}.2x$$

$$=101(x^2+1)^{100}.2x=202x(x^2+1)^{100}.$$

(ii) মনে কর $y=\sin 2x$ এবং $2x=z$

$\therefore \quad y=\sin z=f(z)$ এবং $z=2x=\phi(x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dz}(\sin z)\frac{d}{dx}(2x)=\cos z\ .\ 2=2\cos 2x.$$

(iii) মনে কর $y=\sin^3 x$ এবং $\sin x=z.$

$\therefore \quad y=z^3=f(z)$ এবং $z=\sin x=\phi(x).$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dz}\left(z^3\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\sin x\right)=3z^2\cos x$$

$$=3(\sin x)^2\cos x=3\sin^2 x\cos x.$$

(iv) মনে কর $y=\tan^2 x$ এবং $\tan x=z$

$\therefore \quad y=z^2=f(z)$ এবং $z=\tan x=\phi(x)$

এক্ষণে, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{d}{dz}\left(z^2\right)\cdot\dfrac{d}{dx}\left(\tan x\right)$

$$=2z.\sec^2 x=2\tan x.\sec^2 x.$$

(v) মনে কর $y=e^{\sqrt{x}}$ এবং $\sqrt{x}=z.$

$\therefore \quad y=e^z=f(z)$ এবং $z=\sqrt{x}=\phi(x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dz}\left(e^z\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=e^z\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

উদা. 29. নিম্নলিখিত অপেক্ষক সমূহের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

(i) $\sqrt{(ax^2-bx+c)}$ (ii) $\sec^2 mx$ (iii) $\sqrt{\cos 2x}$

(iv) $\sqrt[7]{\cos(e^x)}$ (v) $\tan\left\{e^{\sin^2 3x}\right\}$

সমাধান :

(i) মনে কর $y=\sqrt{(ax^2-bx+c)}$ এবং $ax^2-bx+c=z$

$\therefore \quad y=\sqrt{z}=f(z)$ এবং $z=\phi(x)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dz}\left(\sqrt{z}\right)\frac{d}{dx}\left(ax^2-bx+c\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{z}}\left(2ax-b\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{ax^2-bx+c}}\cdot\left(2ax-b\right)$$

$$=\frac{2ax-b}{2\sqrt{ax^2-bx+c}}.$$

(ii) মনে কর $y=\sec^2 mx$; $\sec mx=z$ এবং $mx=\omega$.

$\therefore \quad y=z^2=f_1(z)$; $z=\sec mx=\sec\omega=f_2(\omega)$

এবং $\omega=mx=f_3(x)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{dx}=\frac{d}{dz}\left(z^2\right)\cdot\frac{d}{d\omega}\left(\sec\omega\right)\frac{d}{dx}\left(mx\right)$$

$=2z.\sec\omega\tan\omega.m=2mz\sec\omega\tan\omega$

$=2m\sec mx.\sec mx\tan mx=2m\sec^2 mx\tan mx.$

(iii) মনে কর $y=\sqrt{\cos 2x}$, $\cos 2x=z$ এবং $2x=\omega$.

$\therefore \quad y=\sqrt{z}=f_1(z)$, $z=\cos\omega=f_2(\omega)$ এবং $\omega=2x=f_3(x)$

এক্ষণে, $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{dx}=\frac{d}{dz}(\sqrt{z})\frac{d}{d\omega}(\cos\ \omega)\frac{d}{dx}(2x)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{z}}\cdot(-\sin\omega).2=-\frac{\sin\omega}{\sqrt{z}}=-\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

(iv) মনে কর $y=\sqrt{\cos e^x}$, $z=\cos e^x$ এবং $\omega=e^x$

$\therefore \quad y=\sqrt{z}=f_1(z)$, $z=\cos\omega=f_2(w)$ এবং $\omega=e^x=f_3(x)$

এক্ষণে, $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{dx}=\frac{d}{dz}(\sqrt{z})\frac{d}{d\omega}(\cos\ \omega)\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{z}}(-\sin\omega)\cdot e^x=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos e^x}}(\sin e^x)e^x$$

$$=-\frac{e^x\sin e^x}{\sqrt{\cos e^x}}$$

(v) মনে কর $y=\tan\left\{e^{\sin^2 3x}\right\}$, $z=e^{\sin^2 3x}$

$w=\sin^2 3x$, $v=\sin 3x$ এবং $u=3x$

$\therefore \quad y=\tan\left\{e^{\sin^2 3x}\right\}=\tan z=f_1(z)$;

$z=e^{\sin^2 3x}=e^w=f_2(w)$; $w=\sin^2 3x=v^2=f_3(v)$

$v=\sin 3x=\sin u=f_4(u)$ এবং $u=3x=f_5(x)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dw}\cdot\frac{dw}{dv}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{d}{dz}(\tan z)\,\frac{d}{dw}(e^w)\frac{d}{dv}(v^2)\frac{d}{du}(\sin u)\frac{d}{dx}(3x)$$

$$=\sec^2 z.e^w.2v.\cos u\;.\;3=6\sec^2 z.e^w.v\cos u$$

$$=6\sec^2\left\{e^{\sin^2 3x}\right\}.\,e^{\sin^2 3x}\sin 3x.\cos 3x$$

উদা. 30. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$

$$\frac{dy}{dx}=\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$$

$=\dfrac{1}{\underset{\Delta y\to 0}{Lt}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$ [$\because$ $\Delta x\to 0$ হইলে $\Delta y\to 0$ হইবে] $=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$.

উদা. 31. (i) $y=\log_e x$ হইলে দেখাও যে $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$

(ii) $y=\log f(x)$ হইলে দেখাও যে, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

এবং (iii) $y=\log(\sec x+\tan x)$ হইলে দেখাও যে, $\dfrac{dy}{dx}=\sec x$

সমাধান :

(i) $y=\log_e x \qquad \therefore \quad x=e^y$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}(e^y)=e^y$$

সুতরাং $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{e^y}=\dfrac{1}{x}$.

(ii) মনে কর $f(x)=z \quad \therefore \quad y=\log z.$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dz}(\log z)\cdot\frac{d}{dx}\{f(x)\}=\frac{1}{z}\cdot f'(x)$$

$$=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot$$

(iii) মনে কর $\sec x+\tan x=z.$

$\therefore \quad y=\log(\sec x+\tan x)=\log z$

এখানে, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{d}{dz}(\log z)\cdot\dfrac{d}{dx}(\sec x+\tan x)$

$$=\frac{1}{z}\cdot(\sec x\tan x+\sec^2 x)=\frac{1}{\sec x+\tan x}\cdot\sec x\,(\sec x+\tan x)$$

$=\sec x.$

উদা. 32. $y=\sqrt{x}$ অপেক্ষকের $x=9$ বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় কর; বিপরীত অপেক্ষক $x=y^2$-এর $y=3$ বিন্দুতে $\dfrac{dx}{dy}$-এর মান নির্ণয় কর এবং $\dfrac{dy}{dx}\times\dfrac{dx}{dy}=1$ সূত্রটির সত্যতা পরীক্ষা কর।

$$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \therefore \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{9}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}\left(y^2\right)=2y. \qquad \therefore \quad \left[\frac{dx}{dy}\right]_{y=3}=2y=2.3=6.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dy}=\frac{1}{6}\times 6=1.$$

সুতরাং সূত্রটির সত্যতা প্রমাণিত হইল।

উদা. 33. $f(x)$ একটি অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক এবং $y=\{f(x)\}^{10}$ হইলে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{dy}{dx}=10\{f(x)\}^9 f'(x)$

উপরোক্ত সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত অপেক্ষক সমূহের অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

(i) $(x^2+1)^{10}$ (ii) $\sin^{10}x$ (iii) $(\log x)^{10}$

মনে কর, $y=\{f(x)\}^{10}=z^{10} \qquad \therefore \quad z=f(x).$

এক্ষণে, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dz}\left(z^{10}\right)\frac{d}{dx}\left\{f(x)\right\}$

$=10z^9.f'(x)=10\{f(x)\}^9.f'(x).$

(i) এখানে $f(x)=x^2+1 \quad \therefore \quad f'(x)=2x$

এবং $\frac{dy}{dx}=10(x^2+1)^9.2x=20x(x^2+1)^9.$

(ii) এখানে $y=\sin^{10}x=(\sin x)^{10}=\{f(x)\}^{10}$

যেখানে $f(x)=\sin x \quad \therefore \quad f'(x)=\cos x.$

সুতরাং $\frac{dy}{dx}=10\{f(x)\}^9f'(x)=10\sin^9x\cos x.$

(iii) এখানে $y=(\log x)^{10}=\{f(x)\}^{10}$, যেখানে $f(x)=\log x$

$\therefore \quad f'(x)=\frac{1}{x}.$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=10\{f(x)\}^9 f'(x)=10(\log x)^9.\frac{1}{x}.$

উদা. 34. নিম্নলিখিত অপেক্ষক সমূহের অন্তরকলজ নির্ণয় কর :

(i) $\sin^{-1}x$ (ii) $\cos^{-1}x$ (iii) $\tan^{-1}x$ (iv) $\sec^{-1}x$

সমাধান :

(i) মনে কর, $y=\sin^{-1}x. \quad \therefore \quad x=\sin y$

$\therefore \quad \frac{dx}{dy}=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$ [এখানে $|x|<1$]

(ii) মনে কর, $y=\cos^{-1}x. \quad \therefore \quad x=\cos y$

$\therefore \quad \frac{dx}{dy}=-\sin y=-\sqrt{1-\sin^2 y}=-\sqrt{1-x^2}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

(iii) মনে কর, $y=\tan^{-1}x\,; \quad \therefore \quad x=\tan y.$

$\therefore \quad \frac{dx}{dy}=\sec^2 y=1+\tan^2 y=1+x^2$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{1+x^2}.$$

(iv) মনে কর, $y=\sec^{-1}x \qquad \therefore \quad x=\sec y.$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy}=\sec y \tan y=\sec y \sqrt{\sec^2 y-1}=x\sqrt{x^2-1}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

উদা. 35. (i) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$ ধরিয়া প্রমাণ কর যে,

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=-\frac{1}{1+x^2}.$$

(ii) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ ধরিয়া প্রমাণ কর যে,

$$\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x)=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

(i) যেহেতু $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}, \qquad \therefore \quad \cot^{-1}x==\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x$

বা, $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=\frac{d}{dx}(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x)=-\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=-\frac{1}{1+x^2}.$

(ii) যেহেতু $\sec^{-1}x+\text{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2}$,

$\therefore \quad \text{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sec^{-1}x$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x)=\frac{d}{dx}(\frac{\pi}{2}-\sec^{-1}x)$$

$$=-\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

উদা. 36. নিম্নলিখিত অপেক্ষক সমূহের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর :

(i) $\sec(\tan^{-1}x)$ [C. P. 1940]

(ii) $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$ [C. P. 1943] (iii) $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ [C. P. 1938]

(i) মনে কর, $y=\sec(\tan^{-1}x)$ এবং $z=\tan^{-1}x=\phi(x)$.

$\therefore \quad y=\sec z=f(z)=f\{\phi(x)\}.$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\sec z \tan z \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$=\sec(\tan^{-1}x)\tan(\tan^{-1}x)\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

এক্ষণে, মনে কর, $\tan^{-1}x=\theta \qquad \therefore \tan\theta=x.$

এক্ষণে, $\sec(\tan^{-1}x)=\sec\theta=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{1+x^2}$

এবং $\tan(\tan^{-1}x)=x.$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{1+x^2}\cdot x\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(ii) মনে কর, $y=\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$; $z=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$; $\quad u=x^2-1$

$$\therefore \quad y=\tan^{-1}z, \quad z=\frac{1}{\sqrt{u}}.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{dz}(\tan^{-1}z)\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)\frac{d}{dx}(x^2-1)$$

$$=\frac{1}{1+z^2}\left(-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}\right)(2x)=\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2-1}}\left\{-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\right\}(2x)$$

$$=-\frac{1}{\dfrac{x^2-1+1}{x^2-1}}\cdot\frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$=-\frac{x(x^2-1)}{x^2\sqrt{x^2-1}\,(x^2-1)}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

(iii) মনে কর, $y=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ এবং $z=\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$

$$\therefore \quad y=\tan^{-1}z$$

এক্ষণে, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{d}{dz}(\tan^{-1}z)\,\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}\right)$

এক্ষণে, $\dfrac{d}{dz}(\tan^{-1}z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ এবং

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}\right)=\frac{\sqrt{(1-x^2)}\,\frac{d}{dx}(x)-x\frac{d}{dx}\{\sqrt{(1-x^2)}\}}{1-x^2}$$

$$=\frac{\sqrt{(1-x^2)}\,.\,1-x\,.\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\,\frac{d}{dx}(1-x^2)}{1-x^2}$$

$$=\frac{\sqrt{(1-x^2)}-x\,.\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}(-2x)}{1-x^2}$$

$$=\frac{\sqrt{(1-x^2)}+\frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)}}}{1-x^2}=\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+z^2}.\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}}.\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1-x^2}{1-x^2+x^2}.\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=(1-x^2)\,\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ইম্‌প্লিসিট্ (Implicit) বা অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অন্তরকলন :

উদা. 37. a, b, c, f, g, h ধ্রুবক এবং $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+$ $=0$ হইলে, $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ উভয়পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\frac{d}{dx}(ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c)=0$$

বা, $\frac{d}{dx}(ax^2)+\frac{d}{dx}(2hxy)+\frac{d}{dx}(by^2)+\frac{d}{dx}(2gx)+\frac{d}{dx}(2fy)$
$+\frac{d}{dx}(c)=0$

বা, $2ax+2h\left\{y\frac{d}{dx}(x)+x\frac{d}{dx}(y)\right\}+2by\frac{dy}{dx}+2g+2f\frac{dy}{dx}+0=0$

বা, $2ax+2h\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)+2by\frac{dy}{dx}+2g=0$

বা, $\frac{dy}{dx}\left(hx+by+f\right)=-(ax+hy+g)$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{ax+hy+g}{hx+by+f}.$$

উদা. 38. নিম্নলিখিত সম্পর্কগুলি হইতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :—

(i) $x^4y^5=(x+9)^9$ (ii) $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}=1.$

(iii) $x+y=\sin(xy)$ (iv) $\log xy=x+y$ (v) $e^{x+y}=xy.$

সমাধান :

(i) $x^4y^5=(x+y)^9$

বা, $\frac{d}{dx}(x^4y^5)=\frac{d}{dx}(x+y)^9$

বা, $y^5\frac{d}{dx}(x^4)+x^4\frac{d}{dx}(y^5)=9(x+y)^8\frac{d}{dx}(x+y)$

বা, $y^5 \cdot 4x^3+x^4 \cdot 5y^4\frac{dy}{dx}=9(x+y)^8\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$

বা, $4x^3y^5+5x^4y^4\frac{dy}{dx}=9(x+y)^8+9(x+y)^8\frac{dy}{dx}$

বা, $\frac{dy}{dx}\{5x^4y^4-9(x+y)^8\}=9(x+y)^8-4x^3y^5$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{9(x+y)^8-4x^3y^5}{5x^4y^4-9(x+y)^8}=\frac{9(x+y)^9-4x^3y^5(x+y)}{5x^4y^4(x+y)-9(x+y)^9}$$

$$=\frac{9x^4y^5-4x^3y^5(x+y)}{5x^4y^4(x+y)-9x^4y^5}=\frac{x^3y^4\{9xy-4y(x+y)\}}{x^3y^4\{5x(x+y)-9xy\}}$$

$$=\frac{5xy-4y^2}{5x^2-4xy}=\frac{y(5x-4y)}{x(5x-4y)}=\frac{y}{x}.$$

(ii) $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}=1$

বা, $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}\right)=\frac{d}{dx}(1)=0$

বা, $\frac{1}{a^n}\frac{d}{dx}(x^n)+\frac{1}{b^n}\frac{d}{dx}(y^n)=0$

বা, $\frac{1}{a^n}\cdot nx^{n-1}+\frac{1}{b^n}ny^{n-1}\frac{dy}{dx}=0$

বা, $\frac{x^{n-1}}{a^n}=-\frac{y^{n-1}}{b^n}\frac{dy}{dx}$ বা, $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^n}{a^n}\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}.$

(iii) $x+y=\sin xy$

বা, $\frac{d}{dx}(x+y)=\frac{d}{dx}(\sin xy)$

বা, $1+\frac{dy}{dx}=\cos(xy)\frac{d}{dx}(xy)=\cos(xy)\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)$

বা, $\frac{dy}{dx}\{1-x\cos(xy)\}=y\cos(xy)-1$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{y\cos(xy)-1}{1-x\cos(xy)}.$

(iv) $\log(xy)=x+y$

বা, $\frac{d}{dx}\left\{\log(xy)\right\}=\frac{d}{dx}(x+y)$ বা, $\frac{1}{xy}\frac{d}{dx}(xy)=1+\frac{dy}{dx}$

বা, $\frac{1}{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=1+\frac{dy}{dx}$ বা, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$

বা, $\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y}-1\right)=1-\frac{1}{x}$

বা, $\frac{dy}{dx}=\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}-1}=\frac{y}{x}\cdot\frac{x-1}{1-y}=\frac{y(x-1)}{x(1-y)}.$

(v) $e^{x+y}=xy$ বা, $\frac{d}{dx}\left(e^{x+y}\right)=\frac{d}{dx}(xy)$

বা, $e^{x+y}\frac{d}{dx}(x+y)=x\frac{dy}{dx}+y$ বা, $e^{x+y}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=x\frac{dy}{dx}+y$

বা, $xy\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=x\frac{dy}{dx}+y$ বা, $x\frac{dy}{dx}(y-1)=y(1-x)$

বা, $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\cdot\frac{1-x}{y-1}.$

লগারিদ্‌মিক্ অন্তরকলন্ (Logarithmic differentiation).

অনেক সময় $y=f(x)$-এর উভয়পক্ষের লগ্ লইয়া তৎপরে উভয় পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করা সুবিধা জনক হয়। নিম্নের উদাহরণগুলিতে পদ্ধতিটির প্রয়োগ দেখান হইল

উদা. 39. নিম্নলিখিত অপেক্ষক সমূহের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর ।

(i) x^x (ii) x^{x^x} (iii) $x^{\tan x}$ (iv) $(\cos x)^{\sin x}$

(v) $x^{\log x}$ (vi) $\sin x e^x x^x$.

এক্ষণে, $\frac{d}{dx}(\tan x)^{\cot x}$ নির্ণয়ের জন্য,

মনে কর, $u=(\tan x)^{\cot x}$ $\therefore \quad \log u=\log (\tan x)^{\cot x}$

বা, $\log u=\cot x \log (\tan x)$.

$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\log u)=\frac{d}{dx}\{(\cot x \log (\tan x)\}$

বা, $\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\cot x \cdot \frac{d}{dx}\{\log (\tan x)\}+\log (\tan x)\frac{d}{dx}(\cot x)$

$$=\cot x \cdot \frac{1}{\tan x}\sec^2 x+\log (\tan x)(-\operatorname{cosec}^2 x)$$

$$=\cot^2 x \cdot \sec^2 x-\operatorname{cosec}^2 x \log (\tan x)$$
$$=\operatorname{cosec}^2 x-\operatorname{cosec}^2 x \log (\tan x)$$

$\therefore \quad \frac{du}{dx}=u \operatorname{cosec}^2 x(1-\log \tan x)$

আবার $\frac{d}{dx}(\cot x)^{\tan x}$ নির্ণয়ের জন্য, মনে কর, $v=(\cot x)^{\tan x}$

$\therefore \quad \log v=\log (\cot x)^{\tan x}=\tan x \log (\cot x)$

উভয় পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\frac{d}{dx}(\log v)=\frac{d}{dx}\{\tan x \log (\cot x)\}$$

বা, $\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}=\tan x\frac{d}{dx}(\log \cot x)+\log \cot x\frac{d}{dx}(\tan x)$

$$=\tan x \cdot \frac{1}{\cot x} \cdot (-\operatorname{cosec}^2 x)+(\log \cot x)\sec^2 x$$

$$=-\tan^2 x \operatorname{cosec}^2 x+\sec^2 x \log (\cot x)$$

$\therefore \quad \frac{dv}{dx}=v\{-\sec^2 x+\sec^2 x \log (\cot x)\}=v \sec^2 x\{\log (\cot x)-1\}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\tan x)^{\cot x}+\frac{d}{dx}(\cot x)^{\tan x}$

$$=u \operatorname{cosec}^2 x (1-\log \tan x)+v \sec^2 x (\log \cot x-1)$$

$$=(\tan x)^{\cot x} \operatorname{cosec}^2 x (1-\log \tan x)$$
$$+(\cot x)^{\tan x} \sec^2 x (\log \cot x-1).$$

(iii) $y=x^{\cos^{-1}x}$ $\therefore$ $\log y=\log\left(x^{\cos^{-1}x}\right)$

বা, $\frac{d}{dx}(\log y)=\frac{d}{dx}\left\{\log\left(x^{\cos^{-1}x}\right)\right\}$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\{\cos^{-1}x\log x\}$

$$=\log x\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)+\cos^{-1}x\frac{d}{dx}(\log x)$$

$$=\log x\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)+\cos^{-1}x.\frac{1}{x}$$

$\therefore$ $\frac{dy}{dx}=y\left\{\frac{1}{x}\cos^{-1}x-\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\right\}=x^{\cos^{-1}x}\left\{\frac{1}{x}\cos^{-1}x-\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\right\}.$

(iv) $y=(\sin x)^{\log x}$; $\therefore$ $\log y=\log(\sin x)^{\log x}=\log x\log\sin x$

বা, $\frac{d}{dx}(\log y)=\frac{d}{dx}(\log x\log\sin x)$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\log x\frac{d}{dx}(\log\sin x)+\log\sin x\frac{d}{dx}(\log x)$

$$=\log x.\frac{1}{\sin x}.\cos x+\log\sin x.\frac{1}{x}.$$

$$=\cot x\log x+\frac{\log\sin x}{x}$$

$\therefore$ $\frac{dy}{dx}=y\left(\cot x\log x+\frac{\log\sin x}{x}\right)$

$$=(\sin x)^{\log x}\left(\cot x\log x+\frac{\log\sin x}{x}\right).$$

(v) $y=\tan(a+b^x)$.

$\therefore$ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\{\tan(a+b^x)\}=\sec^2(a+b^x)\frac{d}{dx}(a+b^x)$

$$=\sec^2(a+b^x)b^x\log_e b.$$

প্যারামেট্রিক সমীকরণ (Parametric Equations) :

উদা. 41. নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহ হইতে প্রত্যেক ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

(i) $x=\sin^2\theta$, $y=\tan\theta$. [C. P. 1943]

(ii) $x=a\sec^2\theta$, $y=a\tan^3\theta$. [C. P. 1942]

(iii) $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$ [C. P. 1941]

(iv) $\tan y=\dfrac{2t}{1-t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$. [C. P. 1944]

সমাধান :

(i) $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{d}{d\theta}(\sin^2\theta)=2\sin\theta\cos\theta.$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}(\tan\theta)=\sec^2\theta.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sec^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}=\tfrac{1}{2}\sec^3\theta\operatorname{cosec}\theta.$$

(ii) $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{d}{d\theta}(a\sec^2\theta)=2a\sec\theta.\sec\theta\tan\theta$

$$=2a\sec^2\theta\tan\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}(a\tan^3\theta)=3a\tan^2\theta\sec^2\theta.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3a\tan^2\theta\sec^2\theta}{2a\sec^2\theta\tan\theta}=\tfrac{3}{2}\tan\theta.$$

(iii) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{3at}{1+t^3}\right)=\dfrac{\left\{\frac{d}{dt}(3at)\right\}(1+t^3)-3at\frac{d}{dt}(1+t^3)}{(1+t^3)^2}$

$$=\frac{3a(1+t^3)-3at(3t^2)}{(1+t^3)^2}=\frac{3a+3at^3-9at^3}{(1+t^3)^2}=\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{3at^2}{1+t^3}\right)=\frac{(1+t^3)\frac{d}{dt}(3at^2)-3at^2\frac{d}{dt}(1+t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$=\frac{(1+t^3)(6at)-3at^2(3t^2)}{(1+t^3)^2}=\frac{6at+6at^4-9at^4}{(1+t^3)^2}=\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}}{\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

(iv) মনে কর, $t=\tan\theta$.

$\therefore \quad \tan y=\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\tan 2\theta$; $\therefore \; y=2\theta$ বা, $\frac{dy}{d\theta}=2$

আবার, $\sin x=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\sin 2\theta \quad \therefore \quad x=2\theta.$ বা, $\frac{dx}{d\theta}=2$

সুতরাং $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{2}{2}=1.$

প্রশ্নমালা III

সংজ্ঞানুসারে নিম্নলিখিত অপেক্ষকসমূহের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর :

1. x^2+5. 2. $\frac{1}{\sqrt{x}}$. 3. $\sin 2x$. 4. e^{3x}. 5. 4^x.

x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর :

6. x^{99}. 7. x^8. 8. $x^{1\cdot 9}$. 9. $\frac{1}{x^4}$. 10. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

11. যদি $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ হয়, তবে সংজ্ঞানুসারে $f'(x)$ নির্ণয় কর।

12. যদি $f(x)=\sin^3 x$ হয়, তবে সংজ্ঞানুসারে $f'(x)$ নির্ণয় কর।

x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর :

13. $\log_{10}x$ [C.P. 1941] 14. $\log\sin\left(\frac{x}{a}\right)$ [C.P. 1930]

15. $a\sin\left(\frac{x}{a}\right)$. [C.P. 1937]

16. সংজ্ঞানুসারে x^x-এর x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন কর।

[সংকেত : $x^x=e^{x\log x}$]

17. $f(x)=\frac{\cos x}{x^2}$; $f'(x)$ নির্ণয় কর।

x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর :

18. $x\sin x$. 19. $x\cos x$. 20. $x^2\sin x$. 21. $x^n\cot x$.

22. $x.\text{cosec}^2 x$.

23. $\cot x$কে $\cos x \operatorname{cosec} x$ আকারে প্রকাশ করিয়া দুইটি অপেক্ষকের গুণফলের সূত্রানুযায়ী প্রমাণ কর যে, $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$.

$\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর, যখন

24. $y=\frac{x^2}{\sin x}$. 25. $y=\frac{1}{x+2}$. 26. $y=\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$.

27. $y=\frac{1}{lx^2+m}$.

x-এর সাপেক্ষে নিম্নলিখিত অপেক্ষকসমূহের অন্তরকলন কর :

28. $(x^3+1)^{100}$. 29. $\cos 2x$. 30. $\sin^4 x$.

31. $\cot^2 x$. 32. $e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$. 33. $a \tan^2 x + b \cot^2 x$.

34. $\log \tan x$. 35. $\sin^{-1}\phi(x)$. 36. $\sin^{-1} x^3$.

37. $\tan^{-1}(\sqrt{x})$. 38. $\sec(\tan^{-1} x)$ [C. P. 1940]

39. $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$ [C. P. 1943]

40. $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$. [C. P. 1938]

41. $\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$. 42. $e^{\sqrt{\cot x}}$. [C. P. 1943]

43. $x^3 \cdot \sqrt{\frac{x^2+4}{x^2+3}}$. [C. P. 1941]

44. $\log \sec(ax+b)^3$. [C. P. 1941]

45. $\sqrt{(1+\log x \log \sin x)}$. [C. P. 1944]

নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

46. $3x^4 - x^2 y + 2y^3 = 0$. [C. P. 1941]

47. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. 48. $x^3 + y^3 = 3axy$.

49. $y = x^y$. [C. P. 1940]. 50. $x^y y^x = 1$. [C. P. 1943]

51. $\log(xy) = x^2 + y^2$. [C.P. 1943] 52. $y = x^y$. [C.P. 1940]

53. $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$.

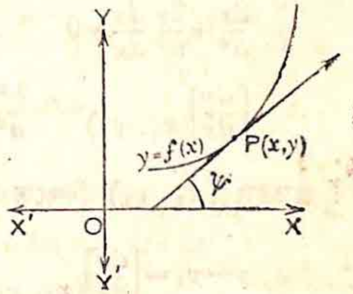
54. $x = am^2,\ y = 2am$. 55. $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$.

অন্তরকলনের প্রয়োগ

(Application of Differentiation)

1. অন্তরকলজের জ্যামিতিক অর্থ (Geometrical meaning of Derivative).

মনে কর $y=f(x)$, x-চলের একটি অপেক্ষক। $y=f(x)$ অপেক্ষকের লেখ একটি বক্র (curve)। x-এর যে-কোন মানের জন্য $f(x)$-এর অন্তরকলজ $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$ নির্ণেয় হইলে, $\frac{dy}{dx}$ হইল, (x, y) বিন্দুতে $y=f(x)$ বক্রের স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহার ত্রিকোণমিতিক ট্যান্‌জেন্ট (tangent)। সুতরাং $y=f(x)$ বক্রের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু (x, y)এ বক্রের স্পর্শক (y-অক্ষের সমান্তরাল না হইলে), ঐ স্পর্শকের প্রবণতা বা নতি (gradient বা slope) হইল $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x,\, y)}$. অর্থাৎ (x, y) বিন্দুতে $y=f(x)$ বক্রের স্পর্শক [y-অক্ষের সমান্তরাল না হইলে] x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত ψ কোণ উৎপন্ন করিলে, $\tan\psi=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x,\, y)}$।



অভিলম্ব (Normal) : মনে কর P(x, y) হইল $y=f(x)$ বক্রের যে-কোন বিন্দু। P বিন্দুতে $y=f(x)$ বক্রের অভিলম্ব হইল P বিন্দুতে ঐ বক্রের স্পর্শকের উপর P বিন্দুগামী লম্ব। যেহেতু P বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা $\frac{dy}{dx}$, সুতরাং P বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবণতা $-\frac{dx}{dy}$.

উদা. 1. নিম্নলিখিত বক্রসমূহের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) $y^2=4ax$ (ii) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (iii) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

সমাধান :

(i) $y^2=4ax$, $\therefore\ 2y\frac{dy}{dx}=4a$

সুতরাং $\frac{dy}{dx}=\frac{2a}{y}$. $\therefore\ \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1,\, y_1)}=\frac{2a}{y_1}$.

অতএব (x_1, y_1) বিন্দুতে $y^2=4ax$ বক্রের স্পর্শকের সমীকরণ

$$y-y_1=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1,\, y_1)}(x-x_1) \quad \text{বা,} \quad y-y_1=\frac{2a}{y_1}(x-x_1)$$

বা, $yy_1-y_1^2=2a(x-x_1)$ বা, $yy_1-4ax_1=2a(x-x_1)$

[$\because$ (x_1, y_1), $y^2=4ax$-এর একটি বিন্দু $\therefore$ $y_1^2=4ax_1$]

বা, $yy_1=2ax-2ax_1+4ax_1=2ax+2ax_1=2a(x+x_1)$.

(ii) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

উভয় পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

$$\therefore \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1,\, y_1)}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$$

সুতরাং (x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ

$$y-y_1=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1,\, y_1)}(x-x_1)$$

বা, $y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$ বা, $\frac{yy_1-y_1^2}{b^2}=-\frac{xx_1-x_1^2}{a^2}$

বা, $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$.

$\left[\because \quad (x_1, y_1), \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ উপবৃত্তের একটি বিন্দু}, \ \therefore \ \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\right]$

(iii) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

উভয় পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\tfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=0 \quad \text{বা,} \quad \frac{dy}{dx}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

$$\therefore \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1,\, y_1)}=-\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

সুতরাং (x_1, y_1) বিন্দুতে $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ বক্রের স্পর্শকের সমীকরণ

$$y-y_1=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1,\, y_1)}(x-x_1)$$

বা, $y-y_1=-\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^{\frac{1}{3}}(x-x_1)$ বা, $\frac{(y-y_1)}{y_1^{\frac{1}{3}}}+\frac{x-x_1}{x_1^{\frac{1}{3}}}=0$

বা, $xx_1^{-\frac{1}{3}}+yy_1^{-\frac{1}{3}}=x_1^{\frac{2}{3}}+y_1^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

[$\because$ (x_1, y_1), $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ বক্রের একটি বিন্দু, $\therefore$ $x_1^{\frac{2}{3}}+y_1^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$].

উদা. 2. (i) $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। (ii) $y=x^4-3x^2+4$ বক্রের $(1, 2)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) $y^2=4ax$ উভয়পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$2y\frac{dy}{dx}=4a$; বা, $\frac{dy}{dx}=\frac{2a}{y}$; $\therefore$ $-\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=-\frac{1}{\frac{2a}{y}}=-\frac{y}{2a}$.

সুতরাং $\left[-\frac{dx}{dy}\right]_{(at^2,\ 2at)}=-\frac{2at}{2a}=-t.$

সুতরাং $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ

$y-2at=(-t)(x-at^2)$ বা, $y-2at=-xt+at^3$.

বা, $xt+y=at^3+2at$.

(ii) $y=x^4-3x^2+4$; উভয় পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$\frac{dy}{dx}=4x^3-6x.$ $\therefore$ $-\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=-\frac{1}{4x^3-6x}$

$\therefore$ $\left[-\frac{dx}{dy}\right]_{(1,\ 2)}=-\frac{1}{4.1^3-6.1}=\frac{1}{2}.$

সুতরাং $(1, 2)$ বিন্দুতে প্রদত্ত বক্র $y=x^4-3x^2+4$ এর অভিলম্বের সমীকরণ $y-2=(x-1).\frac{1}{2}$ বা, $2y-4=x-1$ বা, $x-2y+3=0$.

উদা. 3. দেখাও যে, (a, b) বিন্দুতে $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$ বক্রের স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$.

$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$; উভয় পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$n\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{a}+n\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}\frac{1}{b}\frac{dy}{dx}=0$; $\therefore$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\left(\frac{bx}{ay}\right)^{n-1}$

$\therefore$ $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(a,\ b)}=-\frac{b}{a}\left(\frac{b.a}{a.b}\right)^{n-1}=-\frac{b}{a}.$

সুতরাং (a, b) বিন্দুতে $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$ বক্রের স্পর্শকের সমীকরণ

$$y-b=(x-a)\left(-\frac{b}{a}\right) \quad \text{বা,} \quad ay-ab=-bx+ab.$$

বা, $bx+ay=2ab$ বা, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2.$

উদা. 4. প্রমাণ কর যে $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ বক্রের যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের অক্ষদ্বয়ের মধ্যে ছেদিতাংশের দৈর্ঘ্য ধ্রুবক। [C. P. 1940]

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ বক্রের যে কোন (x_1, y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ

$$xx_1^{-\frac{1}{3}}+yy_1^{-\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \quad [\text{ উদা } 1 \text{ (iii)}]$$

বা, $\dfrac{x}{a^{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{y}{a^{\frac{2}{3}}y_1^{\frac{1}{3}}}=1$

সুতরাং অক্ষদ্বয়ে স্পর্শকটির ছেদিতাংশদ্বয়ের দৈর্ঘ্য

$$OA=a^{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{1}{3}} \text{ এবং } OB=a^{\frac{2}{3}}y_1^{\frac{1}{3}}$$

এক্ষণে, অক্ষদ্বয়ের মধ্যে ছেদিতাংশ AB-র দৈর্ঘ্য $=\sqrt{OA^2+OB^2}$

$$\sqrt{a^{\frac{4}{3}}x_1^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{4}{3}}y_1^{\frac{2}{3}}}=\sqrt{a^{\frac{4}{3}}(x_1^{\frac{2}{3}}+y_1^{\frac{2}{3}})}=\sqrt{a^{\frac{4}{3}}.a^{\frac{2}{3}}}=\sqrt{a^2}=a=\text{ধ্রুবক।}$$

2. স্পর্শক ও অভিলম্বের দৈর্ঘ্য, উপস্পর্শক ও উপ-অভিলম্ব (length of tangent and normal, subtangent and subnormal) :

মনে কর $y=f(x)$ বক্রের P একটি বিন্দু এবং P বিন্দুতে বক্রের স্পর্শক ও অভিলম্ব যথাক্রমে x-অক্ষকে T ও N বিন্দুতে ছেদ করে এবং PQ x-অক্ষের উপর লম্ব। PQ x-অক্ষকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

PT ও PNকে যথাক্রমে P বিন্দুতে বক্রের স্পর্শকের ও অভিলম্বের দৈর্ঘ্য বলে। TQ ও QNকে যথাক্রমে P বিন্দুতে বক্রটির উপস্পর্শক ও উপ-অভিলম্ব বলে।

স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dy}{dx}}$ অভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

উপ-স্পর্শক $=\dfrac{y}{\frac{dy}{dx}}$ উপ-অভিলম্ব $=y.\dfrac{dy}{dx}.$

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের যে কোন বিন্দুতে উপ-অভিলম্ব ধ্রুবক এবং উপস্পর্শক স্পর্শ বিন্দুর ভুজের সহিত সরলভেদে থাকে।

$$y^2=4ax \quad \therefore \quad 2y\frac{dy}{dx}=4a \quad \text{বা,} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2a}{y}.$$

সুতরাং উপ-অভিলম্ব $=y.\dfrac{dy}{dx}=y.\dfrac{2a}{y}=2a=$ ধ্রুবক।

এবং উপস্পর্শক $=\dfrac{y}{\frac{dy}{dx}}=\dfrac{y}{\frac{2a}{y}}=\dfrac{y^2}{2a}=\dfrac{4ax}{2a}=2x$; $\therefore$ উপ-স্পর্শক $\propto x$.

উদা. 6. $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ বক্রের $\theta=\frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের দৈর্ঘ্য, উপ-স্পর্শক ও উপ-অভিলম্ব নির্ণয় কর।

$$x=a(\theta-\sin\theta) \quad \therefore \quad \frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$$

$$y=a(1-\cos\theta) \quad \therefore \quad \frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\cot\frac{\pi}{4}=1.$$

আবার যখন $\theta=\frac{\pi}{2}$, তখন $y=a\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)=a.$

সুতরাং স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dy}{dx}}=\dfrac{a\sqrt{1+1}}{1}=\sqrt{2}a.$

অভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=a\sqrt{1+1}=\sqrt{2}a.$

উপ-স্পর্শক $=\dfrac{y}{\frac{dy}{dx}}=\dfrac{a}{1}=a$ উপ-অভিলম্ব $=y\dfrac{dy}{dx}=a.1=a.$

3. ধনাত্মক ও ঋণাত্মক অন্তরকলজের তাৎপর্য (Significance of the positive and negative signs of derivatives) :

সংজ্ঞা : 1. a-র যথেষ্ট নিকটবর্তী x-এর সকলমানের জন্য যদি $x>a$ হইলে

$f(x)>f(a)$ এবং $x<a$ হইলে $f(x)<f(a)$ হয়, তবে a বিন্দুতে $f(x)$কে বর্ধমান (increasing) বলা হয়।

2. a-র যথেষ্ট নিকটবর্তী x-র সকলমানের জন্য যদি $x<a$ হইলে $f(x)>f(a)$ এবং $x>a$ হইলে $f(x)<f(a)$ হয়, তবে a বিন্দুতে $f(x)$কে ক্ষীয়মান (decreasing) বলা হয়।

$f'(a)>0$ হইলে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ বর্ধমান এবং

$f'(a)<0$ হইলে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ ক্ষীয়মান হয়।

উদা. 7. প্রমাণ কর যে $f(x)=x^3+x^2-6x$ আপেক্ষকটি $x=1$ বিন্দুতে ক্ষীয়মাণ এবং $x=2$ বিন্দুতে বর্ধমান।

$f(x)=x^3+x^2-6x. \quad \therefore \quad f'(x)=3x^2+2x-6$

$\therefore \quad f'(1)=3.1^2+2.1-6=3+2-6=-1<0.$

সুতরাং $f(x)$, $x=1$ বিন্দুতে ক্ষীয়মাণ।

$f'(2)=3.2^2+2.2-6=12+4-6=10>0.$

সুতরাং $f(x)$, $x=2$ বিন্দুতে বর্ধমান।

উদা. 8. প্রমাণ কর যে, (i) $a-x^3$ অপেক্ষকটি x-এর সকল মানের জন্য ক্ষীয়মাণ এবং (ii) $x(x^2+3x+3)$ অপেক্ষকটি x-এর সকল মানের জন্য বর্ধমান।

(i) $f(x)=a-x^3 \quad \therefore \quad f'(x)=-3x^2$

এক্ষণে x^2, x-এর সকল মানের জন্য ধনাত্মক, অতএব $-3x^2$, x-এর সকল মানের জন্য ঋনাত্মক। সুতরাং $f(x)$, x-এর সকল মানের জন্য ক্ষীয়মাণ।

(ii) $f(x)=x(x^2+3x+3)=x^3+3x^2+3x$

$\therefore \quad f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2$

এক্ষণে, $(x+1)^2$, x-এর সকল মানের জন্য ধনাত্মক,

সুতরাং $3(x+1)^2$ অর্থাৎ $f'(x)$, x-এর সকল মানের জন্য ধনাত্মক।

$\therefore \quad f(x)$, x-এর সকল মানের জন্য বর্ধমান।

4. উচ্চতরক্রমের অন্তরকলজ (Derivatives of higher order) :

অনেক সময় $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$কে $y=f(x)$-এর প্রথম ক্রমের অন্তরকলজ (derivative of the first order) বলা হয়। $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$ বা, $\frac{d}{dx}\{f'(x)\}$ $=f''(x)$কে $y=f(x)$-এর দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ (derivative of the second order) বলা হয়। $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3}$ বা, $\frac{d}{dx}$ $\{f''(x)\}=f'''(x)$ কে

$y=f(x)$-এর তৃতীয় ক্রমের অন্তরকলজ বলা হয়। অনুরূপে $\dfrac{d^4y}{dx^4}$ বা, $f^{IV}(x)$, $\dfrac{d^5y}{dx^5}$ বা, $f^{V}(x)$, $\cdots\cdots\dfrac{d^ny}{dx^n}$ বা, $f^n(n)$কে যথাক্রমে $y=f(x)$-এর চতুর্থ, পঞ্চম,$\cdots\cdots$ n-তম ক্রমের অন্তরকলজ বলা হয়।

উদা. 9. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির x-এর সাপেক্ষে দ্বিমাত্রিক অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

(i) $y=ax^2+bx+c$ (ii) $y=\dfrac{1}{x}$ (iii) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

(iv) $y^2=4ax$ (v) $x^2+y^2=a^2$ (vi) $y=x\log x-x$

(vii) $x=a\cos t,\quad y=a\sin t$ (প্যারামিটার t)

(viii) $x=at,\quad y=\dfrac{a}{t}$ (প্যারামিটার t)

(ix) $x=a\cos^3\theta,\ y=b\sin^3\theta$ (প্যারামিটার θ)

(x) $y=ax^m+\dfrac{b}{x^m}$.

সমাধান :

(i) $y=ax^2+bx+c$.

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)=2ax+b$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(2ax+b)=2a.$$

(ii) $$y=\frac{1}{x}\quad\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}\quad\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2}{x^3}.$$

(iii) $$y=\frac{x-1}{x+1}\qquad\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{(x+1).1-(x-1).1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}.$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{(x+1)^2}\right)=-\frac{4}{(x+1)^3}.$$

(iv) $y^2=4ax$. উভয় পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$2y.\frac{dx}{dx}=4a\quad\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{2a}{y}$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{2a}{y}\right)=-\frac{2a}{y^2}\frac{dy}{dx}=-\frac{2a}{y^2}.\frac{2a}{y}=-\frac{4a^2}{y^3}$$

$$=\frac{-4a^2}{y^2.y}=-\frac{4a^2}{4ax.y}=-\frac{a}{xy}.$$

(v) $x^2+y^2=a^2$. উভয়পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$2x+2y.\frac{dy}{dx}=0 \qquad \text{বা,} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{y.1-x.\dfrac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$=-\frac{y-x.\left(-\dfrac{x}{y}\right)}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{a^2}{y^3}.$$

(vi) $y=x\log x-x$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x\log x-x)=\frac{d}{dx}(x\log x)-\frac{d}{dx}(x)$$

$$=x.\frac{d}{dx}(\log x)+\log x.\frac{d}{dx}(x)-1$$

$$=x.\frac{1}{x}+\log x.1-1=1+\log x-1=\log x.$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{x}.$$

(vii) $x=a\cos t \quad \therefore \quad \dfrac{dx}{dt}=-a\sin t$

$y=a\sin t \quad \therefore \quad \dfrac{dy}{dt}=a\cos t$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{a\cos t}{-a\sin t}=-\cot t$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(-\cot t)=\frac{d}{dt}(-\cot t)\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{d}{dt}(-\cot t).\frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}=-(-\operatorname{cosec}^2 t).\frac{1}{-a\sin t}$$

$$=-\operatorname{cosec}^2 t.\frac{1}{a\sin t}=-\frac{1}{a\sin^3 t}.$$

(viii) $x=at \quad \therefore \quad \dfrac{dx}{dt}=a; \qquad y=\dfrac{a}{t} \quad \therefore \quad \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{a}{t^2}$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{a}{t^2}}{a}=-\frac{1}{t^2}$$

$$\therefore\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{t^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{2}{t^3}.\ \frac{1}{a}=\frac{2}{at^3}.$$

(ix) $x=a\cos^3\theta.\qquad \therefore\ \frac{dx}{d\theta}=3a\cos^2\theta\,(-\sin\theta)$

$y=b\sin^3\theta.\qquad \frac{dy}{d\theta}=3b\sin^2\theta\,(\cos\theta)$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3b\sin^2\theta\,(\cos\theta)}{3a\cos^2\theta\,(-\sin\theta)}=-\frac{b}{a}\tan\theta.$$

$$\therefore\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{b}{a}\tan\theta\right)=\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{b}{a}\tan\theta\right)\frac{d\theta}{dx}.$$

$$=-\frac{b}{a}.\frac{d}{d\theta}(\tan\theta).\ \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}}=-\frac{b}{a}\sec^2\theta.\ \frac{1}{-3a\,(\cos^2\theta\sin\theta)}$$

$$=\frac{b}{3a^2}\ \frac{1}{\sin\theta\cos^4\theta}.$$

(x) $y=ax^m+\frac{b}{x^m}\qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=m(ax^{m-1}-bx^{-m-1})$

$$\therefore\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left\{m(ax^{m-1}-bx^{-m-1})\right\}$$

$$=m(m-1)ax^{m-2}+m(m+1)bx^{-m-2}$$

$$=m(m-1)ax^{m-2}+\frac{m(m+1)b}{x^{m+2}}.$$

উদা. 10. $y=\sin(m\sin^{-1}x)$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x.\frac{dy}{dx}+m^2y=0.$$

$y=\sin(m\sin^{-1}x)\qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\cos(m\sin^{-1}x).\ \frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$

বা, $\sqrt{1-x^2}\ \frac{dy}{dx}=m\cos(m\sin^{-1}x)$

x-এর সাপেক্ষে উভয় পক্ষের পুনরায় অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\frac{d^2y}{dx^2}\ \sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)\frac{dy}{dx}=-m\sin(m\sin^{-1}x)\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{m^2y}{\sqrt{1-x^2}}\left[\because\quad y=\sin(m\sin^{-1}x)\right]$$

বা, $\frac{d^2y}{dx^2}(1-x^2)-x.\frac{dy}{dx}=-m^2y$

বা, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x.\frac{dy}{dx}+m^2y=0.$

উদা. 11. প্রমাণ কর যে,

(i) $y=a\cos(\log x)+b\sin(\log x)$ হইলে

$$x^2.\frac{d^2y}{dx^2}+x.\frac{dv}{dx}+y=0$$

(ii) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ হইলে $(D^2-D-2)y=0$

যেখানে $D=\frac{d}{dx}$ এবং $D^2=\frac{d^2}{dx^2}$

(iii) $y(1-x)=x^2$ হইলে $(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}-2\ \frac{dy}{dx}=2.$

সমাধান :

(i) $y=a\cos(\log x)+b\sin(\log x)$

$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-a\sin(\log x).\frac{1}{x}+b\cos(\log x)\frac{1}{x}.$

বা, $x.\frac{dy}{dx}=b\cos(\log x)-a\sin(\log x)$

উভয় পক্ষের x-এর সাপেক্ষে পুনরায় অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\frac{dy}{dx}+x.\frac{d^2y}{dx^2}=-b\sin(\log x).\frac{1}{x}-a\cos(\log x).\frac{1}{x}$$

$\therefore\quad x.\frac{dv}{dx}+x^2.\frac{d^2y}{dx^2}=-\{a\cos(\log x)+b\sin(\log x)\}=-y.$

বা, $x^2.\frac{d^2y}{dx^2}+x.\frac{dy}{dx}+y=0.$

(ii) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$

বা, $\dfrac{dv}{dx}=2c_1e^{2x}-c_2e^{x}$. $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=4c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$.

$\therefore \quad (D^2-D-2)y=\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-2y$

$=4c_1e^{2x}+c_2e^{-x}-2c_1e^{2x}+c_2e^{-x}-2c_1e^{2x}-2c_2e^{-2x}=0.$

(iii) $y(1-x)=x^2$. উভয় পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$(1-x)\dfrac{dy}{dx}-y=2x$ উভয় পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dy}{dx}=2 \qquad$ বা, $(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2.\dfrac{dy}{dx}=2.$

উদা. 12. $y=A\cos 3x+B\sin 3x+(\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{27}x+\frac{5}{81})e^{3x}$ হইলে দেখাও যে, $\dfrac{d^2y}{dx^2}+9y=(x^2+1)e^{3x}$.

$y=A\cos 3x+B\sin 3x+(\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{27}x+\frac{5}{81})e^{3x}$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx}=-3A\sin 3x+3B\cos 3x+(\frac{1}{9}x-\frac{1}{27})e^{3x}$

$+3(\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{27}x+\frac{5}{81})e^{3x}$

$=-3A\sin 3x+3B\cos 3x+(\frac{1}{9}x-\frac{1}{27}+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{9}x+\frac{5}{27})e^{3x}$

$=-3A\sin 3x+3B\cos 3x+(\frac{1}{6}x^2+\frac{4}{27})e^{3x}$

$\therefore \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=-9A\cos 3x-9B\sin 3x+(\frac{1}{3}x)e^{3x}+3(\frac{1}{6}x^2+\frac{4}{27})e^{3x}$

$=-9A\cos 3x-9B\sin 3x+(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{4}{9})e^{3x}$

$\therefore \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}+9y=-9A\cos 3x-9B\sin 3x+(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{4}{9})e^{3x}$

$+9A\cos 3x+9B\sin 3x+(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{5}{9})e^{3x}$

$=(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{5}{9})e^{3x}=(x^2+1)e^{3x}.$

5. অপেক্ষকের চরম ও অবমমান (Maximum and minimum values of functions) :

যদি $x=a$ বিন্দুকে অন্তর্গত করিয়া এরূপ একটি বিস্তার পাওয়া যায় যে, ঐ বিস্তারের a ভিন্ন প্রত্যেক বিন্দুতে কোন সন্তত অপেক্ষক $f(x)$ এর মান $f(a)$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অর্থাৎ ঐ বিস্তারে $f(x)<f(a)$ [সকল $x\neq a$)-এর জন্য], তবে বলা হয় যে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর একটি চরমমান (maximum value) আছে।

যদি $x=a$ বিন্দুকে অন্তর্গত করিয়া এরূপ একটি বিস্তার পাওয়া যায় যে, ঐ বিস্তারের a ভিন্ন প্রত্যেক বিন্দুতে কোন সন্তত অপেক্ষক $f(x)$-এর মান $f(a)$ অপেক্ষা বৃহত্তর অর্থাৎ ঐ বিস্তারে $f(x)>f(a)$ [সকল $x(\neq a)$-র জন্য], তবে বলা হয় যে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর একটি অবম মান (minimum value) আছে।

$x=a$ বিন্দুতে কোন সন্তত অপেক্ষক $y=f(x)$-এর চরম ও অবম মান থাকার শর্ত :

যদি $f'(a)=f''(a)=f'''(a)=\cdots-=f^{n-1}(a)=0$ এবং $f^n(a\neq 0$ হয়, এবং n একটি যুগ্ম সংখ্যা হয়, তবে $f^n(a)<0$ হইলে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর একটি চরম মান থাকিবে ; $f^n(a)>0$ হইলে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর একটি অবম মান থাকে। n অযুগ্ম সংখ্যা হইলে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর চরম বা অবম মান থাকে না। চরম বা অবম মানকে সাধারণভাবে অনেক সময় **প্রান্তিক মান** (extreme value) বলে।

উদা. 13. $2x^3-21x^2+36x-20$ রাশিমালাটির x-এর কোন্ কোন্ মানের জন্য চরম বা অবম মান আছে নির্ণয় কর এবং রাশিমালাটির চরম ও অবম মান নির্ণয় কর। [C. P. 1936]

মনে কর, $f(x)=2x^3-21x^2+36x-20$.

$f'(x)=6x^2-42x+36$. $\qquad f''(x)=12x-42$.

এক্ষণে $f'(x)=0$ হইলে $6x^2-42x+36=0$ হইবে

অর্থাৎ $6(x^2-7x+6)=0$ হইবে, $\qquad$ অর্থাৎ $6(x-1)(x-6)=0$ হইবে।

অর্থাৎ $x=1$ বা, $x=6$ হইলে $f'(x)=0$ হয়।

সুতরাং $x=1$ এবং $x=6$ বিন্দু দুইটিতে $f(x)$-এর চরম বা অবম মান থাকা সম্ভব।

এক্ষণে, $f''(1)=12.1-42=-30<0$.

$\therefore\ x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর চরম মান আছে এবং

এই চরম মান হইল $f(1)=2.1^3-21.1^2+36.1-20$

$$=2-21+36-20=-3.$$

আবার $f''(6)=12.6-42=30>0$

সুতরাং $x=6$ বিন্দুতে $f(x)$-এর অবম মান আছে এবং এই অবম মান হইল,

$f(6)=2.6^3-21.6^2+36.6-20=432-756+216-20=-128$.

উদা. 14. $\dfrac{x^2-7x+6}{x-10}$ অপেক্ষকটির x-এর কোন্ কোন্ মানের জন্য চরম বা অবম মান নির্ণয় কর। [C. P. 1939]

মনে কর $f(x)=\frac{x^2-7x+6}{x-10}$

$\therefore \quad f'(x)=\frac{(x-10)(2x-7)-(x^2-7x+6).1}{(x-10)^2}$

$=\frac{2x^2-27x+70-x^2+7x-6}{(x-10)^2}=\frac{x^2-20x+64}{(x-10)^2}$

এক্ষণে, $f(x)$-এর চরম বা অবম মানের জন্য $f'(x)=0$ হইবে,

বা, $\frac{x^2-20x+64}{(x-10)^2}=0$ হইবে, বা, $x^2-20x+64=0$ হইবে,

বা, $(x-16)(x-4)=0$ হইবে, বা, $x=16$ বা, 4 হইবে।

সুতরাং $x=16$ বা, $x=4$ বিন্দুতে $f(x)$-এর চরম বা অবম মান থাকা সম্ভব।

এক্ষণে $f''(x)=\frac{(x-10)^2\,(2x-20)-(x^2-20x+64).2(x-10).1}{(x-10)^4}$

$=\frac{2.(x-10)^3-(x^2-20x+64).2(x-10)}{(x-10)^4}$

$=\frac{2(x-10)(x^2-20x+100-x^2+20x-64)}{(x-10)^4}=\frac{72}{(x-10)^3}$

এক্ষণে $f''(16)=\frac{72}{(16-10)^3}=\frac{72}{6^3}>0.$

$f''(4)=\frac{72}{(4-10)^3}=\frac{72}{-6^3}<0.$

সুতরাং $x=16$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির অবম মান

এবং $x=4$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির চরম মান আছে।

উদা. 15. $x^{\frac{1}{x}}$ অপেক্ষকটির চরম বা অবমমান থাকা সম্ভব কিনা পরীক্ষা কর এবং সম্ভব হইলে ঐ মান নির্ণয় কর। [C. P. 1941, '45]

মনে কর $y=x^{\frac{1}{x}}$ $\quad\therefore\quad \log y=\frac{1}{x}\log x.$

বা, $\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}\log x+\frac{1}{x}.\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}(1-\log x)$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x^2}(1-\log x)=\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1-\log x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x).$

সুতরাং $\frac{dy}{dx}=0$ হইলে $1-\log x=0$ হইবে, বা, $\log x=1=\log e$

অর্থাৎ $x=e$ হইবে। সুতরাং $x=e$ হইলে $x^{\frac{1}{x}}$এর চরম বা অবম মান থাকা সম্ভব।

$$\text{এক্ষণে, } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y}{x^2}\left(-\frac{1}{x}\right)+(1-\log x)\ \frac{x^2\frac{dy}{dx}-2xy}{x^4}$$

$$=\frac{-xy+(1-\log x)\left(x^2\frac{dy}{dx}-2xy\right)}{x^4}$$

$$\text{এক্ষণে, যখন } x=e \text{ তখন, } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-ey+(1-1)\left(e^2\frac{dy}{dx}-2ey\right)}{e^4}$$

$$=\frac{-ey}{e^4}=-\frac{y}{e^3}=-\frac{x^{\frac{1}{x}}}{e^3}=\frac{-e^{\frac{1}{e}}}{e^3}=-e^{\frac{1}{e}-3}<0$$

সুতরাং $x=e$ বিন্দুতে $x^{\frac{1}{x}}$ এর চরম মান আছে এবং চরম মান $e^{\frac{1}{e}}$.

উদা. 16. দেখাও যে, $x=\frac{\pi}{3}$ হইলে $\sin x\,(1+\cos x)$ এর মান চরম হয়। [C. U. 1942, '47]

মনে কর $f(x)=\sin x\,(1+\cos x)$

$$\therefore\quad f'(x)=\cos x\,(1+\cos x)+\sin x\,(-\sin x)$$

$$=\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$=\cos x+\cos 2x=2\cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{x}{2}$$

এক্ষণে $x=\frac{\pi}{3}$ হইলে, $f'(x)=2.\cos\frac{\pi}{2}\ \cos\frac{\pi}{6}=0$

সুতরাং $x=\frac{\pi}{3}$ হইলে $f(x)$-এর চরম বা অবমমান থাকা সম্ভব।

এক্ষণে $f''(x)=-\sin x-2\sin 2x.$

$$\therefore\quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-2.\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}<0.$$

সুতরাং $x=\frac{\pi}{3}$ হইলে $f(x)=\sin x\,(1+\cos x)$-এর চরম মান আছে।

উদা. 17. প্রমাণ কর যে, কোন বৃত্তে অন্তর্লিখিত আয়তক্ষেত্র সমূহের মধ্যে যেটির ক্ষেত্রফল বৃহত্তম, তাহা একটি বর্গক্ষেত্র। [C. U. 1936]

মনে কর $x^2+y^2=r^2$ একটি প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ এবং এই বৃত্তে অন্তর্লিখিত

কোন আয়তক্ষেত্রের কোন শীর্ষের স্থানাঙ্ক (x, y). সুতরাং আয়তক্ষেত্রটির বাহু চারিটির দৈর্ঘ্য $2x, 2y, 2x$ ও $2y$. সুতরাং আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$A=4xy=4x\sqrt{r^2-x^2}.$$

এক্ষণে, $$\frac{dA}{dx}=4\sqrt{r^2-x^2}-\frac{4x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$=\frac{4(r^2-x^2)-4x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{4(r^2-2x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

এক্ষণে, A-র চরম বা অবমমানের জন্য $\frac{dA}{dr.}=0$

বা, $r^2-2x^2=0$ বা, $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$

এক্ষণে, $$\frac{d^2A}{dx^2}=\frac{\sqrt{r^2-x^2}(-16x)+4(r^2-2x^2)\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}}{(r^2-x^2)}$$

$$=\frac{(r^2-x^2)(-16x)+4x(r^2-2x^2)}{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

এক্ষণে, $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$ হইলে, $$\frac{d^2A}{dx^2}=\frac{\left(r^2-\frac{r^2}{2}\right)\left(-16\frac{r}{\sqrt{2}}\right)+4\frac{r}{2}\left(r^2-r^2\right)}{\left(r^2-\frac{r^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{-4\sqrt{2}r^3}{\left(\frac{r^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}<0.$$

সুতরাং যখন $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$ তখন A-র মান চরম।

আবার তখন, $y=\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{2}}=\frac{r}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ যখন A-র মান চরম অর্থাৎ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম, তখন $x=y=\frac{r}{\sqrt{2}}$ অর্থাৎ আয়তক্ষেত্রের বাহু সমূহের দৈর্ঘ্য সমান বা, আয়তক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র। সুতরাং কোন বৃত্তে অন্তর্লিখিত সকল আয়তক্ষেত্রের মধ্যে বৃহত্তম ক্ষেত্রফল বিশিষ্টটি একটি বর্গক্ষেত্র।

উদা. 18. 10কে এমন দুইটি অংশে ভাগ কর যাহাতে একটি অংশের দ্বিগুণের সহিত অপর অংশের বর্গের যোগফল ক্ষুদ্রতম হয়।

মনে কর অংশ দুইটি $10-x$ ও x এবং $x^2+2(10-x)$ এর মান ক্ষুদ্রতম।

মনে কর $y=x^2+2(10-x)$. $\therefore \quad \frac{dy}{dx}=2x-2$

এক্ষণে y-এর মান ক্ষুদ্রতম হইলে $\frac{dy}{dx}=0$ বা, $2x-2=0$ বা, $x=1$ হইবে।

আবার $\frac{d^2y}{dx^2}=2>0$ সুতরাং $x=1$ এর জন্যও $\frac{d^2y}{dx^2}>0$.

সুতরাং $x=1$ হইলে $x^2+2(10-x)$ এর মান ক্ষুদ্রতম হয়। সুতরাং অংশ দুইটি 9 ও 1.

উদা. 19. $l_1, l_2, \cdots\cdots l_n$ ধ্রুবক হইলে $(x-l_1)^2+(x-l_2)^2+\cdots+(x-l_n)^2$ এর মান x-এর কোন্ মানের জন্য ক্ষুদ্রতম হইবে।

মনে কর $y=(x-l_1)^2+(x-l_2)^2+\cdots\cdot+(x-l_n)^2$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=2(x-l_1)+2(x-l_2)+\cdots+2(x-l_n)$$

এক্ষণে, y-এর মান ক্ষুদ্রতম হইলে, $\frac{dy}{dx}=0$ হইবে।

অর্থাৎ $2(x-l_1)+2(x-l_2)+\cdots+2(x-l_n)=0$

বা, $(x-l_1)+(x-l_2)+\cdots+(x-l_n)=0$

বা, $nx-(l_1+l_2+\cdots+l_n)=0$

বা, $x=\frac{l_1+l_2+\cdots+l_n}{n}$.

আবার $\frac{d^2y}{dx^2}=2+2+\cdots+2=2n>0$ [এখানে n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা]

সুতরাং $x=\frac{l_1+l_2+\cdots+l_n}{n}$ হইলে,

$(x-l_1)^2+(x-l_2)^2+\cdots+(x-l_n)^2$ এর মান ক্ষুদ্রতম হয়।

উদা. 20. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য l হইলে উহার অপর দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর, যাহাতে বাহুদ্বয়ের যোগফল বৃহত্তম হয়।

মনে কর অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য x ও y.

$\therefore \quad x^2+y^2=l^2$

এক্ষণে অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের যোগফল হইল

$s=x+y=x+\sqrt{l^2-x^2}$

$$\therefore \quad \frac{ds}{dx}=1+\tfrac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{l^2-x^2}}=1-\frac{x}{\sqrt{l^2-x^2}}$$

সুতরাং চরম মানের জন্য $\frac{ds}{dx}=0$ বা, $1-\frac{x}{\sqrt{l^2-x^2}}$ হইবে

বা, $\frac{x}{\sqrt{l^2-x^2}}=1$ বা, $x^2=l^2-x^2$

বা, $2x^2=l^2$ বা, $x=\frac{l}{\sqrt{2}}$ হইবে। $\therefore\ y=\sqrt{l^2-\frac{l^2}{2}}=\frac{l}{\sqrt{2}}$.

আবার $$\frac{d^2s}{dx^2}=-\frac{\sqrt{l^2-x^2}+x\frac{x}{(l^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}}{l^2-x^2}$$

$$=-\frac{\sqrt{l^2-x^2}+\frac{x^2}{(l^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}}{l^2-x^2}=-\frac{l^2}{(l^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

এখানে যখন $x=\frac{l}{\sqrt{2}}$, তখন $\frac{d^2s}{dx^2}=-\frac{l^2}{\left(l^2-\frac{l^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2^{\frac{3}{2}}}{l}<0.$

সুতরাং যখন $x=y=\frac{l}{\sqrt{2}}$, তখন $s=x+y$ এর মান চরম বা বৃহত্তম।

উদা. 21. ধ্রুবক আয়তন বিশিষ্ট একটি উপর খোলা চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল কখন ক্ষুদ্রতম হইবে?

মনে কর প্রদত্ত ধ্রুবক আয়তন k এবং চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধ ও উচ্চতা যথাক্রমে r ও h.

সুতরাং $k=$ চোঙের আয়তন $=\pi r^2h$. $\therefore\ h=\frac{k}{\pi r^2}$.

এক্ষণে চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল $=2\pi rh=2\pi r\frac{k}{\pi r^2}=\frac{2k}{r}$.

$\therefore$ চোঙের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $=s=\frac{2k}{r}+\pi r^2$.

এক্ষণে $\frac{ds}{dr}=-\frac{2k}{r^2}+2\pi r$ এবং $\frac{d^2s}{dr^2}=\frac{4k}{r^3}+2\pi$

এক্ষণে $\frac{ds}{dr}=0$ হইলে, $\frac{2k}{r^2}=2\pi r$ বা, $r=\frac{k}{\pi r^2}=\frac{\pi r^2h}{\pi r^2}=h$

সুতরাং $r=h$ হইলে চোঙের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল ক্ষুদ্রতম হওয়া সম্ভব।

এক্ষণে, যখন $r=h$, তখন $\frac{d^2s}{dr^2}=\frac{4k}{h^3}+2\pi>0$

সুতরাং $r=h$ হইলে চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ক্ষুদ্রতম হইবে।

6. পরিবর্তনের হারের পরিমাপকরূপে অন্তরকলজের তাৎপর্য :

$y=f(x)$ যদি কোন চলের একটি সন্তত অপেক্ষক হয় এবং x-এর মানের Δx পরিবর্তনের জন্য y-এর মানের পরিবর্তন Δy হইলে $\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$ দ্বারা x-এর সাপেক্ষে y-এর পরিবর্তনের হার পরিমাপ করা হয়।

যদি যাত্রার t সময় পরে কোন কণা কর্তৃক অতিক্রান্ত পথ s হয়, তবে $\frac{ds}{dt}$ ঐ মুহূর্তে কণাটির বেগ।

আবার যাত্রার t সময় পরে কোন কণার বেগ v হইলে $\frac{dv}{dt}$, ঐক্ষণে কণাটির ত্বরণ।

উদা. 22. কোন কণা কর্তৃক t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s=63t-6t^2-t^3$ হইলে যাত্রার 2 সেকেণ্ড পরে কণাটির বেগ এবং উহা স্থির হইবার পূর্বে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। [C. U. 1958]

$s=63t-6t^2-t^3$; $\therefore$ $v=\frac{ds}{dt}=63-12t-3t^2$.

সুতরাং যাত্রার 2 সেকেণ্ড পরে কণাটির বেগ

$63-12.2-3.2^2=63-24-12=27$ দৈর্ঘ্য একক/সেকেণ্ড।

আবার কণাটির স্থির হওয়ার অর্থ উহার বেগ শূন্য হওয়া।

সুতরাং $\frac{ds}{dt}=0$ হইলে,

$63-12t-3t^2=0$ বা $t^2+4t-21=0$

বা, $(t+7)(t-3)=0$ $\therefore$ $t=-7$ বা 3.

এক্ষণে, যেহেতু সময় ঋণাত্মক হইতে পারে না, সুতরাং $t=3$.

$\therefore$ কণাটি 3 সেকেণ্ড পরে স্থির হইবে।

এক্ষণে এই 3 সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব

$=63.3-6.3^2-3^3=189-54-27=108$ একক দৈর্ঘ্য।

উদা. 23. যাত্রার t সেকেণ্ড পরে একটি কণার একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে সরণ s হইলে $s=36t+6t^2-t^3$. যাত্রার 1 সেকেণ্ড পরে কণাটির বেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় কর। O বিন্দু হইতে কতদূরে কণাটির ত্বরণ শূন্য হইবে?

$s=36t+6t^2-t^3 \quad \therefore \quad v=\frac{ds}{dt}=36+12t-3t^2$

এবং ত্বরণ $f=\frac{dv}{dt}=12-6t$

সুতরাং যাত্রার 1 সেকেণ্ড পরে কণাটির বেগ $=36+12.1-3.1^2=45$ দৈর্ঘ্য একক/সেকেণ্ড এবং ত্বরণ $=12-6.1=6$ দৈর্ঘ্য একক/সেকেণ্ড^2.

এক্ষণে মনে কর যাত্রার t সেকেণ্ড পরে কণাটির ত্বরণ শূন্য হয়,

$\therefore \quad 12-6t=0$; বা, $t=2$.

এক্ষণে 2 সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s=36.2+6.2^2-2^3$

$=72+24-8=88$ দৈর্ঘ্য একক।

সুতরাং O বিন্দু হইতে 88 দৈর্ঘ্য একক দূরে কণাটির ত্বরণ শূন্য হইবে।

উদা. 24. সরলরেখায় গতিশীল একটি কণাকর্তৃক t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ (u এবং f ধ্রুবক) হইলে দেখাও যে যাত্রার t সময় পরে বেগ $v=u+ft$.

$s=ut+\frac{1}{2}ft^2 \quad \therefore \quad v=\frac{ds}{dt}=u+\frac{1}{2}f.2t=u+ft.$

উদা. 25. একটি শঙ্কু আকৃতির জলাধারের শীর্ষবিন্দু নীচের দিকে। শঙ্কুটির উচ্চতা 15 ইঞ্চি এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 5 ইঞ্চি। যখন জলাধারে জলের উচ্চতা 10 ইঞ্চি, তখন জলের আয়তন কি হারে বাড়িতেছে ?

যখন জলের উচ্চতা x ইঞ্চি, তখন জলের উপরিতলের ব্যাসার্ধ r হইলে $\frac{r}{5}=\frac{x}{1}$

বা $r=\frac{1}{3}x$ ইঞ্চি।

সুতরাং তখন জলের আয়তন $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{x}{3}\right)^2.x$ ঘন ইঞ্চি $=\frac{1}{27}\pi x^3$ ঘন ইঞ্চি।

এক্ষণে মনে কর $V=\frac{1}{27}\pi x^3 \quad \therefore \quad \frac{dV}{dx}=\frac{1}{9}\pi x^2$. ঘন ইঞ্চি

এক্ষণে $\frac{dV}{dx}=x$-এর সাপেক্ষে V-এর পরিবর্তনের হার।

সুতরাং যখন $x=10$ ইঞ্চি তখন জলের আয়তন বৃদ্ধির হার

$=\frac{1}{9}.3{\cdot}142\times10^2=\frac{1}{9}\times314{\cdot}2=34{\cdot}9.$

উদা. 26. একটি বৃত্তাকার পাতের ব্যাসার্ধ যখন 3 ফুট তখন গরম করিবার ফলে পাতটির ব্যাসার্ধ প্রতি সেকেণ্ডে ·0012 ইঞ্চি বৃদ্ধি পায়। এই সময়ে পাতটির ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির হার নির্ণয় কর।

পাতটির ব্যাসার্ধ r হইলে উহার ক্ষেত্রফল $A=\pi r^2$.

এক্ষণে মনে কর t সময়কে সূচিত করে।

সুতরাং $\frac{dA}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}$ কিন্তু $\frac{dr}{dt}$=প্রতি সেকেণ্ডে ব্যাসার্ধ বাড়িবার হার

∴ যখন $r=3$ ফুট, তখন ক্ষেত্রফল বাড়িবার হার

$=2\times3{\cdot}142\times36\times{\cdot}0012$ বর্গ ইঞ্চি/সেকেণ্ড$=0{\cdot}27$ বর্গ ইঞ্চি/সেকেণ্ড।

উদা. 27. 13 ফুট লম্বা একটি দণ্ড একটি উল্লম্ব (vertical) প্রাচীরের গায়ে হেলান আছে। দণ্ডটির নীচের প্রান্ত প্রাচীরের নিম্ন হইতে 5 ফুট দূরে আছে, এবং এই প্রান্ত ভূমির উপর প্রতি সেকেণ্ডে 2 ফুট বেগে প্রাচীর হইতে দূরের দিকে সরিয়া যাইতেছে। দণ্ডটির অপর প্রান্ত প্রাচীর বরাবর কি বেগে নীচের দিকে নামিবে?

মনে কর ভূমি এবং উল্লম্ব প্রাচীরের ছেদরেখা হইতে দণ্ডটির উপর এবং নিম্নপ্রান্ত দুইটির দূরত্ব যথাক্রমে x এবং y. সুতরাং এই প্রান্ত দুইটির বেগ যথাক্রমে $\frac{dx}{dt}$ ও $\frac{dy}{dt}$. প্রশ্নানুসারে $x^2+y^2=13^2$ এবং $\frac{dy}{dt}=2$. এক্ষণে $x^2+y^2=13^2$ সম্পর্কের উভয়পক্ষের t এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dt}=-\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}.$$

এক্ষণে, যখন $y=5$ ফুট, তখন $x=\sqrt{13^2-15^2}=12$ ফুট

$$\therefore\ \frac{dx}{dt}=-\frac{5}{12}\times2 \text{ ফু./সেকেণ্ড}=-10 \text{ ইঞ্চি/সেকেণ্ড}$$

সুতরাং দণ্ডটির উপরের প্রান্ত 10 ইঞ্চি/সেকেণ্ড বেগে নামিয়া আসিতেছে।

7. অন্তরকল ও আসন্নমান এবং ত্রুটি নির্ণয়:

$dy=f'(x)\Delta x$ কে x-এর ক্ষুদ্র পরিবর্তন Δx-এর জন্য $y=f(x)$-এর অন্তরকল (Differential) বলে। $y=x$ হইলে $f'(x)=1$ এবং $dx=1.\Delta x=\Delta x$

$$\therefore\ dy=f'(x)dx.$$

এক্ষণে, ∵ $\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$, সুতরাং $\Delta x\,(=dx)$ অত্যন্ত ক্ষুদ্র হইলে y-এর অনুরূপ পরিবর্তন Δy এবং dyকে প্রায় সমান মনে করা যায়। সুতরাং x-এর অত্যন্ত ক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য, y-এর পরিবর্তনের আসন্নমান হিসাবে $dy=f'(x)dx$কে লওয়া যায়।

উদা. 28. $1° = {\cdot}01745$ রেডিয়ান হইলে tan 46°-র আসন্নমান নির্ণয় কর।
[State Counsil (W. B.)]

মনে কর $y = \tan x \quad \therefore \quad dy = \sec^2 x \, dx.$

এখানে $x = 45° = \left(\frac{\pi}{4}\right)$ এবং $dx = 1° = {\cdot}01745$ রেডিয়ান হইলে

$dy = \sec^2 45° \times {\cdot}01745 = 2 \times {\cdot}01745 = {\cdot}03490$

সুতরাং কোণের পরিমাপ 1° বৃদ্ধি পাইলে কোণের tan-এর মান ·03490 বৃদ্ধি পাইবে।

$\therefore \quad \tan 46° = \tan 45° + {\cdot}03490 = 1 + {\cdot}03490 = 1{\cdot}03490$ (আসন্ন)

উদা. 29. 1 মি. মি. পর্যন্ত সঠিকভাবে নির্ণয় করা যায় এইরূপ একটি স্কেল দ্বারা একটি ঘনের বাহু মাপা হইল। যদি বাহুর দৈর্ঘ্য 1·05 সে. মি. হয়, তবে ঘনের আয়তনের সর্ববৃহৎ ত্রুটি কত হইতে পারে? ঐ ত্রুটির শতকরা হার নির্ণয় কর।

মনে কর ঘনটির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য x সে. মি.

$\therefore$ স্থানটির আয়তন $V = x^3 \quad \therefore \quad dV = 3x^2 \, dx.$

এক্ষণে যখন $x = 1{\cdot}05$ সে.মি., তখন dx-এর সর্ববৃহৎ মান $= 1$ মি.মি. $= {\cdot}1$ সে.মি.

সুতরাং আয়তনের সর্ববৃহৎ ত্রুটি $= dV = 3.(1{\cdot}05)^2 \times {\cdot}1$ ঘন সে. মি.

$= {\cdot}33075$ ঘন সে. মি. $= 33$ ঘন মি. মি.

$\therefore$ ত্রুটির শতকরা হার $\frac{dv}{v} \times 100 = \frac{33}{(1{\cdot}05)^3} \times 100 = 2{\cdot}9\%$ (আসন্ন)

উদা. 30. একটি মিনারের পাদদেশ হইতে 100 ফুট দূরে অবস্থিত একটি বিন্দুতে মিনারের শীর্ষদেশের উন্নতি 60°. যদি উন্নতি মাপিতে ত্রুটি 1′ হয়, তবে মিনারের উচ্চতা মাপিতে কত ত্রুটি হইবে?

মিনারের উচ্চতা h এবং ঐ বিন্দুতে মিনারের শীর্ষদেশের উন্নতি θ হইলে $h = 100 \tan \theta.$

$\therefore \quad dh = 100 \sec^2\theta \, d\theta.$

সুতরাং θ মাপিতে ত্রুটি

$= d\theta = 1' = \frac{1°}{60} = \frac{{\cdot}01745 \text{ রেডিয়ান}}{60} = {\cdot}000291$ রেডিয়ান।

সুতরাং যখন $\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$ এবং মিনারের উচ্চতা h, তখন উচ্চতা মাপিতে ত্রুটি

$= dh = 100 \sec^2 \frac{\pi}{3} \times {\cdot}000291$ ফুট $= 100 \times 4 \times {\cdot}000291$ ফুট

$= {\cdot}1164$ ফুট $= {\cdot}1164 \times 12$ ইঞ্চি $= 1{\cdot}39$ ইঞ্চি (আসন্ন)।

7. বিবিধ উদাহরণ ঃ

উদা. 31. প্রমাণ কর যে,

$$y=\tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2}) \text{ হইলে } \frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+a^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\tfrac{1}{2}.x\tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.2x$$

$$+\frac{a^2}{2}.\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)+\frac{a^2}{2}.\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\tfrac{1}{2}.\frac{x^2+a^2+x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{a^2}{2}.\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{x^2+a^2+x^2+a^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\frac{2(x^2+a^2)}{2\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}.$$

উদা. 32. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর যখন, $y=\sin^{-1}\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)^2}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)$$

$$=\frac{b+a\cos x}{\sqrt{(b+a\cos x)^2-(a+b\cos x)^2}}\times$$

$$\frac{(b+a\cos x)\frac{d}{dx}(a+b\cos x)-(a+b\cos x)\times\frac{d}{dx}(b+a\cos x)}{(b+a\cos x)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2+2ab\cos x+a^2\cos^2x-a^2-2ab\cos x-b^2\cos^2x}}\times$$

$$\frac{(b+a\cos x)(-b\sin x)-(a+b\cos x)(-a\sin x)}{b+a\cos x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2(1-\cos^2x)-a^2(1-\cos^2x)}}\times$$

$$\frac{-b^2\sin x-ab\sin x\cos x+a^2\sin x+ab\sin x\cos x}{b+a\cos x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)\sin^2x}}\times\frac{\sin x(a^2-b^2)}{b+a\cos x}=\frac{-\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\cos x}.$$

উদা. 33. $\frac{dy}{dx}$ মান নির্ণয় কর যখন,

(i) $x=\sec^{-1}\frac{1+t^2}{1-t^2},\ y=\tan^{-1}\frac{a-t}{1+at}$

(ii) $x=\sin^{-1}(3t-4t^3),\ y=\cos^{-1}(8t^4-8t^2+1)$.

সমাধান ঃ

(i) $x=\sec^{-1}\frac{1+t^2}{1-t^2}=\cos^{-1}\frac{1-t^2}{1+t^2}=\cos^{-1}\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

[$t=\tan\theta$ মনে করিয়া]

$$=\cos^{-1}\cos(2\theta)=2\theta=2\tan^{-1}t$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2}.$$

$$y=\tan^{-1}\frac{a-t}{1+at}=\tan^{-1}a-\tan^{-1}t\ ;\ \therefore\ \frac{dy}{dt}=-\frac{1}{1+t^2}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dt}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2}{1+t^2}}=-\frac{1}{2}.$$

(ii) মনে কর $t=\sin\theta$

$$\therefore\ x=\sin^{-1}(3t-4t^3)=\sin^{-1}(3\sin\theta-4\sin^3\theta)$$
$$=\sin^{-1}(\sin 3\theta)=3\theta$$

এবং $y=\cos^{-1}(8t^4-8t+1)=\cos^{-1}(8\sin^4\theta-8\sin^2\theta+1)$
$$=\cos^{-1}\cos(4\theta)=4\theta.$$

$\therefore\ \frac{dx}{d\theta}=3$ এবং $\frac{dy}{d\theta}=4.$ সুতরাং $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{4}{3}.$

উদা. 34. অন্তরকলজ নির্ণয় কর ঃ

(i) x^3এর সাপেক্ষে x^8এর

(ii) $\sin^{-1}x$এর সাপেক্ষে $x^{\sin^{-1}x}$এর [C. P. 1938]

(iii) $\tan x$-এর সাপেক্ষে $\sec x$এর

সমাধান ঃ

(i) মনে কর, $y=x^8$ এবং $z=x^3$.

$$\therefore\ \frac{d}{d(x^3)}(x^8)=\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dz}=\frac{dy}{dx}\Big/\frac{dz}{dx}=\frac{8x^7}{3x^2}=\frac{8}{3}x^5.$$

(ii) মনে কর, $y=x^{\sin^{-1}x}$ এবং $z=\sin^{-1}x$.

$\therefore$ $\sin^{-1}x$-এর সাপেক্ষে $x^{\sin^{-1}x}$ এর অন্তরকলজ $=\dfrac{dy}{dz}=\dfrac{dy}{dx}\Big/\dfrac{dz}{dx}$

এক্ষণে, $y=x^{\sin^{-1}x}$ $\quad\therefore\quad \log y=\log x^{\sin^{-1}x}=\sin^{-1}x\log x$

$$\therefore\quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\log x+\frac{\sin^{-1}x}{x}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=y\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\log x+\frac{\sin^{-1}x}{x}\right)$$

$$=x^{\sin^{-1}x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\log x+\frac{\sin^{-1}x}{x}\right)$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{x^{\sin^{-1}x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\log x+\dfrac{\sin^{-1}x}{x}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=x^{\sin^{-1}x}\left(\log x+\sin^{-1}x.\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right).$$

(iii) মনে কর, $y=\sec x$ এবং $z=\tan x$

সুতরাং $\tan x$-এর সাপেক্ষে $\sec x$-এর অন্তরকলজ

$$=\frac{dy}{dz}=\frac{\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{dz}{dx}}=\frac{\dfrac{d}{dx}(\sec x)}{\dfrac{d}{dx}(\tan x)}=\frac{\sec x\tan x}{\sec^2 x}=\frac{\tan x}{\sec x}=\sin x.$$

উদা. 35. যদি $f(x)=\left(\dfrac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$ হয়, তবে দেখাও যে

$$f'(0)=\left(2\log\frac{a}{b}+\frac{b^2-a^2}{ab}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$$ [C. U. 1946]

$$f(x)=\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$$

$$\therefore\quad \log f(x)=\log\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}=(a+b+2x)\log\left(\frac{a+x}{b+x}\right)$$

$$=(a+b+2x)\{\log(a+x)-\log(b+x)\}$$

উভয় পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\frac{1}{f(x)} f'(x)=2\{\log (a+x)-\log (b+x)\}+(a+b+2x)\times\left(\frac{1}{a+x}-\frac{1}{b+x}\right)$$

$$=2 \log \frac{a+x}{b+x}+(a+b+2x)\times\frac{b-a}{(a+x)(b+x)}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\left\{2 \log \frac{a+x}{b+x}+(a+b+2x)\times\frac{b+a}{(a+x)(b+x)}\right\}f(x)$$

এক্ষণে $f(0)=\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$.

$$\therefore \quad f'(0)=\left\{2 \log \frac{a}{b}+(a+b)\times\frac{b-a}{ab}\right\}f(0)$$

$$=\left(2 \log \frac{a}{b}+\frac{b^2-a^2}{ab}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}.$$

উদা. 36. যদি $ax^2+2hxy+by^2=1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{h^2-ab}{(hx+by)^2}$$

$$ax^2+2hxy+by^2=1$$

উভয় পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$2ax+2h\left(x\frac{dy}{dx}+1\right)+2by\frac{dy}{dx}=0.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{ax+hy}{hx+by}.$$

আবার উভয় পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(a+h\frac{dy}{dx}\right)(hx+by)-(ax+hy)\left(h+b\frac{dy}{dx}\right)}{(hx+by)^2}$$

$$=\frac{(ab-h^2)y+(h^2-ab)x\frac{dy}{dx}}{(hx+by)^2}=(h^2-ab)\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{(hx+by)^2}$$

$$=(h^2-ab)\frac{y+x.\frac{ax+hy}{hx+by}}{(hx+by)^2}=(h^2-ab)\frac{y(hx+by)+x(ax+hy)}{(hx+by)^3}$$

$$=(h^2-ab)\frac{ax^2+2hxy+by^2}{(hx+by)^3}=\frac{h^2-ab}{(hx+by)^3}$$

$$[\because \quad ax^2+2hxy+by^2=1]$$

উদা. 37. $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ হইলে দেখাও যে,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\phi'(t)\psi''(t)-\Psi''(t)\phi''(t)}{\{\phi'(t)\}^3}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

$$\therefore\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\right)=\frac{d}{dt}\left\{\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\right\}\frac{dt}{dx}.$$

$$=\frac{\phi'(t)\Psi''(t)-\phi''(t)\Psi'(t)}{\{\phi'(t)\}^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\phi'(t)\Psi''(t)-\phi''(t)\psi'(t)}{\{\phi'(t)\}^2}\cdot\frac{1}{\phi'(t)}=\frac{\phi'(t)\Psi''(t)-\phi''(t)\Psi'(t)}{\{\phi'(t)\}^3}.$$

উদা. 38. প্রমাণ কর যে,

(i) $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{d^2y}{dx^2}\Big/\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$

(ii) $\frac{d^3x}{dy^3}=-\left\{\frac{d^3y}{dx^3}\frac{dy}{dx}-3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right\}\Big/\left(\frac{dy}{dx}\right)^5$

সমাধান ঃ

(i) $\because\quad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$

$$\therefore\quad \frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)\frac{dx}{dy}.$$

$$=-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=-\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$$

(ii) $$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{d}{dy}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)=\frac{d}{dy}\left(-\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}\right)=\frac{d}{dx}\left\{-\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}\right\}\frac{dx}{dy}$$

$$=\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\cdot\frac{d}{dx}\left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^6}\cdot\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$=\frac{-\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\cdot\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^7}$$

$$=\frac{-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left\{\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}-3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right\}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^7}=\frac{-\left\{\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}-3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right\}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^5}$$

উদা. 39. $1+x+x^2+\quad\cdots\quad\cdots\quad+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ সূত্র হইতে $1+2x+3x^2+\quad\cdots\quad\cdots\quad+nx^{n-1}$ শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় কর।

$$1+x+x^2+\quad\cdots\quad\cdots\quad+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

উভয়পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\frac{d}{dx}(1+x+x^2+\quad\cdots\quad+x^n)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)$$

বা, $1+2x+3x^2+\quad\cdots\quad\cdots\quad+nx^{n-1}$

$$=\frac{-(1-x)(n+1)x^n-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{-(n+1)(1-x)x^n+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{-(n+1)(x^n-x^{n+1})+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

উদা. 40. $\sin x=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\quad\cdots\quad\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$ অভেদ হইতে প্রমাণ কর যে :

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\quad\cdots\quad\cdots\quad+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x.$$

$$\sin x=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\quad\cdots\quad\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$$

বা, $\log\sin x=\log\left(2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\quad\cdots\quad\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}\right)$.

বা, $\log \sin x = \log 2^n + \log \cos \frac{x}{2} + \log \cos \frac{x}{2^2} + \cdots$

$$\cdots + \log \cos \frac{x}{2^n} + \log \sin \frac{x}{2^n}$$

উভয়পক্ষের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই

$$\frac{\cos x}{\sin x} = 0 - \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin \frac{x}{2^2}}{\cos \frac{x}{2^2}} \cdot \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\cos \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{\cos \frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{1}{2^n}$$

বা, $\cot x = -\left(\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \tan \frac{x}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n}$

$\therefore \quad \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \tan \frac{x}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - \cot x.$

প্রশ্নমালা IV

1. নিম্নলিখিত বক্রসমূহের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর :—

(i) $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ (ii) $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$

(iii) $x^2 + y^2 = a^2$

2. নিম্নলিখিত বক্রসমূহের 't' বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর :—

(i) $x = a \cos t, y = b \sin t.$ (ii) $x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t.$

3. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ বক্রের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশদ্বয় x_1 ও y_1 হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$ [C. U. 1941]

4. নিম্নলিখিত বক্রসমূহের প্রদত্ত বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর :—

(i) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ $\left[\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)\right.$ বিন্দুতে$\left.\right]$ (ii) $y^2 = 4x$[(1, 2) বিন্দুতে]

(iii) $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ বক্রের (a, b) বিন্দুতে।

5. প্রমাণ কর যে, $y = b.e^{\frac{x}{a}}$ বক্রের যে কোন বিন্দুতে উপস্পর্শক ধ্রুবক এবং উপ-অভিলম্ব হইতেছে $\frac{y^2}{a}$. [Pat. '37 '33]

6. প্রমাণ কর যে, $y=c\dfrac{e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}}{2}$ বক্রের যে কোন বিন্দুতে অভিলম্বের দৈর্ঘ্য ধ্রুবক।

7. দেখাও যে, $by^2=(x+a)^2$ বক্রের উপ-স্পর্শকের বর্গ উপ-অভিলম্বের সহিত সমানুপাতিক। [Pat '32]

8. প্রমাণ কর যে, x^3-x^2-2x, $x=1$ বিন্দুতে ক্ষীয়মাণ এবং $x=2$ বিন্দুতে বর্ধমান।

9. নিম্নলিখিত অপেক্ষক সমূহের x-এর সাপেক্ষে দ্বিমাত্রিক অন্তরকলজ নির্ণয় কর :—

(i) $(2-3x)^3$ (ii) $y=\cos^3 x$

(iii) $y=\dfrac{a-x}{a+x}$ (iv) $x=a\sec\theta,\ y=b\tan\theta$ (প্যারামিটার θ)

(v) $x=at^2,\ y=2at$ (প্যারামিটার t).

10. $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-n^2y=0.$$

11. x^3-3x^2-9x+4 রাশিমালার চরম ও অবম মান নির্ণয় কর।

12. I পরিমাপের তড়িৎ-প্রবাহ একটি গ্যালভানোমিটার দ্বারা মাপিলে, গ্যালভানোমিটারে বিচ্যুতি θ হইলে, $I\propto\tan\theta$. যখন $\theta=45°$, তখন θ মাপিতে 1·4% ত্রুটি হইলে, তড়িৎ-প্রবাহের পরিমাপে ত্রুটির শতকরা হার নির্ণয় কর।

13. একটি 16 সে.মি. বাহু বিশিষ্ট বর্গাকার টিনের টুকরার চারিকোণ হইতে x সে.মি. বাহু বিশিষ্ট বর্গ কাটিয়া লইয়া উহার পার্শ্বগুলি মুড়িয়া একটি উপর খোলা বাক্স তৈয়ারী করা হইয়াছে। ঐ বাক্সের বৃহত্তম আয়তন কত?

14. প্রমাণ কর যে, একটি বৃত্তের মধ্যে অন্তর্লিখিত সমদ্বিবাহুর ত্রিভুজ সমূহের মধ্যে বৃহত্তম ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজটি সমবাহু।

15. কোন্ ধনাত্মক সংখ্যা ও উহার অন্যোন্যকের যোগফল ক্ষুদ্রতম নির্ণয় কর।

16. t সময়ে একটি বস্তুর উচ্চতা h হইলে $h=ut-\frac{1}{2}gt^2$ (u এবং g ধ্রুবক)। t সময়ে কণাটির বেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় কর। কণাটির বৃহত্তম উচ্চতা নির্ণয় কর।

17. কোন বৃত্তের ক্ষেত্রফল সমহারে বৃদ্ধি পাইলে প্রমাণ কর যে, বৃত্তের পরিসীমার বৃদ্ধি বৃত্তের ব্যাসার্ধের সহিত ব্যস্ত-অনুপাতিক। [C. U. 1930]

18. কোন গ্যাসের রুদ্ধতাপ অবস্থায় প্রসারণের সূত্র হইতেছে $PV^{1\cdot4}=$ধ্রুবক

(P এবং V যথাক্রমে গ্যাসের চাপ এবং আয়তন)। যখন গ্যাসের আয়তন 10 ঘন মিটার তখন যদি চাপ প্রতি বর্গ সে. মিটারে 25 কিলোগ্রাম হয়, এবং ঐ সময়ে যদি প্রতি সেকেণ্ডে আয়তন 2 ঘন মিটার বাড়ান হয়, তবে চাপের পরিবর্তনের হার নির্ণয় কর।

19. 7 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ মাপিতে ·1 মি.মি. ত্রুটি হইলে বৃত্তের ক্ষেত্রফলের ত্রুটি নির্ণয় কর। এই ত্রুটির শতকরা হার নির্ণয় কর।

20. একটি সংখ্যার পরিমাপে 5% ত্রুটি হইলে, ঐ সংখ্যার সাধারণ লগারিদম নির্ণয়ে ত্রুটি কত ?

21. অন্তরকলজ নির্ণয় কর :—

(i) $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$ এর $\sin^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$ এর সাপেক্ষে।

(ii) x^8 এর সাপেক্ষে x^6 এর।

22. $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর : $\quad y=\tan^{-1}\dfrac{a+b\cos x}{b+a\cos x}$.

23. $x=e^z$ হইলে দেখাও যে,

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}, \qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}.$$

24. দেখাও যে যদি $x>0$ হয়, তবে

(i) $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x-\dfrac{x^2}{2(1+x)}$.

(ii) $x>\log(1+x)>\dfrac{x}{1+x}$.

25. $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$ হইলে,

প্রমাণ কর যে, (i) $c_1+2c_2+3c_3+\cdots+nc_n=n.2^{n-1}$

(ii) $c_0+2c_1+3c_2+\cdots+(n+1)\,c_n=(n+2).2^{n-1}$

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা—I

1. (i) $x=1$, (ii) $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ যেখানে n একটি অখণ্ড সংখ্যা এবং $x=0$, (iii) $x=2$; 4. (i) না, (ii) না ; 5. না ; 6. 5, 12, 21, 0, 0 ; 7. $\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$; 8. $-\frac{1}{x(x+h)}$; 9. না ; 14. $x=1$.

প্রশ্নমালা—II

1. 4 ; 4. 0 ; 5. 2 ; 6. -1 ; 7. $2\sqrt{a}$; 8. (i) $-\frac{1}{x^2}$, (ii) $2x$; 9. (i) 8, (ii) $\cos\theta$, (iii) 7 ; 10. (i) সীমাস্থ মান নাই, (ii) সীমাস্থ মান নাই ; 11. 0 ; 12. 8 ; 13. (i) 2·1 (ii) $\frac{4}{5}$; 16. 4 ; 17. (i) e^3, (iii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 18. (i) 108, (ii) $\frac{n}{m}\alpha^{n-m}$; (iii) $\frac{5}{8}a^3$; 19. (i) $\frac{\alpha}{\beta}$, (ii) 2 ; 20. (i) 3, (ii) $\frac{7}{2}$, (iii) 7, (iv) $\frac{m}{n}$; 22. (i) e^3, (ii) 0 ; 23. 1 ; 24. (i) 0, (ii) 2, (iii) 1 ; 25. (i) $\frac{c}{a}$, (ii) $\frac{1}{4}$, (iii) $\frac{1}{3}$.

প্রশ্নমালা—III

1. $2x$; 2. $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$; 3. $2\cos 2x$; 4. $3e^{3x}$;
5. $4^x \log_e 4$; 6. $99x^{98}$; 7. $8x^7$; 8. $1{\cdot}9x^{0\cdot9}$
9. $-4\frac{1}{x^5}$; 10. $-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$, 11. $-\frac{2}{(1+x)^2}$;
12. $\frac{3}{2}\sin x\sin 2x$; 13. $\frac{1}{x}\log_{10}e$; 14. $\frac{1}{a}\cot\left(\frac{x}{a}\right)$;
15. $\cos\left(\frac{x}{a}\right)$; 16. $x^x(1+\log x)$;
17. $-\frac{x^2\sin x+2x\cos x}{x^4}$; 18. $\sin x+x\cos x$;
19. $\cos x-x\sin x$; 20. $2x\sin x+x^2\cos x$;
21. $nx^{n-1}\cot x-x^n\operatorname{cosec}^2 x$; 22. $\operatorname{cosec}^2 x-2x\operatorname{cosec}^2 x\cot x$;
24. $\frac{2x\sin x-x^2\cos x}{\sin^2 x}$; 25. $-\frac{1}{(x+2)^2}$;
26. $-\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$; 27. $-\frac{21x}{(tx^2+m)^2}$;

28. $300(x^3+1)^{99}.x^2$; 29. $-2\sin 2x$;

30. $4\sin^3 x\cos x$; 31. $-2\cot x\operatorname{cosec}^2 x$;

32. $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$; 33. $2(a\tan x\sec^2 x-b\cot x\operatorname{cosec}^2 x)$;

34. $\frac{\sec^2 x}{\tan x}$; 35. $\frac{\phi'(x)}{\sqrt{1-\{\phi(x)\}^2}}$; 36. $\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$;

37. $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$; 38. $\frac{x}{1+x^2}(\tan^{-1}x)$; 39. $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$;

40. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 41. $\frac{3}{1+x^2}$; 42. $\frac{-e^{\sqrt{\cot x}}}{2\sin^2 x\sqrt{\cot x}}$;

43. $\frac{x^2(3x^4+20x^2+36)}{(x^2+4)^{\frac{1}{2}}(x^2+3)^{\frac{3}{2}}}$; 44. $3a(ax+b)^2\tan(ax+b)^3$;

45. $\frac{\log\sin x+x\cot x\log x}{2x\sqrt{(1+\log x\log\sin x)}}$; 46. $\frac{2x(6x^2-y)}{x^2-6y^2}$;

47. $\left(-\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}$; 48. $\frac{x^2-ay}{ax-y^2}$; 49. $\frac{y^2}{x(1-y\log x)}$;

50. $-\frac{y^2(1-\log x)}{x^2(1-\log y)}$; 51. $\frac{y(2x^2-1)}{x(1-2y^2)}$; 52. $\frac{y^2}{x(1-y\log x)}$;

53. $-\left(\frac{b}{a}\right)\cot\theta$; 54. $\frac{1}{m}$; 55. $-\tan\theta$.

প্রশ্নমালা—IV

1. (i) $x(x_1^2-ay_1)+y(y_1^2-ax_1)=ax_1y_1$,

(ii) $\frac{xx_1^{m-1}}{a^m}+\frac{yy_1^{m-1}}{b^m}=1$, (iii) $xx_1+yy_1=a^2$;

2. (i) $\frac{x}{a}\cos t+\frac{y}{a}\sin t=1$, (ii) $bx\sin t+ay\cos t=ab\sin t\cos t$,

4. (i) $3\sqrt{3}\,x+2y=12$, (ii) $x+y=3$, (iii) $ax-by=a^2-b^2$;

9. (i) $54(2-3x)$, (ii) $-3\cos x(\cos^2 x-2\sin^2 x)$,

(iii) $\frac{4a}{(a+x)^3}$, (iv) $-\frac{b}{a}\cot^3\theta$, (v) $-\frac{1}{2at^3}$;

11. চরমমান 9 এবং অবমমান -23. 12. 2·2% ;

13. $\frac{8192}{27}$ বর্গ সে.মি. ; 15. 1 ; 16. $u-gt$, $-g$, $\frac{u^2}{2g}$;

18. 7 কিগ্রা./বর্গ সে.মি. কমিবে ; 19. 44 বর্গ মি.মি 20. 0·02 (প্রায়)

21. (i) 1, (ii) $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2}$; 22. $\frac{(a^2-b^2)\sin x}{(a^2+b^2)(1+\cos^2 x)+4ab\cos x}$.

সমাকলনবিদ্যা

(Integral Calculus)

১ অনিশ্চিত সমাকল

(Indefinite Integral)

1·1. নিম্নে কতিপয় মৌলিক সমাকলের তালিকা প্রদত্ত হইল :

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ (n \neq -1)$ (ii) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$

(iii) $\int e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m}$; $\int e^x dx = e^x$.

(iv) $\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\log_e a}$, $a > 0$.

(v) $\int \sin mx\ dx = -\frac{\cos mx}{m}$; $\int \sin x\ dx = -\cos x$.

(vi) $\int \cos mx\ dx = \frac{\sin mx}{m}$; $\int \cos x\ dx = \sin x$

(vii) $\int \sec^2 mx\ dx = \frac{\tan mx}{m}$; $\int \sec^2 x\ dx = \tan x$.

(viii) $\int \operatorname{cosec}^2 mx\ dx = -\frac{\cot mx}{m}$; $\int \operatorname{cosec}^2 x\ dx = -\cot x$.

(ix) $\int \sec mx \tan mx\ dx = \frac{\sec mx}{m}$; $\int \sec x \tan x\ dx = \sec x$.

(x) $\int \operatorname{cosec} mx \cot mx\ dx = \frac{-\operatorname{cosec} mx}{m}$;

$\int \operatorname{cosec} x \cot x\ dx = \operatorname{cosec} x$

সমাকলন অন্তরকলনের বিপরীত প্রক্রিয়া। সুতরাং, যদি $\frac{d}{dx}[f(x)] = F(x)$ হয়, তবে $\int F(x) dx = f(x)$. যেহেতু কোনও ধ্রুবক c-এর অন্তরকলজ শূন্য হয়, সুতরাং $\frac{d}{dx}[f(x)+c] = F(x)+0$. এবং ইহা হইতে আমরা পাই $\int F(x)\ dx = f(x)+c$, সুতরাং কোনও অপেক্ষকের সমাকল নির্ণয় করিতে হইলে সমাকলন করিবার পর উহার সহিত একটি স্বেচ্ছ ধ্রুবক যোগ করিতে হইবে।

সরল উদাহরণসমূহ

উদা. 1. $\int x^{15}\ dx = \frac{x^{15+1}}{15+1} + c = \frac{x^{16}}{16} + c$.

উদা. 2. $\int x^{-\frac{4}{3}}\,dx=\frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1}+c=\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}}+c=-3x^{-\frac{1}{3}}+c.$

উদা. 3. $\int x^4\,dx=\frac{x^{4+1}}{4+1}+c=\frac{x^5}{5}+c.$

উদা. 4. $\int \cos 8x\,dx=\frac{\sin 8x}{8}+c.$

উদা. 5. $\int \cot 5x \operatorname{cosec} 5x\,dx=-\frac{\operatorname{cosec} 5x}{5}+c.$

উপরোক্ত উদাহরণসমূহে লক্ষ্য কর লব্ধ সমাকলগুলির অন্তরকলন প্রদত্ত অপেক্ষকগুলির সমান। যেমন,

উদা. 1'. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{16}}{16}+c\right)=\frac{16.\,x^{15}}{16}+0=x^{15}$

উদা. 2'. $\frac{d}{dx}\left(-3x^{-\frac{1}{3}}+c\right)=-3.(-\frac{1}{3})x^{-\frac{1}{3}-1}+0=x^{-\frac{4}{3}}.$

উদা. 3'. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{5}+c\right)=\frac{5x^4}{5}+0=x^4.$

উদা. 4'. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin 8x}{8}+c\right)=\frac{8\cos 8x}{8}+0=\cos 8x$

উদা. 5'. $\frac{d}{dx}\left(-\frac{\operatorname{cosec} 5x}{5}+c\right)=\frac{+5\operatorname{cosec} 5x\cot 5x}{5}+0$

$=\operatorname{cosec} 5x \cot 5x.$

1·2. নিম্নলিখিত প্রতিপাদ্যগুলি সর্বদা মনে রাখিবেঃ

প্রতি. 1. দুইটি অপেক্ষকের অন্তরকলজ একই হইলে অপেক্ষক দুইটির তফাৎ অধিকপক্ষে একটি ধ্রুবক হইবে।

প্রতি. 2. একটি অপেক্ষকের দুই অনির্দিষ্ট সমাকলের তফাৎ একটি ধ্রুবক।

প্রতি. 3. নির্দিষ্ট সংখ্যক অপেক্ষকের বীজগাণিতিক যোগফলের সমাকল উহাদের ভিন্ন ভিন্ন সমাকলগুলির বীজগাণিতিক যোগফলের সমান।

প্রতি. 4. কোনও অপেক্ষকের সহিত কোন নির্দিষ্ট ধ্রুবকের গুণফলের সমাকলন উক্ত অপেক্ষকের সমাকলনের সহিত ঐ নির্দিষ্ট ধ্রুবকের গুণফলের সমান।

উদাহরণমালা I-A

উদা. 1. $\int x^5\,dx=\frac{x^{5+1}}{5+1}+c=\frac{x^6}{6}+c.$

উদা. 2. $\int \frac{1}{x^3}dx=\int x^{-3}\,dx=\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+c=-\frac{1}{2x^2}+c.$

উদা. 3. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{2}.\ \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \sqrt{x} + c.$

উদা. 4. $\int 7x^{\frac{5}{2}}\, dx = 7\int x^{\frac{5}{2}}\, dx = 7.\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + c.$

$$= 7.\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = 2x^{\frac{7}{2}} + c.$$

উদা. 5. $\int (ax^2 + bx + c)dx = \int ax^2 dx + \int bx dx + \int c dx.$

$= a\int x^2 dx + b\int x dx + c\int 1.dx$

$= a.\ \frac{x^{2+1}}{2+1} + b\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} + c.\ \frac{x^{0+1}}{0+1} + k,$

[$\because\ 1 = x^0$; k যে কোন একটি ধ্রুবক]

$= \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + k$

দ্রষ্টব্য ঃ প্রত্যেকটি সমাকলনের জন্য একটি করিয়া স্বেচ্ছ ধ্রুবক হইবে। ঐ স্বেচ্ছ ধ্রুবক তিনটির সমষ্টি একযোগে একটিমাত্র স্বেচ্ছ ধ্রুবক k ধরা হইল।

উদা. 6. $\int 5e^{5x}\, dx = 5\int e^{5x}\, dx = 5.\ \frac{e^{5x}}{5} + c = e^{5x} + c.$

উদা. 7. $\int 5e^{x \log a}\, dx = 5\int e^{x \log a}\, dx = 5.\ \frac{e^{x \log a}}{\log a} + c.$

[এখানে এই উদাহরণে $e^{x \log a} = x^a$

সুতরাং $\int 5e^{x \log a}\, dx = 5\int e^{\log a^x}\, dx = 5\int a^x\, dx = 5.\ \frac{a^x}{\log a}.$]

উদা. 8. $\int \frac{dx}{e^{6x}} = \int e^{-6x}\, dx = \frac{e^{-6x}}{-6} + c = \frac{1}{-6e^{6x}} + c$

উদা. 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}} = \int \left(e^x\right)^{-\frac{1}{2}} dx = \int e^{-\frac{x}{2}}\, dx = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -\frac{2}{\sqrt{e^x}} + c.$

উদা. 10. $\int 10^x\, dx = \frac{10^x}{\log 10} + c.$

উদা. 11. $\int \cot^2 x\, dx = \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)dx$

$= \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx - \int dx = -\cot x - x + c.$

উদা. 12. $\int(1+e^{2x})dx=\int dx+\int e^{2x}\ dx=x+\dfrac{e^{2x}}{2}+c.$

উদা. 13. $\int 2\cos 6x \cos 4x\ dx=\int(\cos 10x+\cos 2x)\ dx$

$$=\int\cos 10x\ dx+\int\cos 2x\ dx=\frac{\sin 10x}{10}+\frac{\sin 2x}{2}+c.$$

উদা. 14. $\int\cos^3 dx=\int\frac{1}{4}(\cos x+\cos 3x)dx$

$$=\tfrac{1}{4}\int\cos x\ dx+\tfrac{1}{4}\int\cos 3x\ dx$$

$$=\tfrac{1}{4}\sin x+\tfrac{1}{4}.\frac{\sin 3x}{3}+c=\frac{\sin x}{4}+\frac{\sin 3x}{12}+c.$$

উদা. 15. $\int\sec x(\sec x-\tan x)dx$

$$=\int\sec^2 x\ dx-\int\sec x\tan x\ dx=\tan x-\sec x+c.$$

উদাহরণমালা I-B

সমাকলন কর ঃ

1. (i) $\int(2x-1)(x-2)dx,$ (ii) $\int\sqrt[3]{x}\left(x^6-\dfrac{2}{x^2}\right)dx$

2. (i) $\int\dfrac{2x^2-14x+24}{x-3}\ dx,$ (ii) $\int\dfrac{u^2-9u+20}{u-4}du$

3. (i) $\int\dfrac{(e^x+1)^2}{2x}dx,$ (ii) $\int\dfrac{e^{6x}-1}{e^{2x}-1}dx$

(iii) $\int\dfrac{3e^{2x}+3e^{4x}}{e^x+e^{-x}}dx.$

4. (i) $\int\cos 4x\cos 5x\ dx,$ (ii) $\int\sin mx\cos nx dx$

(iii) $\int\dfrac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}dx.$

5. (i) $\int\dfrac{(a^x+1)^2}{a^x}dx,$ (ii) $\int\dfrac{a^{3x}+a^x}{a^x+a^{-x}}dx$

6. $\int\sin x^\circ dx.$

7. (i) $\int\dfrac{dx}{1+\cos 2x},$ (ii) $\int\dfrac{dx}{1+\sin x},$ (iii) $\int\dfrac{\tan x}{\cot x}dx.$

8. $\int(\sec^2 mx+\operatorname{cosec}^2 mx)dx.$

9. (i) $\int\sqrt{1+\sin 2x}\ dx,$ (ii) $\int\sqrt{1+\cos 2x}\ dx.$

10. (i) $\int\sin^4 x\ dx,$ (ii) $\int\dfrac{\cos 2x-\cos 2\theta}{\cos x-\cos\theta}dx,\ \theta=$ধ্রুবক]

সমাধান ঃ

উদা. 1. (i) $\int(2x-1)(x-2)dx=\int(2x^2-5x+2)dx$

$$=2.\frac{x^3}{3}-5.\frac{x^2}{2}+2x+c.$$

(ii) $\int\sqrt[3]{x}\left(x^6-\frac{2}{x^2}\right)dx=\int\left(x^{\frac{19}{3}}-2.x^{-\frac{5}{3}}\right)dx$

$$=\frac{x^{\frac{22}{3}}}{\frac{22}{3}}-2.\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}}+c=\frac{3}{22}x^{\frac{22}{3}}+3x^{-\frac{2}{3}}+c.$$

উদা. 2. (i) $\int\frac{2x^2-14x+24}{x-3}\,dx$

$$=\int\frac{2(x^2-7x+12)}{x-3}dx=\int\frac{2(x-3)(x-4)}{x-3}dx$$

$$=2\int(x-4)dx=2.\left(\frac{x^2}{2}-4x\right)+c=2x^2-8x+c.$$

(ii) $\int\frac{u^2-9u+20}{u-4}du=\int\frac{(u-4)(u-5)}{u-4}du$

$$=\int(u-5)du=\frac{u^2}{2}-5u+c.$$

উদা. 3. (i) $\int\frac{(e^x+1)^2}{e^{2x}}dx$

$$=\int\frac{e^{2x}+2e^x+1}{e^{2x}}dx=\int(1+2e^{-x}+e^{-2x})dx$$

$$=x+2.\frac{e^{-x}}{-1}+\frac{e^{-2x}}{-2}+c=x-\frac{2}{e^x}-\frac{1}{2e^{2x}}+c.$$

(ii) $\int\frac{e^{6x}-1}{e^{2x}-1}dx=\int\frac{(e^{2x}-1)(e^{4x}+e^{2x}+1)}{(e^{2x}-1)}dx=\int(e^{4x}+e^{2x}+1)dx$

$$=\frac{e^{4x}}{4}+\frac{e^{2x}}{2}+x+c.$$

(iii) $\int\frac{3e^{2x}+3e^{4x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{3e^{2x}(e^{2x}+1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)}\,dx=\int3\frac{e^{2x}}{e^{-x}}dx=3\int e^{3x}dx$

$$=3.\frac{e^{3x}}{3}+c=e^{3x}+c.$$

উদা. 4. (i) $\int\cos 4x\cos 5x\,dx$

$$=\tfrac{1}{2}\int2\cos 4x\cos 5x dx=\tfrac{1}{2}\int(\cos 9x+\cos x)dx$$

$$={}^1.\left(\frac{\sin 9x}{9}+\cos x\right)+c=\frac{\sin 9x}{18}+\frac{\cos x}{2}+c.$$

(ii) $\int \sin mx \cos nx\, dx$

$$=\tfrac{1}{2}\int 2 \sin mx \cos nx\, dx=\tfrac{1}{2}\int[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]dx$$

$$=\tfrac{1}{2}\frac{-\cos(m+n)x}{m+n}+\tfrac{1}{2}\frac{-\cos(m-n)x}{m-n}+c$$

$$=-\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}-\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}+c.$$

(iii) $\int\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2 \sin x \cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}dx=\int(\sin x+\cos x)dx$$

$$=-\cos x+\sin x+c.$$

উদা. 5. (i) $\int\frac{(a^x+1)^2}{a^x}dx=\int\frac{a^{2x}+2a^x+1}{a^x}dx=\int(a^x+2+a^{-x})dx$

$$=\frac{a^x}{\log a}+2x+\frac{a^{-x}}{-\log a}+c.$$

(ii) $\int\frac{a^{3x}+a^x}{a^x+a^{-x}}dx=\int\frac{a^x(a^{2x}+1)}{a^{-x}(a^{2x}+1)}dx=\int a^{2x}dx=\frac{a^{2x}}{2 \log a}+c.$

উদা. 6. $\int\sin x^\circ\, dx=\int\sin\frac{\pi x}{180}dx$ $\quad [\because \pi^c=180^\circ]$

$$=-\frac{\cos\frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi}{180}}+c=-\frac{180}{\pi}\cos x^\circ+c.$$

উদা. 7. (i) $\int\frac{dx}{1+\cos 2x}=\int\frac{dx}{2 \cos^2 x}=\tfrac{1}{2}\int\sec^2 x\, dx=\tfrac{1}{2}\tan x+c.$

(ii) $\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$

$$=\int(\sec^2 x-\sec x\tan x)dx=\tan x-\sec x+c.$$

(iii) $\int\frac{\tan x}{\cot x}dx=\int\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x}}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$

$$=\int(\sec^2 x-1)dx=\tan x-x+c.$$

উদা. 8. $\int(\sec^2 mx+\operatorname{cosec}^2 mx)dx=\int\sec^2 mx\,dx+\int\operatorname{cosec}^2 mx\,dx$

$$=\frac{\tan mx}{m}-\frac{\cot mx}{m}+c.$$

উদা. 9. (i) $\int\sqrt{1+\sin 2x}\,dx$

$$=\int\sqrt{(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x)}\,dx$$

$$=\int\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}\,dx.$$

$$=\int(\sin x+\cos x)\,dx=-\cos x+\sin x+c.$$

(ii) $\int\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$

$$=\int\sqrt{2\cos^2 x}\,dx=\sqrt{2}\int\cos x\,dx=\sqrt{2}\sin x+c.$$

উদা. 10. (i) $\int\sin^4 dx=\int\{\tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\}^2\,dx$

$$=\int\tfrac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$$

$$=\int\tfrac{1}{4}\{1-2\cos 2x+\tfrac{1}{2}(1+\cos 4x)\}dx$$

$$=\int\tfrac{1}{4}(1-2\cos 2x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 4x)dx$$

$$=\tfrac{3}{8}\int dx-\tfrac{1}{2}\int\cos 2x\,dx-\tfrac{1}{8}\int\cos 4x\,dx$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+c.$$

(ii) $\displaystyle\int\frac{\cos 2x-\cos 2\theta}{\cos x-\cos\theta}.dx=\int\frac{2\cos^2 x-1-(2\cos^2\theta-1)}{\cos x-\cos\theta}.dx$

$$=\int\frac{2(\cos x+\cos\theta)(\cos x-\cos\theta)}{(\cos x-\cos\theta)}dx$$

$$=\int 2(\cos x+\cos\theta)dx=2\int\cos x\,dx+2\cos\theta\int dx$$

$$=2\sin x+2x\cos\theta+c.$$

উদাহরণমালা I-C

সমাকলন কর :

1. (i) $\int\cot^2 x\,dx$, (ii) $\displaystyle\int\frac{1+\tan^2 x}{1+\cot^2 x}dx$

2. (i) $\displaystyle\int\frac{e^{4x}+e^{6x}}{e^x+e^{-x}}dx$, (ii) $\displaystyle\int\frac{e^{5\log x}-e^{4\log x}}{e^{3\log x}-e^{2\log x}}dx.$

3. $\displaystyle\int\frac{8^{1+x}-4^{1-x}}{2^x}\,dx.$ 4. $\displaystyle\int\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}\,dx.$

5. (i) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$, (ii) $\int \sin^2 x \cos 2x \, dx$

(ii) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \, dx$.

সমাধান :

উদা. 1. (i) $\int \cot^2 x \, dx = \int (\text{cosec}^2 x - 1) dx = -\cot x - x + c$.

(ii) $\int \frac{1+\tan^2 x}{1+\cot^2 x} dx = \int \frac{1+\tan^2 x}{1+\frac{1}{\tan^2 x}} dx = \int \frac{(1+\tan^2 x)}{(\tan^2 x+1)} \tan^2 x \, dx$

$= \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + c$.

উদা. 2. (i) $\int \frac{e^{4x}+e^{6x}}{e^x+e^{-x}} dx = \int \frac{e^{4x}(e^{2x}+1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} dx = \int e^{5x} dx = \frac{e^{5x}}{5} + c$.

(ii) $\int \frac{e^{5\log x} - e^{4\log x}}{e^{3\log x} - e^{2\log x}} dx = \int \frac{x^5 - x^4}{x^3 - x^2} dx$

$= \int \frac{x^4(x-1)}{x^2(x-1)} dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$.

উদা. 3. $\int \frac{8^{1+x} - 4^{1-x}}{2^x} dx = \int \frac{8.2^{3x} - 4.2^{-2x}}{2^x} dx$

$= \int \left(8.2^{2x} - 4.2^{-3x}\right) dx = 8.\frac{2^{2x}}{2\log 2} - 4.\frac{2^{-3x}}{-3\log 2} + c$

$= \frac{4.2^{2x}}{\log 2} + \frac{4}{3\log 2} 2^{-3x} + c$.

উদা. 4. $\int \frac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x} dx = \int \frac{\cos x - (2\cos^2 x - 1)}{1-\cos x} dx$

$= \int \frac{1+\cos x - 2\cos^2 x}{1-\cos x} dx = \int \frac{(1-\cos x)(1+2\cos x)}{1-\cos x} dx$

$= \int (1+2\cos x) dx = x + 2\sin x + c$.

উদা. 5. (i) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4}\int 4\sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \, dx$.

$= \frac{1}{8}\int 2\sin^2 2x \, dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x) dx$

$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + c$.

(ii) $\int \sin^2 x \cos 2x \, dx$

$= \frac{1}{2}\int 2\sin^2 x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\cos 2x \, dx$

$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \frac{1}{2}.2\cos^2 2x) dx = \frac{1}{2}\int [\cos 2x - \frac{1}{2}(1+\cos 4x)] dx$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8}\right) + c$.

(iii) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \int (\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x) dx$

$= \tan x - \cot x + c.$

প্রশ্নমালা I

সমাকলন কর :

1. (i) $\int (x^2 + e^x) dx$, (ii) $\int (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})^2 dx$.

2. (i) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$, (ii) $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$

3. $\int e^{n \log x} dx$.

4. (i) $\int \frac{(1+x)^3}{x} dx$ (ii) $\int \frac{1-x^8}{1-x} . dx$

5. (i) $\int \frac{\operatorname{cosec} x + \tan^2 x + \sin^2 x}{\sin x} dx$

(ii) $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$, (ii) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx$.

6. (i) $\int \frac{2 \sin^3 x + 3 \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$, (ii) $\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} (1 - \sin 2x) dx$.

7. (i) $\int \frac{\sec 2x - 1}{\sec 2x + 1} dx$, (ii) $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$.

8. (i) $\int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx$,

(ii) $\int \sin mx \sin nx \sin px \, dx$.

২

প্রতিস্থাপন প্রক্রিয়ায় সমাকলন

(Integration by substitution)

2.1. চলের পরিবর্তনের সাহায্যে অনেক রাশির সমাকলন সহজে নির্ণয় করা যায়। মনেকর, $\int f(x)dx$ সমাকলন করিতে হইবে। ধর, $x=\phi(z)$।

সুতরাং $dx=\phi'(z)dz$.

এখন, $\int f(x)dx=\int f[\phi(x)]\phi'(z)dz$.

এখানে, কয়েকটি আদর্শ সমাকলের উল্লেখ করা হইল। এগুলি সর্বদা মনে রাখিতে হইবে।

(i) $\int[f(x)]^n f'(x)dx=\dfrac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$ (ii) $\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|$

(iii) $\int\tan x\,dx=\log|\sec x|$ (iv) $\int\cot x\,dx=\log|\sin x|$

(v) $\int\sec x\,dx=\log\left|\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\right|=\log|\sec x+\tan x|$

(vi) $\int\operatorname{cosec} x\,dx=\log\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|=\log|\operatorname{cosec} x-\cot x|$

উদাহরণমালা II-A

উদা. 1. $\int\dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx.$

মনেকর, $ax^2+bx+c=z.$ $\therefore\ (2ax+b)dx=dz.$

$$\therefore\ \int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{dz}{z}=\log|z|+k$$
$$=\log|ax^2+bx+c|+k.$$

উদা. 2. $\int x(x^2+1)^3dx$

মনেকর, $x^2+1=z.$ $\therefore\ 2xdx=dz.$ বা, $xdx=\dfrac{dz}{2}$

$$\therefore\ \int x(x^2+1)^3dx=\int z^3.\frac{dz}{2}.\ =\frac{1}{2}.\frac{z^4}{4}+c=\frac{z^4}{8}+c=\frac{(x^2+1)^4}{8}+c.$$

উদা. 3. $\int 3z\sqrt{2z^2+5}\,dz.$

মনেকর, $2z^2+5=x.$ $\therefore\ 4z.\,dz=dx,$

$$\therefore\ \int 3z\sqrt{2z^2+5}\,dz=\int 3\sqrt{x}\frac{dx}{4}=\frac{3}{4}\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{3}{4}.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\tfrac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}+c.$$

উদা. 4. $\int x^3 . \sqrt[3]{x^4+a^4}\, dx.$

মনেকর, $x^4+a^4=t. \quad \therefore \quad 4x^3\, dx=dt.$

$\therefore \quad \int x^3 \sqrt[3]{x^4+a^3}\ dx=\int \sqrt[3]{t}\frac{dt}{4}$

$=\frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{3}}\, dt=\frac{1}{4}.\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+c=3\, t^{\frac{4}{3}}+c. \quad =3\,(x^4+a^4)^{\frac{4}{3}}+c.$

উদা. 5. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx.$

মনেকর, $e^x+e^{-x}=z. \quad \therefore \quad (e^x-e^{-x})dx=dz.$

$\therefore \quad \int \frac{e^x-e^-}{e^x+e^{-x}}\ dx=\int \frac{dz}{z}=\log\ |z|+c. \quad =\log|e^x+e^{-x}|+c.$

উদা. 6. $\int \frac{4x^3}{1+x^4}dx.$

মনেকর, $1+x^4=t. \quad \therefore \quad 4x^3dx=dt.$

$\therefore \quad \int \frac{4x^3dx}{1+x^4}=\int \frac{dt}{t}=\log|t|+c. \quad =\log|1+x^4|+c.$

উদা. 7. $I=\int (3t^2-5t+7)^m\,(6t-5)dt.$

মনেকর, $3t^2-5t+7=u. \quad \therefore \quad (6t-5)dt=du.$

$\therefore \quad I=\int (3t^2-5t+7)^m(6t-5)dt.$

$= \int u^m du=\frac{u^{m+1}}{m+1}+c. \quad =\frac{(3t^2-5t+7)^{m+1}}{m+1}+c.$

উদা. 8. $I=\int \frac{\cot x\ dx}{\log\,(\sin x)}$

মনেকর, $z=\log \sin x. \quad \therefore \quad dz=\frac{\cos x}{\sin x}dx=\cot x\ dx.$

$\therefore \quad I=\int \frac{dz}{z}=\log|z|+c. \quad =\log|\log \sin\ x|+c.$

উদা. 9. $I=\int \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}dx.$

মনেকর, $1+\tan x=t. \quad \therefore \quad \sec^2 x\ dx=dt.$

$\therefore \quad I=\int \frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+c=-\frac{1}{1+\tan\ x}+c.$

(iv) $I=\int(\tan x-x)\tan^2 x\,dx$

মনে কর, $\tan x-x=z \quad \therefore \quad (\sec^2 x-1)dx=dz$

বা, $\tan^2 x\,dx=dz$

$$\therefore \quad I=\int z\,dz=\frac{z^2}{2}+c=\frac{(\tan x-x)^2}{2}+c.$$

উদা. 3. (i) $I=\int\frac{\sec^2 x}{1+\tan x}dx$

মনে কর, $1+\tan x=z \quad \therefore \quad \sec^2 x\,dx=dz$

$$\therefore \quad I=\int\frac{dz}{z}=\log|z|+c=\log|(1+\tan x)|+c.$$

(ii) $I=\frac{\operatorname{cosec}^2 x}{(1+\cot x)^2}dx.$

মনে কর, $1+\cot x=z \quad \therefore \quad -\operatorname{cosec}^2 x\,dx=dz$

$$\therefore \quad I=\int\frac{-dz}{z^2}=\frac{1}{z}+c=\frac{1}{(1+\cot x)}+c.$$

উদা. 4. (i) $I=\frac{\cot x\,dx}{\log\sin x}$

মনে কর, $\log\sin x=z \quad \therefore \quad \frac{\cos x}{\sin x}dx=dz.$

$$\therefore \quad I=\int\frac{dz}{z}=\log|z|+c=\log|\log\sin x|+c.$$

(ii) $I=\int\frac{\tan x\,dx}{\log\sec x}$

মনে কর, $\log\sec x=z; \quad \therefore \quad \frac{\sec x\tan x}{\sec x}dx=dz$

$$\therefore \quad I=\int\frac{dz}{z}=\log|z|+c=\log|\log\sec x|+c.$$

(iii) $I=\int\frac{\sec x\operatorname{cosec} x}{\log\tan x}dx$

মনে কর $\log\tan x=z; \quad \frac{\sec^2 x}{\tan x}dx=dz$

বা, $\sec x\operatorname{cosec} x\,dx=dz$

$$\therefore \quad I=\int\frac{dz}{z}=\log|z|+c=\log|\log\tan x|+c.$$

(iv) $I=\int\frac{\sin x+x\cos x}{x\sin x}dx$

মনে কর, $x\sin x=z \quad \therefore \quad (\sin x+x\cos x)\,dx=dz$

$$\therefore \quad I=\int\frac{dz}{z}=\log z+c=\log(x\sin x)+c.$$

উদা. 5. (i) $I=\int\frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x\cos x}\,dx$

মনে কর, $\tan x=z$ $\therefore$ $\sec^2 x\,dx=dz$

এখন, $I=\int\frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x\cos x}dx=\int\frac{\sqrt{\tan x}\sec^2 x}{\sin x\cos x\sec^2 x}dx$

$$=\int\frac{\sqrt{\tan x}\sec^2 x}{\tan x}dx=\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{z}+c=2\sqrt{\tan x}+c.$$

(ii) $I=\int\sqrt{\frac{\sin x}{\cos^5 x}}dx=\int\frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\cos^4 x}}\,dx=\int\sqrt{\tan x}\sec^2 x\,dx$

মনে কর, $\tan x=z$ $\therefore$ $\sec^2 x dx=dz$

$\therefore$ $I=\int\sqrt{z}\,dz=\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}\tan^{\frac{3}{2}}x+c.$

(iii) $I=\int\frac{1+\cos x}{\sqrt[3]{x+\sin x}}dx.$

মনে কর, $x+\sin x=z$ $\therefore$ $(1+\cos x)\,dx=dz$

$\therefore$ $I=\int\frac{dz}{\sqrt[3]{z}}=\frac{3}{2}z^{\frac{2}{3}}+c=\frac{3}{2}(x+\sin x)^{\frac{2}{3}}+c.$

(iv) $I=\int\frac{\cos x\,dx}{(a+b\sin x)^2}$

মনে কর, $a+b\sin x=z$ $\therefore$ $b\cos x\,dx=dz$

$\therefore$ $I=\frac{1}{b}\int\frac{dz}{z^2}=-\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{z}+c=-\frac{1}{b(a+b\sin x)}+c.$

উদা. 6. (i) $I=\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\tan^{-1}x+a}}$

মনে কর, $\tan^{-1}x+a=z$ $\therefore$ $\frac{1}{1+x^2}dx=dz$

$\therefore$ $I=\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{z}+c=2\sqrt{\tan^{-1}x+a}+c$

(ii) $I=\int\frac{\sec^4 x}{\sqrt{\tan x}}dx=\int\frac{\sec^2 x\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}dx$

মনে কর, $\tan x=z$ $\sec^2 x\,dx=dz$

$\therefore$ $I=\int\frac{(1+z^2)dz}{\sqrt{z}}=\int\left(\frac{1}{\sqrt{z}}+z\sqrt{z}\right)dz$

$$=2\sqrt{z}+\frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}}+c=2(\tan x)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{5}(\tan x)^{\frac{5}{2}}+c.$$

উদা. 7. (i) $I \int \frac{\sec x\, dx}{\log(\tan x+\sec x)}$

মনে কর, $\log(\tan x+\sec x)=z$

$\therefore \frac{\sec^2 x+\sec x \tan x}{\tan x+\sec x}.dx=dz$ বা, $\frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{(\sec x+\tan x)}dx=dz$

$\therefore I=\int\frac{dz}{z}=\log|z|+c=\log|\log(\tan x+\sec x)|+c.$

(ii) $I=\int\frac{\sin 2x}{a \sin^2 x+b \cos^2 x}dx$

মনে কর, $a \sin^2 x+b \cos^2 x=z$

বা, $(2a \sin x \cos x-2b \cos x \sin x)dx=dz$

বা, $(a-b)2 \sin x \cos x\, dx=dz$

$\therefore \sin 2x\, dx=\frac{dz}{a-b}$. $\therefore I=\frac{1}{a-b}\int\frac{dz}{z}$

$=\frac{1}{a-b}\log|z|+c=\frac{1}{a-b}\log|(a \sin^2 x+b \cos^2 x)|+c.$

উদা. 8 (i) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+x}=\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

মনে কর, $1+\sqrt{x}=z$ $\therefore \frac{dx}{2\sqrt{x}}=dz$

$\therefore I=2\int\frac{dz}{z}=2\log|z|+c=2\log|(1+\sqrt{x})|+c.$

(ii) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\int\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{(x+1)-(x-1)}dx$

$=\frac{1}{2}\int(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})dx.$

$=\frac{1}{2}\int\sqrt{x+1}\,dx+\frac{1}{2}\int\sqrt{x-1}\,dx=\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}I_2.$

এখন, $I_1=\int\sqrt{x+1}\,dx$

মনে কর, $x+1=z$, $\therefore dx=dz$

$\therefore I_1=\int\sqrt{z}dz=\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}+c_1$

$I_2=\int\sqrt{x-1}\,dx$, মনে কর, $x-1=z'$ $\therefore dx=dz'$

$\therefore I_2=\int\sqrt{z'}dz'=\frac{2}{3}z'^{\frac{3}{2}}+c_2$

$\therefore I=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}+c_1+\frac{1}{2}.\frac{2}{3}z'^{\frac{3}{2}}+c_2=\frac{1}{3}z^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}z'^{\frac{3}{2}}+c$

$=\frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+c.$

(iii) $I=\int x\sqrt[3]{x+k}\,dx$

মনে কর, $x+k=z^3 \quad \therefore \quad dx=3z^2dz$

$$\therefore \quad I=\int(z^3-k)z.3z^2dz=3\int(z^6-kz^3)dz$$

$$=3.\left(\frac{z^7}{7}-k\frac{z^4}{4}\right)+c=3\left[\frac{(\sqrt[3]{x+k})^7}{7}-\frac{k(\sqrt[3]{x+k})^4}{4}\right]+c$$

$$=\tfrac{3}{7}(x+k)^{\frac{7}{3}}-\tfrac{3}{4}k(x+k)^{\frac{4}{3}}$$

(iv) $I=\int\frac{\tan\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

মনে কর, $\tan\sqrt{x}=z \qquad \frac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx=dz$

$$\therefore \quad I=2\int z\,dz=z^2+c=\tan^2\sqrt{x}+c.$$

বিঃ দ্রঃ উপরোক্ত সমাকলনগুলিকে I দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে।

2·2. কয়েকটি আদর্শ আকার:

$$\frac{1}{x^2-a^2},\ \frac{1}{x^2+a^2},\ \frac{1}{a^2-x^2} \text{ এবং } \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}},\ \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}},\ \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

এর x-এর সাপেক্ষে সমাকলন নিম্নে সূত্রাকারে প্রদত্ত হইল।

(i) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|,\ |x|>|a|$

(ii) $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}.$

(iii) $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|;\ |x|<|a|$

(iv) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$

(v) $\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$

(vi) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a},\ |x|<|a|.$

উদাহরণমালা II-A

উদা. 1. $\int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}$

মনে কর, $bx=z \quad \therefore \quad bdx=dz$

$$\therefore \quad \int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{b}\int\frac{dz}{a^2+z^2}=\frac{1}{ba}\tan^{-1}\frac{z}{a}+c=\frac{1}{ab}\tan^{-1}\frac{bx}{a}+c.$$

উদা. 2. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x+4}$

মনে কর, $\sin x=z \quad \therefore \quad \cos x\, dx=dz$

$\therefore \quad \int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x+4}=\int \frac{dz}{z^2+4}=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{z}{2}+c=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sin x}{2}+c.$

উদা. 3. $\int \frac{dx}{x[3+(\log x)^2]}$

মনে কর, $\log x=z \quad \therefore \quad \frac{1}{x}dx=dz$

$\therefore \quad \int \frac{dx}{x[3+(\log x)^2]}=\int \frac{dz}{3+z^2}=\int \frac{dz}{(\sqrt{3})^2+z^2}.$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{3}}+c=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{\log x}{3}+c.$

উদা. 4. $\int \frac{dx}{x^2-2}$

$=\int \frac{dx}{x^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+c.$

উদা. 5. $\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta-2}d\theta=\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\tan^2\theta-1}$

মনে কর, $\tan\theta=z \qquad \sec^2\theta\, d\theta=dz$

$\therefore \quad \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\tan^2\theta-1}=\int \frac{dz}{z^2-1}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+c.$

$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}\right|+c.$

উদা. 6. $\int \frac{e^{2x}dx}{1-e^{4x}}$

মনে কর, $e^{2x}=z \quad \therefore \quad 2e^{2x}dx=dz$

$\therefore \quad \int \frac{e^{2x}dx}{1-e^{4x}}=\frac{1}{2}\int \frac{dz}{1-z^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\log\left|\frac{1+z}{1-z}\right|+c$

$=\frac{1}{4}\log\left|\frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}\right|+c.$

উদা. 7. $\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}dx$

মনে কর, $x^2=z \quad \therefore \quad 2xdx=dz$

$\therefore \quad \int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}=\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\log|(z+\sqrt{1+z^2})|+c$

$=\log|(x^2+\sqrt{1+x^4})|+c.$

উদা. 8. $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$

মনে কর, $\tan x = z \quad \therefore \quad \sec^2 x\, dx = dz$

$$\therefore \quad \int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{1-\tan^2 x}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \sin^{-1} z + c = \sin^{-1} \tan x + c.$$

উদা. 9. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{9-\sin^4 x}} dx$

মনে কর, $\sin^2 x = z \quad \therefore \quad 2 \sin x \cos x\, dx = dz$

$$\therefore \quad \sin 2x\, dx = dz$$

$$\therefore \quad \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{9-\sin^4 x}} dx = \int \frac{dz}{\sqrt{9-z^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{3^2-z^2}}$$

$$= \sin^{-1} \frac{z}{3} + c = \sin^{-1} \frac{\sin^2 x}{3} + c.$$

উদা. 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{\{(2x+3)^2-5\}}}$

মনে কর, $2x+3 = z \quad \therefore \quad 2dx = dz$

$$\therefore \quad \frac{dx}{\sqrt{\{(2x+3)^2-5\}}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-5}} = \tfrac{1}{2} \log \mid \{z + \sqrt{z^2-5}\} \mid + c$$

$$= \tfrac{1}{2} \log \mid \{(2x+3) + \sqrt{(2x+3)^2-5}\} \mid + c.$$

উদাহরণমালা II-B

1. (i) $\int \frac{2x dx}{x^4+16}$, (ii) $\int \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x+3} dx$,

 (iii) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\{1+(\tan^{-1} x)^2\}}$

2. (i) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-1}$, (ii) $\int \frac{x^2}{x^2-1} dx$.

3. (i) $\frac{ax dx}{bx^4+c}$, (ii) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\{a(\tan^{-1} x)^2+b\}}$

4. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$, (ii) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-(\tan^{-1} x)^2}}$

 (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$

5. (i) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$, (ii) $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^4+x^4}}$

6. (i) $\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{1+x^4}}dx$, (ii) $\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}$, $b^2>a^2$

সমাধান :

উদা. 1. (i) মনে কর $x^2=z$ $\therefore$ $2xdx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int \frac{dz}{z^2+16}=\frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{z}{4}+c=\frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x^2}{4}+c.$

(ii) $\int \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x+3}dx=\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x+4}dx$

মনে কর, $\tan x=z$ $\therefore$ $\sec^2 x\, dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int \frac{dz}{z^2+4}=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{z}{2}+c=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\tan \alpha}{2}+c.$

(iii) মনে কর, $\tan^{-1}x=z$ $\therefore$ $\frac{1}{1+x^2}dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int \frac{dz}{1+z^2}=\tan^{-1}z+c=\tan^{-1}\tan^{-1}x+c=x+c.$

উদা. 2. (i) মনে কর $e^x=z$ $\therefore$ $e^x dx=dz$

প্রদত্ত সমাকল $=\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}=\log\left|(z+\sqrt{z^2-1})\right|+c$

$=\log|(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})|+c$

(ii) $\int \frac{x^2}{x^2-1}dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2-1}\right)dx=\int dx-\int \frac{dx}{x^2-1}$

$=x-\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c.$

উদা. 3. (i) মনে কর, $x^2=z$ $\therefore$ $2xdx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\frac{1}{2}\int \frac{adz}{bz^2+c}=\frac{a}{2b}\int \frac{dz}{z^2+\frac{c}{b}}$

$=\frac{a}{2b}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{c}{b}}}\tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{\frac{c}{b}}}+k$, [$k$ যে কোনও ধ্রুবক।]

$=\frac{a}{2\sqrt{bc}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{b}z}{\sqrt{c}}+k=\frac{a}{2\sqrt{bc}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot x^2+k.$

(ii) মনে কর, $\sqrt{a}\tan^{-1}x=z$. $\sqrt{a}.\frac{1}{1+x^2}dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dz}{z^2+b}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{b}}+c$

$=\frac{1}{\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{a}\tan^{-1}x}{\sqrt{b}}+c.$

উদা. 4. (i) মনে কর, $bx=z$, $\therefore$ $bdx=dz$

প্রদত্ত সমাকল$=\frac{1}{b}\int\frac{dz}{\sqrt{a^2-z^2}}=\frac{1}{b}.\sin^{-1}\frac{z}{a}+c=\frac{1}{b}.\sin^{-1}\frac{bx}{a}+c.$

(ii) মনে কর, $\tan^{-1}x=z$ $\therefore$ $\frac{dx}{1+x^2}=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$=\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\sin^{-1}z+c=\sin^{-1}\tan^{-1}x+c.$

(iii) $\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-(a^2-2ax+x^2)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}}$

মনে কর, $x-a=z$ $\therefore$ $dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$=\int\frac{dz}{\sqrt{a^2-z^2}}=\sin^{-1}\frac{z}{a}+c=\sin^{-1}\frac{x-a}{a}+c.$

উদা. 5. (i) $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx.$

মনে কর, $e^x=z$ $\therefore$ $e^xdx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$=\int\frac{dz}{z^2+1}=\tan^{-1}z+c=\tan^{-1}e^x+c.$

(ii) মনে কর, $x^2=z$ $\therefore$ $2xdx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{a^4+z^2}}=\frac{1}{2}\log|(z+\sqrt{a^4+z^2})|+c$

$=\frac{1}{2}\log|(x^2+\sqrt{a^4+x^4})|+c.$

উদা. 6. (i) $\int\frac{x^2-1}{x\sqrt{1+x^4}}dx=\int\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{1}{x}\sqrt{1+x^4}}dx$

$$=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}}dx.$$

মনে কর, $x+\frac{1}{x}=z$ $\qquad \therefore \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$=\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-2}}=\log|z+\sqrt{z^2-2}|+c$

$$=\log\left|\left(x+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\right|+c.$$

(ii) মনে কর, $x^2-a^2=z^2 \qquad \therefore 2xdx=2zdx.$

এবং $b^2-x^2=b^2-a^2-z^2$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$=\int\frac{zdz}{z\sqrt{b^2-a^2-z^2}}=\int\frac{dz}{\sqrt{(b^2-a^2)-z^2}}$

$$=\sin^{-1}\frac{z}{\sqrt{b^2-a^2}}+c=\sin^{-1}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{b^2-a^2}}+c.$$

2·3. $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}dx$ ও $\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$ **আকারের সমাকলের সমাকলন :**

উদা. 1. $\int\frac{dx}{x^2+x-12}$

$$=\int\frac{dx}{x^2+2.x.\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2-12-\frac{1}{4}}=\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{49}{4}}$$

$$=\frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2-(\frac{7}{2})^2}=\frac{1}{2.\frac{7}{2}}\log\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{7}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{7}{2}}\right|+c=\frac{1}{7}\log\left|\frac{x-3}{x+4}\right|+c.$$

[এখানে লক্ষ্য কর, $x+\frac{1}{2}=z$ বসাইলে $dx=dz$ হয়। সুতরাং dx কে $d(x+\frac{1}{2})$ লেখা হইল, যেন মনে মনে আমরা সম্পূর্ণ সমাকলন করিতে পারি। এই সমাকলনটি আবার নিম্ন উপায়ে করা যায়।

$$\int\frac{dx}{x^2+x-12}=\int\frac{dx}{(x+4)(x-3)}=\frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+4}\right)dx$$

$$=\frac{1}{7}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{7}\int\frac{dx}{x-4}=\frac{1}{7}\int\frac{d(x-3)}{x-3}-\frac{1}{7}\int\frac{d(x+4)}{x+4}$$

$$=\frac{1}{7}\log|(x-3)|-\frac{1}{7}\log|x+4|+c$$

$$=\frac{1}{7}\log\frac{|x-3|}{|x+4|}+c.$$]

উদা. 2. $\int\frac{\cos xdx}{\sin^2x+2\sin x+5}$

মনে কর, $\sin x=z$; $\therefore \cos x\,dx=dz$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\int\frac{dz}{z^2+2z+5}=\int\frac{dz}{(z+1)^2+4}$

$$=\int\frac{d(z+1)}{(z+1)^2+2^2}=\tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{z+1}{2}+c=\tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sin x+1}{2}+c.$$

উদা. 3. $\int\frac{(1-x)dx}{4x^2-4x-3}$

$$=-\tfrac{1}{8}\int\frac{8x-8}{4x^2-4x-3}dx=-\tfrac{1}{8}\int\frac{8x-4-4}{4x^2-4x-3}dx$$

$$=-\tfrac{1}{8}\int\frac{(8x-4)dx}{4x^2-4x-3}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{4x^2-4x-3}$$

$$=-\tfrac{1}{8}\int\frac{d(4x^2-4x-3)}{4x^2-4x-3}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{(2x-1)^2-4}$$

$$=-\tfrac{1}{8}\int\frac{d(4x^2-4x-3)}{4x^2-4x-3}+\tfrac{1}{4}\int\frac{d(2x-1)}{(2x-1)^2-4}.$$

$$=-\tfrac{1}{8}\log|4x^2-4x-3|+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\log\left|\frac{2x-1-2}{2x-1+2}\right|+c.$$

$$=-\tfrac{1}{8}\log|4x^2-4x-3|+\tfrac{1}{16}\log\left|\frac{2x-3}{2x+1}\right|+c.$$

2·4. $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ও $\int\frac{(px+q)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ আকারের সমাকলের সমাকলন :

উদা. 1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x-2}}$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2.x.\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2-2-\frac{1}{4}}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}}}$$

$$=\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-(\frac{3}{2})^2}}=\log\left|(x+\tfrac{1}{2})+\sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2-(\tfrac{3}{2})^2}\right|+c.$$

$$=\log\left|\left(\frac{2x+1}{2}\right)+\sqrt{x^2+x-2}\right|+c.$$

উদা. 2. $\int\frac{xdx}{x^4+4x^2+3}$

মনে কর, $x^2=z$ $\quad\therefore\ 2xdx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+4z+3}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{(z+2)^2-1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(z+2)}{(z+2)^2-1}$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}.\log\left|\frac{z+2-1}{z+2+1}\right|+c=\tfrac{1}{4}\log\left|\frac{x^2+1}{x^2+3}\right|+c.$$

উদা. 3. $\int\frac{x+1}{x^2+4x+5}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+4x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4-2}{x^2+4x+5}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+5}-\int\frac{dx}{x^2+4x+5}.=\frac{1}{2}.I_1-I_2$, মনে কর।

এখন, $I_1=\int\frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx.$

মনে কর, $x^2+4x+5=z \quad \therefore \quad (2x+4)dx=dz$

$\therefore \quad I_1=\int\frac{dz}{z}=\log|z|=\log|x^2+4x+5|$

$I_2=\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+1}$

$=\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1}=\tan^{-1}(x+2).$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\frac{1}{2}\log|x^2+4x+5|-\tan^{-1}(x+2)+c.$

উদা. 4. $\int\frac{dx}{\sqrt{2+8x-3x^2}} \quad =\int\frac{dx}{\sqrt{2-3(x^2-\frac{8}{3}x)}}$

$=\int\frac{dx}{\sqrt{2-3(x^2-2.x.\frac{4}{3}+\frac{16}{9})+\frac{16}{3}}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{22}{3}-3(x-\frac{4}{3})^2}}$

$=\quad \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d[\sqrt{3}(x-\frac{4}{3})]}{\sqrt{\frac{22}{3}-3(x-\frac{4}{3})^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}(x-\frac{4}{3})}{\sqrt{\frac{22}{3}}}+c$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\frac{3x-4}{\sqrt{22}}+c.$

উদা. 5. $\int\frac{dx}{x\sqrt{(\log x)^2+2(\log x)+5}}$

মনে কর, $\log x=z\,;\quad \therefore \quad \frac{1}{x}dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+2z+5}}=\int\frac{dz}{\sqrt{(z+1)^2+2^2}}$

$=\int\frac{d(z+1)}{\sqrt{(z+1)^2+2^2}}=\log|(z+1)+\sqrt{(z+1)^2+2^2}|+c$

$=\log|\log x+1+\sqrt{(\log x)^2+2\log x+5}|+c.$

উদা. 6. $\int\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int\frac{2x+1+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$

$=\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx+\int\frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=I_1+I_2$

সমাকল I_1-এ $x^2+x+1=z$ ধর, $\therefore\ (2x+1)dx=dz$

$\therefore\ I_1=\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{z}=2\sqrt{x^2+x+1}$

আবার, $I_2=2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$

$=2\log\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right|$

$=2\log|(x+\frac{1}{2})+\sqrt{x^2+x+1}|$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$=2\sqrt{x^2+x+1}+2\log|(x+\frac{1}{2})+\sqrt{x^2+x+1}|+c$

উদা. 7. $\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\int\frac{x+1+2}{\sqrt{x^2+2x+1^2}}dx$

$=\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}+2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

$=\frac{1}{2}\int\frac{2(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}+2\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$

$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2x+2)}{\sqrt{x^2+2x+2}}=2\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1^2}}$

$=\frac{1}{2}.\ 2\sqrt{x^2+2x+2}+2\log|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+1}|+c$

$=\sqrt{x^2+2x+2}+2\log|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+2}|+c$

2·5. $\int\frac{dx}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}$ ও $\int\frac{dx}{(ax+b)\sqrt{px^2+qx+r}}$ **আকারের সমাকলের সমাকলন :**

উদা. 1. $\int\frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

মনে কর, $1+x=z^2\quad\therefore\ dx=2z\,dz\quad\therefore 2+x=z^2+1$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$=\int\frac{2z\,dz}{(z^2+1)z}=2\int\frac{dz}{z^2+1}$

$=2\tan^{-1}z+c=2\tan^{-1}\sqrt{1+x}+c.$

উদা. 2. $\int\frac{dx}{(2x+1)\sqrt{3x+4}}$

মনে কর, $3x+4=z^2\quad\therefore\ 3\,dx=2z\,dz$

এখন, $x=\frac{z^2-4}{3}\quad\therefore\ 2x+1=2.\frac{z^2-4}{3}+1=\frac{2z^2-5}{3}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\frac{1}{3}\int\frac{2z\,dz}{\frac{2z^2-5}{3}.z}=2\int\frac{dz}{2z^2-5}$

$$=\int\frac{dz}{z^2-\frac{5}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{2}}}\log\left|\frac{z-\sqrt{\frac{5}{2}}}{z+\sqrt{\frac{5}{2}}}\right|+c.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{10}}\log\left|\frac{\sqrt{2}z-\sqrt{5}}{\sqrt{2}z+\sqrt{5}}\right|+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{10}}\log\left|\frac{\sqrt{2(3x+4)}-\sqrt{5}}{\sqrt{2(3x+4)}+\sqrt{5}}\right|+c.$$

উদা. 3. $\int\frac{dx}{(1+2x)\sqrt{1+x^2}}$

মনে কর, $1+2x=\frac{1}{z}$ $\quad\therefore\ 2\,dx=-\frac{1}{z^2}\,dz.$ আবার, $x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-1\right)$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\frac{1}{2}\int\frac{-\frac{1}{z^2}\,dz}{\frac{1}{z}\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}-1\right)^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{1-z}{z}\right)^2}}$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+\frac{(1-z)^2}{4}}}=-\frac{1}{2}\int\frac{2dz}{\sqrt{5z^2-2z+1}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-\frac{2}{5}z+\frac{1}{5}}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dz}{\sqrt{(z-\frac{1}{5})^2+\frac{1}{5}-\frac{1}{25}}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dz}{\sqrt{(z-\frac{1}{5})^2+\frac{4}{25}}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left|(z-\tfrac{1}{5})+\sqrt{(z-\tfrac{1}{5})^2+\tfrac{4}{25}}\right|+c$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left|(z-\tfrac{1}{5})+\sqrt{z^2-\frac{2z}{5}+\frac{1}{5}}\right|+c$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left|\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{5}\right)+\sqrt{\frac{1}{(2x+1)^2}-\frac{2}{5(2x+1)}+\frac{1}{5}}\right|+c$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left|\frac{2(2-x)}{5(2x+1)}+\sqrt{\frac{5[5-2(2x+1)+(2x+1)^2]}{25(2x+1)^2}}\right|+c$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left|\frac{2(2-x)}{5(2x+1)}+\frac{\sqrt{5}\sqrt{4(1+x^2)}}{5(2x+1)}\right|+c$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\log 2\left|\frac{(2-x)+\sqrt{5(1+x^2)}}{5(2x+1)}\right|+c.$$

উদা. 4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

মনে কর, $x=\frac{1}{z}$ $\therefore$ $dx=-\frac{1}{z^2}dz$

প্রদত্ত সমাকল $=\int \frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1}}=-\int \frac{dz}{\sqrt{1+z+z^2}}$

$$=-\int \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+z\right)^2}}$$

$$=-\log\left|\left(z+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{z}\right)^2}\right|+c$$

$$=-\log\left|\frac{2z+1}{2}+\sqrt{1+z+z^2}\right|+c$$

$$=-\log\left|\frac{2.\frac{1}{x}+1}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right|+c$$

$$=-\log\left|\frac{2+x}{2x}+\frac{\sqrt{4(1+x+x^2)}}{2x}\right|+c$$

$$=-\log\left|\frac{(2+x)+2\sqrt{1+x+x^2}}{2x}\right|+c.$$

উদা. 5. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

মনে কর, $1+x=\frac{1}{z}$; $\therefore$ $dx=\frac{1}{z^2}dz$ আবার, $x=\frac{1}{z}-1=\frac{1-z}{z}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int \frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z}\sqrt{1-\left(\frac{1-z}{z}\right)^2}}=-\int \frac{dz}{z\sqrt{1-\left(\frac{1-z}{z}\right)^2}}$

$$=-\int \frac{dz}{\sqrt{2z-1}}=-\frac{1}{2}\int \frac{d(2z-1)}{\sqrt{2z-1}}=-\tfrac{1}{2}.2\sqrt{2z-1}+c$$

$$=-\sqrt{2z-1}+c=-\sqrt{2\left(\frac{1}{1+x}\right)-1}+c=-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+c$$

উদাহরণমালা II(B)

সমাকলন কর :

1. (i) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$, (ii) $\int \frac{e^x dx}{3e^{2x}-2e^x+4}$

2. (i) $\int \frac{dx}{x\{15+2\log x-(\log x)^2\}}$,

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\{1+(\sin^{-1}x)+(\sin^{-1}x)^2\}}$ (iii) $\int \frac{x^2 dx}{x^6-6x^3+5}$

3. (i) $\int \frac{2x-3}{1-x-x^2}dx$, (ii) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$.

4. (i) $\int \sqrt{\frac{a-x}{x}}dx$, (ii) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$

5. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$, (ii) $\int \sqrt{\frac{a+x}{x}}dx$.

6. (i) $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$, (ii) $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1+x}}$

(iii) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x}}$, (iv) $\frac{\sqrt{x-a}}{x}dx$.

7. (i) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$, (ii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$, (iii) $\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

সমাধান :

উদা. 1. (i) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}=\int \frac{dx}{(x^2+4x+4)+1}$

$$=\int \frac{dx}{(x+2)^2+1}=\tan^{-1}(x+2)+c.$$

(ii) মনে কর, $e^x=z$ $\therefore$ $e^x dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int \frac{dz}{3z^2-2z+4}=\frac{1}{3}\int \frac{dz}{z^2-\frac{2}{3}z+\frac{4}{3}}$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{dz}{(z-\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}-\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}\int \frac{dz}{(z-\frac{1}{3})^2+\frac{11}{9}}$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{d(z-\frac{1}{3})}{(z-\frac{1}{3})^2+(\sqrt{\frac{11}{9}})^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{11}{9}}}\tan^{-1}\frac{z-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{11}{9}}}+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{11}}\tan^{-1}\frac{3z-1}{\sqrt{11}}+c=\frac{1}{\sqrt{11}}\tan^{-1}\frac{3e^x-1}{\sqrt{11}}+c.$$

উদা. 2. (i) মনে কর, $\log x=z$; $\therefore$ $\frac{1}{x}dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int \frac{dz}{15+2z-z^2}=\int \frac{dz}{16-(z-1)^2}$

$$=\frac{1}{2.4}\log\left|\frac{4+(z-1)}{4-(z-1)}\right|+c=\tfrac{1}{8}\log\left|\frac{3+z}{5+z}\right|+c$$

$$=\tfrac{1}{8}\log\left|\frac{3+\log x}{5+\log x}\right|+c$$

(ii) মনে কর, $\sin^{-1}x=z \quad \therefore \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=dz$

$$\therefore \text{ প্রদত্ত সমাকল}=\int\frac{dz}{1+z+z^2}=\int\frac{dz}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+z\right)^2}$$

$$=\int\frac{d(z+\frac{1}{2})}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{z+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+c=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{1+2\sin^{-1}x}{\sqrt{3}}+c.$$

(iii) মনে কর, $x^3=z \quad \therefore \quad 3x^2dx=dz$

$$\therefore \text{ প্রদত্ত সমাকল}=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z^2-6z+5}=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{(z-5)(z-1)}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-5}-\frac{1}{z-1}\right)dz=\frac{1}{12}\int\frac{dz}{z-5}-\frac{1}{12}\int\frac{dz}{z-1}$$

$$=\frac{1}{12}\int\frac{d(z-5)}{z-5}-\frac{1}{12}\int\frac{d(z-1)}{z-1}$$

$$=\tfrac{1}{12}\log|z-5|-\tfrac{1}{12}\log|z-1|+c$$

$$=\frac{1}{12}\log\frac{|z-5|}{|z-1|}+c=\frac{1}{12}\log\left|\frac{x^3-5}{x^3-1}\right|+c.$$

উদা. 3. (i) $\int\frac{2x-3}{1-x-x^2}dx=-\int\frac{-2x+3}{1-x-x^2}dx=-\int\frac{-2x-1+4}{1-x-x^2}dx$

$$=-\int\frac{-2x-1}{1-x-x^2}dx-4\int\frac{dx}{1-x-x^2}.$$

$=-I_1-4I_2+c$, মনে কর ;

এখন, I_1 সমাকলে, মনে কর, $1-x-x^2=z$

$\therefore \quad (-1-2x)dx=dz$

$\therefore \quad I_1=\int\frac{dz}{z}=\log|z|=\log|1-x-x^2|$

আবার, $I_2=\int\frac{dx}{1-x-x^2}=\int\frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$

$$=\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2.\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}\log\left|\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right|+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left|\frac{\sqrt{5}+1+2x}{\sqrt{5}-1-2x}\right|.+c$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=-\log\left|1-x-x^2\right|-4.\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left|\frac{\sqrt{5}+2+2x}{\sqrt{5}-1-2x}\right|+c.$

(ii) $\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx=\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}dx$

$$=\tfrac{1}{2}\int\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{d(x^2-1)}{2\sqrt{x^2-1}}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\sqrt{x^2-1}+\log|\,x+\sqrt{x^2+1}\,|+c.$$

উদা. 4. (i) $\int\sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx=\int\frac{a-x}{\sqrt{x(a-x)}}dx.$

$$=\tfrac{1}{2}\int\frac{2a-2x}{\sqrt{x(a-x)}}\,dx.=\tfrac{1}{2}\int\frac{a-2x}{\sqrt{x(a-x)}}\,dx+\tfrac{1}{2}\int\frac{a}{\sqrt{x(a-x)}}dx.$$

$$=\tfrac{1}{2}\int\frac{d[x(a-x)]}{\sqrt{x(a-x)}}+\frac{a}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left\{\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right\}}}$$

$$=\tfrac{1}{2}\int\frac{d[x(a-x)]}{\sqrt{x(a-x)}}+\frac{a}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{\left\{\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right\}}}$$

$$=\sqrt{x(a-x)}+\frac{a}{2}\sin^{-1}\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}+c$$

$$=\sqrt{x(a-x)}+\frac{a}{2}\sin^{-1}\frac{2x-a}{a}+c.$$

(ii) $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx=\int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$$=\tfrac{1}{2}\int\frac{2x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx+\int\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$=-\tfrac{1}{2}\int\frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2\quad x^2}}+a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=-\sqrt{a^2-x^2}+a\sin^{-1}\frac{x}{a}+c.$$

উদা. 5. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x(2a+x)}}$

মনে কর, $x = z^2$ $\therefore$ $dx = 2zdz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$= \int \frac{2zdz}{z\sqrt{2a+z^2}} = \int \frac{2dz}{\sqrt{z^2+2a}}$

$= 2.\log | z + \sqrt{z^2+2a} | + c$

$= 2.\log | \sqrt{x} + \sqrt{x+2a} | + c.$

(ii) $\int \sqrt{\frac{a+x}{x}}\, dx. = \int \frac{a+x}{\sqrt{x(a+x)}}\, dx.$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2a+2x}{\sqrt{x(a+x)}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{a+2x}{\sqrt{x(a+x)}}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{adx}{\sqrt{x(a+x)}}$

$= \frac{1}{2}I_1 + \frac{a}{2}I_2$, (মনে কর)।

এখন, I_1 সমাকলে $x(a+x) = z$ ধর, $\therefore$ $(a+2x)dx = dz$

$\therefore$ $I_1 = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} = 2\sqrt{x(a+x)}$

আবার, I_2 সমাকলে $x = z^2$ ধর $\therefore$ $dx = 2zdz$

$\therefore$ $I_2 = \int \frac{2zdz}{z\sqrt{a+z^2}} = 2\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+a}} = 2\log | z + \sqrt{z^2+a} | + c$

$= 2\log | \sqrt{x} + \sqrt{x+a} | + c.$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$= \sqrt{x(a+x)} + a\log | \sqrt{x} + \sqrt{x+a} | + c.$

উদা. 6. (i) মনে কর, $x = z^2$ $\therefore$ $dx = 2zdz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$= \int \frac{2zdz}{(1-z^2)z} = 2\int \frac{dx}{1-z^2} = 2.\frac{1}{2}\log \left|\frac{1+z}{1-z}\right| + c$

$= \log \left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + c.$

(ii) মনে কর, $1+x = z^2$ $\therefore$ $dx = 2zdz$

$\therefore$ $1-x = 1-(z^2-1) = 2-z^2$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$= \int \frac{2zdz}{(2-z^2)z} = 2\int \frac{dz}{2-z^2}$

$= 2.\frac{1}{2\sqrt{2}}\log \left|\frac{\sqrt{2}+z}{\sqrt{2}-z}\right| + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\log \left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+x}}\right| + c.$

(iii) মনে কর, $1-x=z^2 \quad \therefore \quad -dx=2zdz$

$\therefore \quad 1+x=1+1-z^2=2-z^2$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=-\int\frac{2zdz}{(2-z^2).z}=2\int\frac{dz}{(z^2-2)}$

$=2.\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|+c=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}\right|+c.$

(iv) $\int\frac{\sqrt{x-a}}{x}dx=\int\frac{x-a}{x\sqrt{x-a}}dx.$

$=\int\frac{dx}{\sqrt{x-a}}-a\int\frac{dx}{x\sqrt{x-a}}=I_1-aI_2$, (মনে কর)।

এখন, $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x-a}}=\int\frac{d(x-a)}{\sqrt{x-a}}=2\sqrt{x-a}$

এবং $I_2=\int\frac{dx}{x\sqrt{x-a}}$

মনে কর, $x-a=z^2 \quad \therefore \quad dx=2zdz \quad \therefore \quad x=z^2+a.$

$\therefore \quad I_2=\int\frac{2zdz}{(z^2+a)z}=2.\int\frac{dz}{z^2+a}=\frac{2}{\sqrt{a}}\tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{a}}$

$=\frac{2}{\sqrt{a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-a}{a}}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=2\sqrt{x-a}-2\sqrt{a}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-a}{a}}+c.$

উদা. 7. (i) মনে কর, $x=\frac{1}{z} \quad \therefore \quad dx=-\frac{1}{z^2}dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\dfrac{-\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{z^2}+1}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$

$=-\log|z+\sqrt{1+z^2}|+c=-\log\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right|+c$

$=-\log\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+c=\log\left|\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right|+c.$

(ii) মনে কর. $x=\frac{1}{z} \quad \therefore \quad dx=-\frac{1}{z^2}dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\dfrac{-\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{z^2}-a^2}}=-\int\frac{dz}{z\sqrt{\frac{1}{z^2}-a^2}}$

$$=-\int\frac{dz}{\sqrt{1-a^2z^2}}=-\frac{1}{a}\int\frac{d(az)}{\sqrt{1-a^2z^2}}$$

$$=-\frac{1}{a}\sin^{-1}(az)+c=-\frac{1}{a}\sin^{-1}\frac{a}{x}+c.$$

(iii) মনে কর, $1-x=\frac{1}{z}$ $\quad\therefore\quad -dx=-\frac{1}{z^2}dz$

$$\therefore\quad x=1-\frac{1}{z}=\frac{z-1}{z}$$

$$\therefore\quad \text{প্রদত্ত সমাকল}=\int\frac{\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z}\sqrt{1-\left(\frac{z-1}{z}\right)^2}}=\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-(z-1)^2}}$$

$$=\int\frac{dz}{\sqrt{2z-1}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2z-1)}{\sqrt{2z-1}}=\sqrt{2z-1}+c$$

$$=\sqrt{\frac{2}{1-x}-1}+c=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+c.$$

প্রশ্নমালা II

সমাকলন কর:

1. (i) $\int\frac{dx}{3x+4}$, (ii) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, (iii) $\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$

2. (i) $\int\frac{a'x+b'}{ax+b}dx$. (ii) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$.

3. (i) $\int\tan x\,dx$, (ii) $\int\cot x\,dx$.

4. (i) $\int\frac{\sec x\,dx}{\log(\sec x+\tan x)}$, (ii) $\int\frac{1+\cos x}{\sqrt{x+\sin x}}$,

(iii) $\int\frac{\sec x\operatorname{cosec} x}{\log\tan x}dx$.

5. (i) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x}$, (ii) $\int\frac{\sec^2 x}{1+\tan x}dx$.

6. (i) $\int\frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx$, (ii) $\int\frac{dx}{x[1+(\log x)^2]}$.

7. (i) $\int\frac{dx}{9x^2-12x+8}$, (ii) $\int\frac{dx}{6x^2+17x+12}$, (iii) $\int\frac{x\,dx}{x^4+4x^2+3}$

8. (i) $\int \frac{2x+3}{2x^2+x-1}dx$, (ii) $\int \frac{7x-9}{x^2-2x+35}dx$.

9. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$, (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-x-3}}$.

10. (i) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$, (ii) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{2-3x-2x^2}}dx$,

(iii) $\int \frac{2x+9}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

11. (i) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$, [C. P. '25, '28. G. P. '62, 67]

(ii) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+2}}$, (iii) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-2x+3x^2}}$.

12. (i) $\int \frac{e^t dt}{1+e^{2t}}$ (ii) $\int \frac{dx}{1+x+x^2}$ [G. U. Part I-'64]

13. (i) $\int \frac{xdx}{x^2+2x-3}$ [G P. Part I-'65]

(ii) $\int \frac{x^2+4}{x^2+2x+3}dx$ [G. P. Part I-'67]

14. (i) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ [D. U. P -1970]

(ii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}}$ [G. U. P. '66]

15. (i) $\int \frac{e^t dt}{\sqrt{e^{2t}-16}}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+4}}$ [P. P.-'34]

[D. U Par-'70]

৩

অংশতঃ সমাকলনের পদ্ধতি

(Integration by Parts)

3·1. একই চল x-এর দুইটি অপেক্ষক u ও v এর গুণফলের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় সম্ভব হইলে ঐ অপেক্ষক দুইটির গুণফলের সমাকলন এরূপ হইবে: $\int uvdx = u\int vdx - \int\left(\frac{du}{dx}\int vdx\right)dx$

অপেক্ষক দুইটির মধ্যে যাহার সমাকলন নির্ণয় সহজ নহে, উহার অন্তরকলজ নির্ণয় করিয়া এবং অপর অপেক্ষকটির সমাকলন করিয়া প্রদত্ত সমাকলন করিতে হয়। যদি অপেক্ষক দুইটির প্রত্যেকটির অন্তরকলজ ও সমাকলন সহজসাধ্য হয় তবে যে কোনও অপেক্ষকেরই অন্তরকলজ নির্ণয় করিয়া প্রদত্ত সমাকলের সমাকলন করা যাইতে পারে।

উদাহরণমালা III—A

উদা. 1. $\int x^3 \sin x\, dx = x^3\int \sin x\, dx - \int\left[\frac{d(x^3)}{dx}\int \sin x\, dx\right]dx$

$= -x^3 \cos x + \int 3x^2 \cos x\, dx$

$= -x^3 \cos x + 3x^2\int \cos x dx - 3\int\left[\frac{d(x^2)}{dx}\int \cos x dx\right]dx$

$= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 3\int 2x \sin x dx$

$= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6x\int \sin x\, dx + 6\int\left[\frac{d(x)}{dx}\int \sin x dx\right]dx$

$= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6\int \cos x dx$

$= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x.$

উদা. 2. $\int(x+5) \sec^2 x dx$

$= (x+5)\int \sec^2 x dx - \int\left[\frac{d(x+5)}{dx}\int \sec^2 x dx\right]dx$

$= (x+5) \tan x - \int \tan x dx = (x+5) \tan x - \log \sec x$

$= (x+5) \tan x + \log \cos x.$

উদা. 3. $\int xe^x dx = x\int e^x dx - \int\left[\frac{d(x)}{dx}\int e^x dx\right]dx$

$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x.$

উদা. 4. $\int \log x dx = \int 1.\log x dx$

$= \log x \int dx - \int \left[\frac{d(\log x)}{dx}\int dx\right]dx = x\log x - \int \frac{1}{x}.x dx$

$= x\log x - x.$

উদা. 5. $\int (\log x)^3 dx = (\log x)^3 \int dx - \int\left[\frac{d\,(\log x)^3}{dx}\int dx\right]dx$

$= x(\log x)^3 - \int 3\frac{(\log x)^2}{x}.\,x dx = x(\log x)^3 - 3\int(\log x)^2 dx$

$= x(\log x)^3 - 3(\log x)^2\int dx + 3\int\left[\frac{d(\log x)^2}{dx}\int dx\right]dx$

$= x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 3.\int\frac{2\log x}{x}.x dx.$

$= x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 6\int \log x dx$

$= x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 6x\log x - 6x.$ [উদা. 4এর ন্যায়]

উদা. 6. $\int \log ax\; dx = \log ax\int dx - \int\left[\frac{d(\log ax)}{dx}\int dx\right]dx$

$= x\log ax - \int \frac{1}{ax}.\,a.\,x dx = x\log ax - \int dx = x\log ax - x.$

উদা. 7. $\int \tan^{-1}ax\,dx = \tan^{-1}ax.\int dx - \int\left[\frac{d(\tan^{-1}ax)}{dx}\int dx\right]dx$

$= x\tan^{-1}ax. - \int\frac{a}{1+a^2x^2}x\,dx = x\tan^{-1}ax - \frac{1}{2}\int\frac{2axdx}{1+a^2x^2}$

$= x\tan^{-1}ax - \frac{1}{2}\int\frac{d(1+a^2x^2)}{1+a^2x^2}$

$= \tan^{-1}ax - \frac{1}{2}\log(1+a^2x^2).$

উদা. 8. $\int \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}dx$

$= \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\int dx - \int\left[\frac{d\left(\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right)}{dx}\int dx\right]dx$

$= x\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} - \int\frac{\frac{(1-x^2)2-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}.\,x dx$

$= x\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} - \int\frac{2-2x^2+4x^2}{(1-x^2)^2+4x^2}x dx$

$$=x\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}-\int\frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2}x\,dx$$

$$=x\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}-\int\frac{2x}{1+x^2}dx=x\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}-\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$$

$$=x\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}-\log(1+x^2).$$

[বিকল্প পদ্ধতি ঃ

মনে কর, $x=\tan\theta \quad \therefore \quad \frac{2x}{1-x^2}=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\tan 2\theta$

$$\therefore \quad 2\theta=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} \qquad \therefore \quad \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=2\theta=2\tan^{-1}x$$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=2\int\tan^{-1}x\,dx$

$$=2\tan^{-1}x\int dx-2\int\left[\frac{d(\tan^{-1}x)}{dx}.\int dx\right]dx$$

$$=2x\tan^{-1}x-2\int\frac{x}{1+x^2}dx=2x\tan^{-1}x-\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$$

$$=2x\tan^{-1}x-\log(1+x^2)=x\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}-\log(1+x^2)]$$

উদা. 9. $\int\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)dx.$

$$=\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\int dx-\int\left[\frac{d\left(\cos^{-1}\frac{1}{x}\right)}{dx}.\int dx\right]dx$$

$$=x\cos^{-1}\frac{1}{x}-\int\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}x.\,dx.=x\cos^{-1}\frac{1}{x}-\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx.$$

$$=x\cos^{-1}\frac{1}{x}-\log(x+\sqrt{x^2-1}).$$

উদা. 10. $\int e^x\cos x\,dx.$

মনে কর, $I=\int e^x\cos x\,dx.$

$$=\cos x\int e^x\,dx-\int\left[\frac{d(\cos x)}{dx}\int e^x dx\right]dx$$

$$=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx.$$

$$=e^x\cos x+\sin x\int e^x\,dx-\int\left[\frac{d(\sin x)}{dx}\int e^x dx\right]dx$$

$$=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx.$$

$\therefore\ 2I = e^x \cos x + e^x \sin x \qquad \therefore\ I = \frac{1}{2}(e^x \cos x + e^x \sin x)$

$= \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$

উদা. 11. $\int e^x \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int e^x (1 - \cos 2x) dx.$

$= \frac{1}{2}\int e^x dx - \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x\, dx$

$= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x\, dx.$

এখন, $\int e^x \cos 2x\, dx$

$$= \cos 2x \int e^x dx - \int\left[\frac{d(\cos 2x)}{dx}\int e^x dx\right]dx$$

$$= e^x \cos 2x + 2\int \sin 2x .\ e^x\, dx$$

$$= e^x \cos 2x + 2 \sin 2x \int e^x dx - 2\int\left[\frac{d(\sin 2x)}{dx}\int e^x dx\right]dx$$

$$= e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 2\int 2e^x \cos 2x\, dx$$

$$\therefore\ 5\int e^x \cos 2x\, dx = e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x$$

$$\therefore\ \int e^x \cos 2x\, dx = \frac{e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x}{5}$$

$$= \frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2 \sin 2x)$$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $= \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2 \sin 2x)$

$$= \frac{e^x}{2} - \frac{e^x}{10}(\cos 2x + 2 \sin 2x)$$

[বিঃ দ্রঃ উপযুক্ত সমাকলের সমাকলনগুলিতে স্বেচ্ছ ধ্রুবক যোগ করিয়া দেখানো হইল না।]

নিম্নের আদর্শ আকার দুইটির সমাকল সর্বদা মনে রাখিবে :

(i) $\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos\left(ax - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

(ii) $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin\left(bx - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right).$$

উপরোক্ত উদা. 10. ও উদা. 11. এ এই সূত্র দুইটির সাহায্যেও সমাকলন সম্পন্ন করা যাইবে।

3·2. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$, $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$, $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ **আকারের আদর্শ সমাকলের সমাকলন ঃ**

(i) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx=\dfrac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\dfrac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$

(ii) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx=\dfrac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\dfrac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2-a^2})$

(iii) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\dfrac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\dfrac{a^2}{2}\sin^{-1}\dfrac{x}{a}.$

উদাহরণমালা III-B

উদা. 1. $\int \sqrt{x^2+9}\,dx.$

$$=\sqrt{x^2+9}.\int dx-\int\left[\frac{d\sqrt{x^2+9}}{dx}\int dx\right]dx$$

$$=x\sqrt{x^2+9}-\int\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}x\,dx.=x\sqrt{x^2+9}-\int\frac{x^2+9-9}{\sqrt{x^2+9}}\,dx.$$

$$=x\sqrt{x^2+9}-\int\sqrt{x^2+9}\,dx+\int\frac{9}{\sqrt{x^2+9}}dx$$

$$\therefore\quad 2\int\sqrt{x^2+9}\,dx=x\sqrt{x^2+9}+9\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$=x\sqrt{x^2+9}+9.\log(x+\sqrt{x^2+9})$$

$$\therefore\quad \int\sqrt{x^2+9}\,dx=\frac{x\sqrt{x^2+9}}{2}+\frac{9}{2}\log(x+\sqrt{x^2+9})$$

উদা. 2. $\displaystyle\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$

$$=\int\frac{(x+\sqrt{x^2-1})dx}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}=\int(x+\sqrt{x^2-1})\,dx$$

$$=\int xdx+\int\sqrt{x^2-1}\,dx.=\frac{x^2}{2}+\int\sqrt{x^2-1}\,dx.$$

এখন, $\displaystyle\int\sqrt{x^2-1}\,dx=\sqrt{x^2-1}\int dx-\int\left[\frac{d\sqrt{x^2-1}}{dx}\int dx\right]dx$

$$=x\sqrt{x^2-1}-\int\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\,xdx=x\sqrt{x^2-1}-\int\frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$=x\sqrt{x^2-1}-\int\sqrt{x^2-1}\,dx-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\therefore\quad 2\int \sqrt{x^2-1}\,dx = x\sqrt{x^2-1}-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\therefore\quad \int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}-\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}-\tfrac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2-1}).$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2}-\tfrac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2-1}).$

উদা. 3. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$

$$=\int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\int\sqrt{x^2+1}\,dx-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

এখন, $\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\sqrt{x^2+1}\int dx-\int\left[\frac{d\sqrt{x^2+1}}{dx}\int dx\right]dx$

$$=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}x\,dx=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

সুতরাং $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx-\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\therefore\quad 2\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}=x\sqrt{x^2+1}-\log(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$\therefore\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}-\tfrac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1}).$$

উদা. 4. $\int\sqrt{25-9x^2}\,dx.$

$$=\sqrt{25-9x^2}\int dx-\int\left[\frac{d\sqrt{25-9x^2}}{dx}\int dx\right]dx$$

$$=x\sqrt{25-9x^2}-\int\frac{-18x}{2\sqrt{25-9x^2}}\,x\,dx$$

$$=x\sqrt{25-9x^2}-\int\frac{25-9x^2-25}{\sqrt{25-9x^2}}\,dx$$

$$=x\sqrt{25-9x^2}-\int\sqrt{25-9x^2}\,dx+25\int\frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$$

$$\therefore\quad 2\int\sqrt{25-9x^2}\,dx=x\sqrt{25-9x^2}+\tfrac{25}{3}\int\frac{3dx}{\sqrt{25-9x^2}}$$

$$=x\sqrt{25-9x^2}+\tfrac{25}{3}\sin^{-1}\frac{3x}{5}.$$

$$\therefore \int \sqrt{25-9x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{25-9x^2}}{2} + \tfrac{25}{6}\sin^{-1}\frac{3x}{5}.$$

উদা. 5. $\int \sqrt{10-4x+4x^2}\, dx.$

$$=\int \sqrt{9+1-4x+4x^2}\, dx = \int \sqrt{3^2+(2x-1)^2}\, dx.$$

মনে কর. $2x-1=z \quad \therefore\ 2dx = dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\frac{1}{2}\int \sqrt{z^2+3^2}\, dx$

$$=\tfrac{1}{2}\left[\frac{z\sqrt{z^2+9}}{2}+\tfrac{9}{2}\log(z+\sqrt{z^2+9})\right]$$

$$=\tfrac{1}{4}[(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2+9}+9\log\{(2x-1)+\sqrt{(2x-1)^2+9}\}]$$

$$=\tfrac{1}{4}[(2x-1)\sqrt{10-4x+4x^2}+9\log(2x-1)+\sqrt{10-4x+4x^2}]$$

উদা. 6. $\int \sqrt{5x^2+8x+4}\, dx.$

$$=\sqrt{5}\int \sqrt{x^2+\tfrac{8}{5}x+\tfrac{4}{5}}\, dx = \sqrt{5}\int \sqrt{(x+\tfrac{4}{5})^2+\tfrac{4}{25}}\, dx.$$

$$=\sqrt{5}\int \sqrt{(x+\tfrac{4}{5})^2+(\tfrac{2}{5})^2}\, d(x+\tfrac{4}{5})$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\left[\left(x+\frac{4}{5}\right)\sqrt{\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2}{5}\right)^2\log\left\{\left(x+\frac{4}{5}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}\right\}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\left[\left(x+\frac{4}{5}\right)\sqrt{x^2+\frac{8x}{5}+\frac{4}{5}}+\frac{4}{25}\log\left\{\left(x+\frac{4}{5}\right)+\sqrt{x^2+\frac{8}{5}x+\frac{4}{5}}\right\}\right]$$

উদাহরণমালা III-C

নিম্নলিখিত সমাকল গুলির সমাকলন কর :

1. (i) $\int x\log x\, dx$, (ii) $\int(1+x^2)\log x\, dx.$

2. (i) $\int\cos^{-1}x\, dx$, (ii) $\int\sin^{-1}x\, dx$

(iii) $\int\operatorname{cosec}^{-1}x\, dx.$

3. (i) $\int\frac{\log x}{x^2}\, dx$, (ii) $\int(2x^2-5x+2)\log x\, dx$

4. (i) $\int\sin^{-1}\sqrt{x}\, dx$, (ii) $\int(\sin^{-1}x)^3\, dx$

(iii) $\int\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\, dx.$

5. (i) $\int e^{2x}\cos^3 x\, dx$, (ii) $\int e^x\sin 3x\cos x\, dx.$

6. (i) $\int e^x(\cos x-\sin x)dx$, (ii) $\int e^x(1+\tan x)\sec x\, dx,$

(iii) $\int e^x\left(\tan^{-1} x+\frac{1}{1+x^2}\right)dx,$

(iv) $\int e^x[\log(\sec x+\tan x)+\sec x]dx.$

7. (i) $\int\frac{x \sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,$ (ii) $\int\frac{e^{m \tan^{-1}x}}{(1+x^2)^2}\, dx.$

8. (i) $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\, dx,$ (ii) $\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+a}}\, dx.$

9. (i) $\int\sin^{-1}(3x-4x^3)dx,$ (ii) $\int\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx.$

10. (i) $\int e^x \sqrt{e^{2x}-3e^x+1}\, dx,$ (ii) $\int x^2 \sqrt{x^6+x^3+1}\, dx.$

11. (i) $\int\log(1+x)dx,$ (ii) $\int\log(x+\sqrt{x^2+1})dx.$

12. (i) $\int\frac{e^x}{x}(1+x \log x)dx.$ **13.** $\int e^x(1+x)\log(xe^x)dx.$

14. $\int x \log(x+\sqrt{x^2+a^2})dx.$

15. (i) $\int\left[\frac{1}{(\log x)^2}-\frac{2}{(\log x)^3}\right]dx,$ (ii) $\int\left\{\frac{1}{(\log x)^n}-\frac{n}{(\log x)^{n+1}}\right\}dx.$

16. $\int\left[\log(\log x)+\frac{1}{(\log x)^2}\right] dx.$ **17.** $\int\tan^{-1}\sqrt{x}.dx.$

18. (i) $\int\frac{1}{x^2}(\tan^{-1}x)dx.$ (ii) $\int\sqrt{\frac{x}{a-x}}\, dx.,$ (iii) $\sqrt{\frac{a-x}{x}}dx,$

19. (i) $\int e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\, dx,$ (ii) $\int e^x.\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\, dx.$

20. $\int \sqrt{2ax-x^2}\, dx.$

21. (i) $\int(x-1)\sqrt{x^2-1}\, dx.$ (ii) $\int(x-1)\sqrt{x^2-x+1}\, dx.$

22. (i) $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\, dx,$ (ii) $\int x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\, dx.$

23. $\int \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\, dx.$

সমাধান :

উদা. 1. (i) $\int x \log x\, dx.$

$$=\log x \int xdx-\int\left[\frac{d(\log x)}{dx}\int xdx\right]dx$$
$$=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x^2}{2x}\, dx=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}.$$

(ii) $\int(1+x^2)\log x\,dx.$

$$=\log x\int(1+x^2)dx-\int\left[\frac{d(\log x)}{dx}\int(1+x^2)dx\right]dx$$

$$=\left(x+\frac{x^3}{3}\right)\log x-\int\frac{x+\frac{x^3}{3}}{x}\,dx=\left(x+\frac{x^3}{3}\right)\log x-\int\left(1+\frac{x^2}{3}\right)dx$$

$$=\left(x+\frac{x^3}{3}\right)\log x-\left(x+\frac{x^3}{9}\right).$$

উদা. 2. (i) $\int\cos^{-1}x\,dx$

$$=\cos^{-1}x\int dx-\int\left[\frac{d(\cos^{-1}x)}{dx}\int dx\right]dx$$

$$=x\cos^{-1}x+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=x\cos^{-1}x-\tfrac{1}{2}\int\frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=x\cos^{-1}x-\int\frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}=x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}.$$

[**বিকল্প পদ্ধতি ঃ**

মনে কর, $\cos^{-1}x=\theta \quad \therefore\ x=\cos\theta \quad \therefore dx=-\sin\theta\,d\theta.$

$\therefore\ \int\cos^{-1}x\,dx=-\int\theta\sin\theta\,d\theta$

$$=\theta\int-\sin\theta\,d\theta-\int\left[\frac{d(\theta)}{d\theta}\int-\sin\theta\,d\theta\right]d\theta$$

$$=\theta\cos\theta-\int\cos\theta\,d\theta=\theta\cos\theta-\sin\theta$$

$=x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}.$ (মান বসাইয়া).]

(ii) $\int\sin^{-1}x\,dx=\sin^{-1}x\int dx-\int\left[\frac{d(\sin^{-1}x)}{dx}\int dx\right]dx$

$$=x\sin^{-1}x-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}x\,dx=x\sin^{-1}x+\frac{1}{2}\int\frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}.$$

(iii) $\int\text{cosec}^{-1}x\,dx$ মনে কর, $\text{cosec}^{-1}x=\theta$

$\therefore\ x=\text{cosec}\,\theta \quad \therefore\ dx=-\text{cosec}\,\theta\cot\theta\,d\theta.$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int\theta(-\text{cosec}\,\theta\cot\theta)d\theta$

$$=\theta\int(-\text{cosec}\,\theta\cot\theta)d\theta-\int\left[\frac{d\theta}{d\theta}\int\left(-\text{cosec}\,\theta\cot\theta\right)d\theta\right]d\theta$$

$$=\theta\,\text{cosec}\,\theta-\int\text{cosec}\,\theta\,d\theta$$

$$=\theta\,\text{cosec}\,\theta-\int\frac{\text{cosec}\,\theta\,(\text{cosec}\,\theta+\cot\theta)}{(\text{cosec}\,\theta+\cot\theta)}d\theta$$

$=\theta \operatorname{cosec} \theta+\log (\operatorname{cosec} \theta+\cot \theta)$

$=x \operatorname{cosec}^{-1} x+\log (x+\sqrt{x^2-1})$.

উদা. 3. (i) $\int \frac{\log x}{x^2} dx=\log x \int x^{-2} dx-\int\left[\frac{d(\log x)}{dx} \int x^{-2} dx\right] dx$

$=-\frac{\log x}{x}-\int \frac{1}{x} \cdot\left(-\frac{1}{x}\right) dx=-\frac{\log x}{x}-\frac{1}{x}$.

(ii) $\int(2x^2-5x+2) \log x\, dx$

$=\log x \int(2x^2-5x+2) dx-\int\left[\frac{d(\log x)}{dx} \int(2x^2-5x+2) dx\right] dx$

$=\log x\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+2x\right)-\int \frac{1}{x}\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+2x\right) dx$

$=\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+2x\right) \log x-\int\left(\frac{2x^2}{3}-\frac{5x}{2}+2\right) dx$

$=\left(\frac{2}{3} x^3-\frac{5}{2} x^2+2x\right) \log x-\left(\frac{2x^3}{9}-\frac{5x^2}{4}+2x\right)$

উদা. 4. (i) $\int \sin^{-1} \sqrt{x} dx=\sin^{-1} \sqrt{x} \int dx-\int\left[\frac{d(\sin^{-1} \sqrt{x})}{dx} \int dx\right] dx$

$=x \sin^{-1} \sqrt{x}-\int \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{x}} x dx$

$=x \sin^{-1} \sqrt{x}-\frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$

এখন, $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$; ধর $x=\sin^2 \theta \quad \therefore \quad dx=2 \sin \theta \cos \theta d\theta$

$\therefore \quad \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx=\int \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta=\int(1-\cos 2\theta) d\theta$

$=\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}=\theta-\sin \theta \cos \theta=\sin^{-1} \sqrt{x}-\sqrt{x} \sqrt{1-x}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকলন

$=x \sin^{-1} \sqrt{x}-\frac{1}{2} \sin^{-1} \sqrt{x}+\frac{1}{2} \sqrt{x} \sqrt{1-x}$

$=(x-\frac{1}{2}) \sin^{-1} \sqrt{x}+\frac{1}{2} \sqrt{x(1-x)}$.

(ii) $\int(\sin^{-1} x)^3 dx$ মনে কর, $\sin^{-1} x=\theta$

$\therefore \quad x=\sin \theta \quad \therefore \quad \cos \theta=\sqrt{1-x^2} \quad \therefore \quad dx=\cos \theta d\theta$

এখন, $\int(\sin^{-1} x)^3 dx=\int \theta^3 \cos \theta d\theta=\theta^3 \sin \theta-\int 3\theta^2 \cdot \sin \theta d\theta$

$=\theta^3 \sin \theta+3 \int \theta^2(-\sin \theta) d\theta$

$=\theta^3 \sin\theta+3\theta^2\cos\theta-3\int 2\theta\cos\theta d\theta$
$=\theta^3 \sin\theta+3\theta^2\cos\theta-6\theta\sin\theta+6\int 1.\sin\theta d\theta$
$=\theta^3 \sin\theta+3\theta^2\cos\theta-6\theta\sin\theta-6\cos\theta$
$=x(\sin^{-1}x)^3+3\sqrt{1-x^2}(\sin^{-1}x)^2-6x(\sin^{-1}x)-6\sqrt{1-x^2}.$

(iii) $\int\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}dx$ মনে কর, $x=\tan\theta$

$\therefore\ \dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cos 2\theta.$

$\therefore\ \cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=2\theta=2\tan^{-1}x.$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=2\int\tan^{-1}x dx$

$=2\tan^{-1}x\int dx-2\int\left[\dfrac{d(\tan^{-1}x)}{dx}\int dx\right]dx$

$=2x\tan^{-1}x-2\int\dfrac{1}{1+x^2}xdx=2x\tan^{-1}x-\int\dfrac{2x}{1+x^2}dx$

$=2x\tan^{-1}x-\log(1+x^2).$

উদা. 5. (i) $\int e^{2x}\cos^3 xdx.$

যেহেতু, $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

$\therefore\ \cos^3 x=\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x)$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\frac{1}{4}\int e^{2x}(\cos 3x+3\cos x)dx$

$=\frac{1}{4}\int e^{2x}\cos 3xdx+\frac{3}{4}\int e^{2x}\cos xdx$

$=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{e^{2x}}{4+9}(2\cos 3x+3\sin 3x)+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{e^{2x}}{4+1}(2\cos x+\sin x)$

$=\dfrac{e^{2x}}{52}(2\cos 3x+3\sin 3x)+\dfrac{3e^{2x}}{20}(2\cos x+\sin x).$

(ii) $\int e^x\sin 3x\cos xdx=\frac{1}{2}\int e^x.2\sin 3x\cos xdx$

$=\frac{1}{2}\int e^x[\sin 4x+\sin 2x]dx=\frac{1}{2}\int e^x\sin 4xdx+\frac{1}{2}\int e^x\sin 2xdx$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^x}{1+16}(\sin 4x-4\cos 4x)+\dfrac{1}{2}\ \dfrac{e^x}{1+4}(\sin 2x-2\cos 2x)$

$=\dfrac{e^x}{34}(\sin 4x-4\cos 4x)+\dfrac{e^x}{10}(\sin 2x-2\cos 2x).$

উদা. 6. (i) $\int e^x(\cos x-\sin x)dx=\int e^x\cos xdx-\int e^x\sin xdx$
$=\int e^x\cos xdx+\int e^x(-\sin x)dx$
$=\int e^x\cos xdx+e^x\cos x-\int e^x\cos xdx=e^x\cos x.$

(ii) $\int e^x(1+\tan x)\sec x dx = \int e^x(\sec x + \sec x \tan x)dx$

$= \int e^x \sec x dx - \int e^x \sec x \tan x dx$

$= \sec x\, e^x - \int e^x . \sec x \tan x dx + \int e^x \sec x \tan x dx$

$= e^x \sec x.$

(iii) $\int e^x\left(\tan^{-1}x + \frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$= \int e^x \tan^{-1}x dx + \int e^x . \frac{1}{1+x^2}dx$

$= \tan^{-1}x\, e^x . - \int e^x . \frac{1}{1+x^2}dx + \int e^x , \frac{1}{1+x^2}dx = e^x \tan^{-1}x.$

(iv) $\int e^x[\log(\sec x + \tan x) + \sec x]dx$

$= \int e^x \log(\sec x + \tan x)dx + \int e^x \sec x\, dx$

$= e^x . \log(\sec x + \tan x) - \int e^x . \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}dx$

$+ \int e^x \sec x\, dx$

$= e^x \log(\sec x + \tan x) - \int e^x \sec x\, dx + \int e^x \sec x\, dx$

$= e^x \log(\sec x + \tan x).$

[**দ্রষ্টব্য :** উপরোক্ত সমাকলনগুলিতে লক্ষ্য কর, সমাকলটি $\int e^x[f(x)+f'(x)]dx$ আকারে থাকিলে উহার সমাকলন $e^x f(x)$. কারণ,

$\int e^x[f(x)+f'(x)]dx = \int e^x f(x)dx + \int e^x f'(x)dx$

$= f(x)e^x - \int e^x f'(x)dx + \int e^x f'(x)dx = e^x f(x).$]

উদা. 7. (i) $\int \frac{x \sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ মনে কর, $\sin^{-1}x = \theta$

$\therefore\ x = \sin\theta \qquad \therefore\ dx = \cos\theta\, d\theta$ এবং $\sqrt{1-x^2} = \cos\theta$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $= \int \frac{\sin\theta . \theta}{\cos\theta}\cos\theta\, d\theta = \int \theta \sin\theta d\theta$

$= -\theta\cos\theta - \int 1(-\cos\theta)d\theta = -\theta\cos\theta + \sin\theta$

$= -\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x + x.$ (মান বসাইয়া)

(ii) $\int \frac{e^{m \tan^{-1}x}}{(1+x^2)^2}dx$

মনে কর, $\tan^{-1}x = \theta \qquad \therefore\ x = \tan\theta \qquad \therefore\ dx = \sec^2\theta d\theta$

$1+x^2 = 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta.$

এখন, প্রদত্ত সমাকল $=\int\frac{e^{m\theta}}{\sec^4\theta}\sec^2\theta d\theta=\int\frac{e^{m\theta}}{\sec^2\theta}d\theta$

$$=\int e^{m\theta}\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{2}\int e^{m\theta}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int e^{m\theta}d\theta+\frac{1}{2}\int e^{m\theta}\cos 2\theta d\theta$$

$$=\frac{e^{m\theta}}{2m}+\frac{1}{2}\frac{e^{m\theta}}{m^2+4}\Big[m\cos 2\theta+2\sin 2\theta\Big]$$

$$=\frac{e^{m\theta}}{2m}+\frac{1}{2}\frac{e^{m\theta}}{m^2+4}\Big[m.\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}+2.\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\Big]$$

$$=\frac{e^{m\tan^{-1}x}}{2m}+\frac{e^{m\tan^{-1}x}}{2(m^2+4)}\Big[m.\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{4x}{1+x^2}\Big].$$ [মান বসাইয়া]

উদা. 8. (i) $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x}{1+\cos x}dx+\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

$$=\int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}+\int\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int x\sec^2\frac{x}{2}dx+\int\tan\frac{x}{2}dx$$

$$=x\tan\frac{x}{2}-\int 1.\tan\frac{x}{2}.dx.+\int\tan\frac{x}{2}dx=x\tan\frac{x}{2}.$$

(ii) $\int\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+a}}dx$ মনে কর, $x=a\tan^2\theta$

$\therefore\quad dx=2a\tan\theta.\sec^2 d\theta\quad x+a=a(1+\tan^2\theta)=a\sec^2\theta$

$$\therefore\quad\sqrt{\frac{x}{x+a}}=\sqrt{\frac{a\tan^2\theta}{a\sec^2\theta}}=\sqrt{\sin^2\theta}=\sin\theta$$

$$\therefore\quad\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+a}}=\sin^{-1}(\sin\theta)=\theta$$

এখন, প্রদত্ত সমাকল $=\int\theta.2a\tan\theta\sec^2\theta d\theta$

$$=2a\theta.\int\tan\theta\sec^2\theta d\theta-2a\int\Big[\frac{d\theta}{d\theta}\int\tan\theta\sec^2\theta d\theta\Big]d\theta$$

$$=2a.\theta\frac{\tan^2\theta}{2}-2a.\int\frac{\tan^2\theta}{2}d\theta=a\theta\tan^2\theta-a\int(\sec^2\theta-1)d\theta$$

$$=a\theta\tan^2\theta-a\tan\theta+a\theta$$

$$=a.\frac{x}{a}.\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}-a.\sqrt{\frac{x}{a}}+a\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}$$

$$=(a+x)\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{ax}.$$

উদা. 9. (i) $\int\sin^{-1}(3x-4x^3)dx$ মনে কর, $x=\sin\theta$

$\therefore\quad 3x-4x^3=3\sin\theta-4\sin^3\theta=\sin 3\theta.$

$\therefore\quad \sin^{-1}(3x-4x^3)=\sin^{-1}\sin 3\theta=3\theta=3\sin^{-1}x$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int 3\sin^{-1}x dx$

$$=3\sin^{-1}x.\int dx-3\int\left[\frac{d(\sin^{-1}x)}{dx}\int dx\right]dx$$

$$=3x\sin^{-1}x-3\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=3x\sin^{-1}x+\frac{3}{2}\int\frac{-2xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=3x\sin^{-1}x+3\sqrt{1-x^2}.$$

(ii) $\int\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ মনে কর, $x=\cos 2\theta.$

$\therefore\quad dx=-2\sin 2\theta d\theta$

$$\therefore\quad \frac{1-x}{1+x}=\frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}=\tan^2\theta$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int\tan^{-1}\sqrt{\tan^2\theta}.(-2\sin 2\theta d\theta)$

$$=-\int\theta\sin 2\theta d\theta=2\theta\frac{\cos 2\theta}{2}-2\int 1.\frac{\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\theta\cos 2\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}=\frac{x}{2}.\cos^{-1}x-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$$

$$=\tfrac{1}{2}[x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}].$$

উদা. 10 (i) $\int e^x\sqrt{e^{2x}-3e^x+1}\,dx.$

মনে কর, $e^x=z$ $\quad\therefore\quad e^x dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int\sqrt{z^2-3z+1}\,dx=\int\sqrt{\left(z-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}dz$

$$=\int\sqrt{\left(z-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}d\left(z-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(z-\frac{3}{2}\right)\sqrt{\left(z-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}-\frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2}\log\left[\left(z-\frac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(z-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{2z-3}{4}\sqrt{z^2-3z+1}-\tfrac{5}{8}\log\left[\frac{2z-3}{2}+\sqrt{z^2-3z+1}\right]$$

$$=\frac{2e^x-4}{4}\sqrt{e^{2x}-3e^x+1}-\tfrac{5}{8}\log\left[\frac{2e^x-3}{2}+\sqrt{e^{2x}-3e^x+1}\right]$$

(ii) $\int x^2\sqrt{x^6+x^3+1}\,dx.$

মনে কর, $x^3=z \quad \therefore\; 3x^2dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\frac{1}{3}\int\sqrt{z^2+z+1}\,dz=\frac{1}{3}\int\sqrt{(z+\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dz$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(z+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2}\log\left\{\left(z+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right\}\right]$$

$$=\frac{2z+1}{6}\sqrt{z^2+z+1}+\tfrac{1}{8}\log\left[\frac{2z+1}{2}+\sqrt{z^2+z+1}\right]$$

$$=\frac{2x^3+1}{6}\sqrt{x^6+x^3+1}+\tfrac{1}{8}\log\left[\frac{2x^3+1}{2}+\sqrt{x^6+x^3+1}\right].$$

উদা. **11.** (i) $\int\log(1+x)dx.$

$$=\log(1+x)\int dx-\int\left[\frac{d\log(1+x)}{dx}\int dx\right]dx$$

$$=x\log(1+x)-\int\frac{x}{1+x}dx.=x\log(1+x)-\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx.$$

$$=x\log(1+x)-x+\log(1+x).$$

(ii) $\int\log(x+\sqrt{x^2+1})dx$

$$=\log(x+\sqrt{x^2+1})\cdot\int dx\int\left[\frac{d(x+\sqrt{x^2+1})}{dx}\int dx\right]dx.$$

$$=x\log(x+\sqrt{x^2+1})-\int\frac{\left(1+\frac{2x}{1\sqrt{x^2+1}}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}\,x\,dx$$

$$=x\log(x+\sqrt{x^2+1})-\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

$$=x\log(x+\sqrt{x^2+1})-\tfrac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=x\log(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}.$$

উদা. 12. $\int\frac{e^x}{x}(1+x\log x)dx.$

$$=\int e^x\left(\frac{1}{x}+\log x\right)dx=\int e^x.\frac{1}{x}dx+\int e^x\log x dx$$

$$=\int e^x.\frac{1}{x}dx+e^x\log x-\int e^x.\frac{1}{x}dx.=e^x\log x.$$

উদা. 13. $\int e^x(1+x)\log(xe^x)dx.$

মনে কর, $(xe^x)=z \quad \therefore \quad (e^x+x.e^x)dx=dz$

বা, $e^x(1+x)dx=dz.$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\int\log z\,dz=z\log z-z$

$$=xe^x\log(xe^x)-xe^x.$$

উদা. 14. $\int x\log(x+\sqrt{x^2+a^2})dx$

$$=\log(x+\sqrt{x^2+a^2})\int xdx-\int\left[\frac{d\log(x+\sqrt{x^2+a^2})}{dx}\int xdx\right]dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right)}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\frac{x^2}{2}\,dx.$$

$$=\frac{x^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx.$$

$$=\frac{x^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+a^2}dx+\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\frac{x^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{1}{2}\left[\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2}\right]$$

$$+\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2}).$$

$$=\frac{x^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{4}+\frac{a^2}{4}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})\cdot$$

উদা. 15 (i) $\int\left[\frac{1}{(\log x)^2}-\frac{2}{(\log x)^3}\right]dx.$

$$=\int\frac{1}{(\log x)^2}\,dx-\int\frac{2}{(\log x)^3}\,dx$$

$$=\frac{1}{(\log x)^2}\int dx-\int\left[\frac{d\frac{1}{(\log x)^2}}{dx}\int dx\right]dx-\int\frac{2}{(\log x)^3}\,dx$$

$$=\frac{x}{(\log x)^2}-\int\frac{2}{(\log x)^3}\,\frac{1}{x}\,xdx-\int\frac{2}{(\log x)^3}\,dx$$

$$=\frac{x}{(\log x)^2}+\int\frac{2}{(\log x)^3}dx-\int\frac{2}{(\log x)^3}dx=\frac{x}{(\log x)^3}.$$

(ii) $\int\left[\frac{1}{(\log x)^n}-\frac{n}{(\log x)^{n+1}}\right]dx$

$$=\int\frac{dx}{(\log x)^n}-\int\frac{n}{(\log x)^{n+1}}\,dx$$

$$=\frac{1}{(\log x)^n}\int dx-\int\left\{\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(\log x)^n}\right]\int dx\right\}dx-\int\frac{n}{(\log x)^{n+1}}\,dx$$

$$=\frac{x}{(\log x)^n}-\int\frac{-n(\log x)^{-n-1}}{x}.xdx-\int\frac{n}{(\log x)^{n+1}}\,dx$$

$$=\frac{x}{(\log x)^n}+\int\frac{n}{(\log x)^{n+1}}dx-\int\frac{n}{(\log x)^{n+1}}dx=\frac{x}{(\log x)^n}.$$

উদা. 16. $\int\left[\log(\log x)+\frac{1}{(\log x)^2}\right]dx$

$$=\int\log(\log x)dx+\int\frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$=\log(\log x)\int dx-\int\left\{\frac{d}{dx}[\log(\log x)]\int dx\right\}dx+\int\frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$=x\log(\log x)-\int\frac{1}{x\log x}\,xdx+\int\frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$=x\log(\log x)-\int(\log x)^{-1}\,dx+\int\frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$=x\log(\log x)-(\log x)^{-1}\int dx+\int\left[\frac{d(\log x)^{-1}}{dx}\int dx\right]dx+\int\frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$=x\log(\log x)-x(\log x)^{-1}-\int\frac{1}{x(\log x)^2}x\,dx+\int\frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$=x\log(\log x)-\frac{x}{\log x}-\int\frac{dx}{(\log x)^2}+\int\frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$=x\log(\log x)-\frac{x}{\log x}.$$

উদা. 17. $\int\tan^{-1}\sqrt{x}\,dx=\tan^{-1}\sqrt{x}.\int dx-\int\left[\frac{d}{dx}(\tan^{-1}\sqrt{x}).\int dx\right]dx$

$$=x\tan^{-1}\sqrt{x}-\int\frac{1}{(1+x)2\sqrt{x}}x.\,dx$$

$$=x\tan^{-1}\sqrt{x}-\tfrac{1}{2}\int\frac{(1+x)-1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$$

$$=x\tan^{-1}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

$=x\tan^{-1}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\tfrac{1}{2}.I,$ (মনে কর,)

এখন, $I=\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$; মনে কর, $x=z^2$ $\therefore$ $dx=2zdz$

$$\therefore\quad I=\int\frac{2zdz}{(1+z^2)z}=2\int\frac{dz}{1+z^2}=2\tan^{-1}z=2\tan^{-1}\sqrt{x}.$$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল$=x\tan^{-1}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\frac{1}{2}2\tan^{-1}\sqrt{x}.$

$$=(x+1)\tan^{-1}\sqrt{x}-\sqrt{x}.$$

উদা. 18. (i) $\int\frac{1}{x^2}(\tan^{-1}x)dx=\tan^{-1}x\int\frac{dx}{x^2}-\int\left[\frac{d(\tan^{-1}x)}{dx}\int\frac{dx}{x^2}\right]dx$

$$=-\frac{\tan^{-1}x}{x}+\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx=-\frac{\tan^{-1}x}{x}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$=-\frac{\tan^{-1}x}{x}+\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{1+x^2}$$

$$=-\frac{\tan^{-1}x}{x}+\log x-\tfrac{1}{2}\log(1+x^2).$$

ii) $\int\sqrt{\frac{x}{a-x}}dx$ মনে কর, $x=a\sin^2\theta$;

$\therefore$ $dx=2a\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ এবং $\theta=\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}$

এখন, $\frac{x}{a-x}=\frac{a\sin^2\theta}{a(1-\sin^2\theta)}=\tan^2\theta$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int \tan\theta .\ 2a\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

$$=a\int 2\sin^2\theta\, d\theta=a\int(1-\cos 2\theta)d\theta=a\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]$$

$$=a\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{x}{a}}\sqrt{1-\frac{x}{a}}\right]=a\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{x(a-x)}$$

(iii) $\int\sqrt{\frac{a-x}{x}}dx$ মনে কর, $x=a\sin^2\theta$

$\therefore\ dx=2a\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

আবার, $\frac{a-x}{x}=\frac{a(1-\sin^2\theta)}{a\sin^2\theta}=\cot^2\theta$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int\cot\theta .\ 2a\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

$$=a\int 2\cos^2\theta\, d\theta=a\int(1+\cos 2\theta)d\theta=a\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]$$

$$=a[\theta+\sin\theta\cos\theta]=a\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{x}{a}}\sqrt{1-\frac{x}{a}}\right]$$

$$=a\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{x(a-x)}$$

উদা. 19. (i) $\int e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int e^x .\frac{dx}{1+\cos x}+\int e^x .\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

$$=\int e^x .\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}+\int e^x .\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int e^x .\sec^2\frac{x}{2}dx.+\int e^x\tan\frac{x}{2}dx.$$

$$=\frac{1}{2}\int e^x .\sec^2\frac{x}{2}dx+\tan\frac{x}{2}\int e^x dx-\int\left[\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{dx}\int e^x dx\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int e^x\sec^2\frac{x}{2}dx+e^x\tan\frac{x}{2}-\int e^x .\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}.dx=e^x\tan\frac{x}{2}.$$

(ii) $\int e^x .\frac{1-\sin x}{1-\cos x}dx=\int e^x .\frac{1}{1-\cos x}dx-\int e^x .\frac{\sin x}{1-\cos x}dx$

$$=\int\frac{e^x}{2\sin^2\frac{x}{2}}dx-\int e^x .\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int e^x \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}dx-\int e^x.\cot\frac{x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int e^x \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}dx-\cot\frac{x}{2}\int e^x dx+\int\left[\frac{d}{dx}\left(\cot\frac{x}{2}\right)\int e^x dx\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int e \ \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}dx-\cot\frac{x}{2}.\, e^x-\int e^x.\,\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}dx$$

$$=-e^x\cot\frac{x}{2}.$$

উদা. 20. $\int\sqrt{2ax-x^2}\,dx=\int\sqrt{a^2-a^2+2ax-x^2}\,dx$

$$=\int\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx=\int\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,d(x-a)$$

$$=\frac{(x-a)\sqrt{a^2-(x-a)^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x-a}{a}$$

$$=\frac{(x-a)\sqrt{2ax-a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x-a}{a}$$

উদা. 21. (i) $\int(x-1)\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int(2x-2)\sqrt{x^2-1}\,dx$

$$=\tfrac{1}{2}\int 2x\sqrt{x^2-1}\,dx-\int\sqrt{x^2-1}\,dx$$

$$=\tfrac{1}{2}\int\sqrt{x^2-1}\,d(x^2-1)-\int\sqrt{x^2-1}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+\tfrac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$=\tfrac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+\tfrac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

(ii) $\int(x-1)\sqrt{x^2-x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int(2x-2)\sqrt{x^2-x+1}\,dx$

$$=\tfrac{1}{2}\int(2x-1)\sqrt{x^2-x+1}\,dx-\tfrac{1}{2}\int\sqrt{x^2-x+1}\,dx$$

$$=\tfrac{1}{2}\int\sqrt{x^2-x+1}\,d(x^2-x+1)-\tfrac{1}{2}\int\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,d(x-\tfrac{1}{2})$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\left(x^2-x+1\right)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{1}{2}\log\left[(x-\tfrac{1}{2})+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]$$

$$=\tfrac{1}{3}(x^2-x+1)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{1}{2}\log\left[\frac{2x-1}{2}+\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{2}\right]$$

উদা. 22. (i) $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$ মনে কর, $x=a\cos 2\theta$

$$\therefore\ dx=-a\,2\sin 2\theta\,d\theta$$

এবং $\dfrac{a+x}{a-x}=\dfrac{a(1+\cos 2\theta)}{a(1-\cos 2\theta)}=\dfrac{2\cos^2\theta}{2\sin^2\theta}=\cot^2\theta$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$=\int \cot\theta.(-2a)\sin 2\theta\, d\theta$

$=-4a\int\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}.\sin\theta\cos\theta\, d\theta=-2a\int 2\cos^2\theta\, d\theta$

$=-2a\int(1+\cos 2\theta)d\theta=-2a\left[\theta+\dfrac{\sin 2\theta}{2}\right]$

$=-2a\left[\dfrac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{x}{a}+\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}{2}\right]=-a\cos^{-1}\dfrac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}$

(ii) $\int x\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}dx$ মনে কর, $x=a\cos 2\theta$

$\therefore\ dx=-a.2\sin 2\theta\, d\theta$

এবং $\dfrac{a-x}{a+x}=\dfrac{a-a\cos 2\theta}{a+a\cos 2\theta}=\dfrac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}=\tan^2\theta$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$=\int a\cos 2\theta.\tan\theta.(-2a\sin 2\theta)d\theta$

$=-2a^2\int\cos 2\theta.\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}.2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

$=-2a^2\int\cos 2\theta.(2\sin^2\theta)d\theta=-2a^2\int\cos 2\theta(1-\cos 2\theta)d\theta$

$=-2a^2\int(\cos 2\theta-\cos^2 2\theta)d\theta$

$=-2a^2\int[\cos 2\theta-\frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)]d\theta$

$=-2a^2\int(\cos 2\theta-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4\theta)d\theta$

$=-2a^2.\left[\dfrac{\sin 2\theta}{2}-\dfrac{1}{2}\theta-\dfrac{\sin 4\theta}{8}\right]$

$=-2a^2\left[\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}{2}-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{x}{a}-\dfrac{2.\dfrac{x}{a}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}{8}\right]$

$=-a\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\cos^{-1}\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$

$=(\frac{1}{2}x-a)\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\cos^{-1}\dfrac{x}{a}.$

উদা. 23. $\int\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\,dx$ মনে কর, $x=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta$

$\therefore\ dx=(-2\alpha\cos\theta\sin\theta+2\beta\sin\theta\cos\theta)d\theta$

$=2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

$(x-\alpha)=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta-\alpha$

$\qquad=\beta\sin^2\theta-\alpha\sin^2\theta=(\beta-\alpha)\sin^2\theta$

$(\beta-x)=\beta-\alpha\cos^2\theta-\beta\sin^2\theta$

$\qquad=\beta\cos^2\theta-\alpha\cos^2\theta=(\beta-\alpha)\cos^2\theta$

$\therefore\quad \sqrt{(\beta-\alpha)\sin^2\theta.\,(\beta-\alpha)\cos^2\theta}=(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta.\,2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$$=2(\beta-\alpha)^2\int\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}\int\sin^2 2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}\int(1-\cos 4\theta)d\theta=\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}\left[\theta-\frac{\sin 4\theta}{4}\right]$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}\left[\theta-\frac{\sin 2\theta\cos 2\theta}{2}\right]\quad\cdots\quad\cdots\text{(i)}$$

এক্ষণে, $x-\alpha=(\beta-\alpha)\sin^2\theta$, বা, $\sin^2\theta=\dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$

বা, $\sin\theta=\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}$

আবার, $\sin 4\theta=2\sin 2\theta\cos 2\theta=4\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$$=4\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}\sqrt{1-\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}\left(\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}-\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$$

$$=4\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}\sqrt{\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}}\left(\frac{\alpha+\beta-2x}{\beta-\alpha}\right).$$

$$=\frac{4}{(\beta-\alpha)^2}\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}(\alpha+\beta-2x)$$

সুতরাং (i) হইতে, প্রদত্ত সমাকল

$$=\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}+\tfrac{1}{4}(2x-\alpha-\beta)\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$$

$$=\tfrac{1}{4}\left[(2x-\alpha-\beta)\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}+(\beta-\alpha)^2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}\right]$$

প্রশ্নমালা—III

সমাকলন কর :

1. (i) $\int x\cos mx\,dx$, (ii) $\int x\log x\,dx$

2. (i) $\int x\sec^2\frac{x}{2}dx$, (ii) $\int x^2 e^{-x}dx$, (iii) $\int x^2\sin^{-1}x\,dx$

3. (i) $\int x^3 (\log x)^3 \, dx$, (ii) $\int x^2 \sin x \cos x \, dx$

4. (i) $\int \log(x+\sqrt{x^2+a^2})dx$, (ii) $\int \frac{\log(\log x)}{x} dx$

5. (i) $\int x \cos^3 x \sin x \, dx$, (ii) $\int x \sin^3 x \, dx$

6. (i) $\int \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2} dx$, (ii) $\int \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2} dx$,

(iii) $\int \frac{\sin^{-1} 2x}{1+x^2} dx$

7. (i) $\int e^x(\log \sin x + \cot x)dx$, (ii) $\int e^{2x} . \frac{1+\sin 2x}{1+\cos 2x} dx$

8. (i) $\int e^x . \cos 2x \cos 3x \, dx$ (ii) $\int e^{-x} \sin 2x \, dx$

9. $\int \frac{e^{m \tan^{-1} x}}{(1+x^2)^2} dx$

10. $\int x^3 e^x . \sin x \, dx$

11. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$

12. $(4x+5)\int \sqrt{2x^2+3x+4} \, dx$.

13. $\int \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} \, dx$.

14. $\int \frac{(x+1)\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} dx$

8

ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক সমূহের সমাকল

(Integration of Trigonometric Functions)

4·1. এখানে sine, cosine এর মূলদ অপেক্ষক এবং অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের সমাকলন করা হইবে। কিছু কিছু আদর্শ সমাকলের সূত্র নীচে দেওয়া হইল :

(i) $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$

(ii) $\int \sec x \, dx = \log \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|$

(iii) $\int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2}$, যদি $a^2 > b^2$ হয়

(iv) $\int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \left| \frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a} \tan \frac{x}{2}}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a} \tan \frac{x}{2}} \right|$,

যদি $a^2 < b^2$ হয়।

(v) $\int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{1}{a} \tan \frac{x}{2}$, যদি $a = b$ হয়।

উদাহরণমালা IV-A

উদা. 1. $\int \frac{dx}{5+4 \cos x} = \frac{dx}{5\left(\cos^2 \frac{x}{2}+\sin^2 \frac{x}{2}\right)+4\left(\cos^2 \frac{x}{2}-\sin^2 \frac{x}{2}\right)}$

$$= \int \frac{dx}{9 \cos^2 \frac{x}{2}+\sin^2 \frac{x}{2}} = 2 \int \frac{\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx}{9+\tan^2 \frac{x}{2}}$$

এখন, মনে কর $\tan \frac{x}{2} = z \quad \therefore \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx = dz$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $= 2\int \frac{dz}{z^2+9} = 2 . \frac{1}{3} . \tan^{-1} \frac{z}{3} = \frac{2}{3} \tan^{-1} \left(\frac{1}{3} \tan \frac{x}{2} \right)$

উদা. 2. $\int \frac{dx}{5+4\sin x} = \int \frac{dx}{5\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+4\,2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$= \int \frac{dx}{5\cos^2\frac{x}{2}+8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+5\sin^2\frac{x}{2}} = 2\int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx}{5+8\tan\frac{x}{2}+5\tan^2\frac{x}{2}}$$

এখন, মনে কর, $\tan\frac{x}{2}=z \qquad \therefore\ \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=2\int \frac{dz}{5z^2+8z+5} = \frac{2}{5}\int \frac{dz}{z^2+\frac{8}{5}z+1}$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{dz}{(z+\frac{4}{5})^2+(\frac{3}{5})^2} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\frac{3}{5}}\tan^{-1}\frac{z+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{5z+4}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{5\tan\frac{x}{2}+4}{3}.$$

উদা. 3. $\int \frac{\sec x dx}{a+b\tan x} = \int \frac{dx}{a\cos x+b\sin x}$

[লব ও হরকে $\cos x$ দ্বারা গুণ করিয়া]

$$= \int \frac{dx}{a\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)+2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{dx}{a\cos^2\frac{x}{2}+2.b.\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-a\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= 2\int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx}{a+2b\tan\frac{x}{2}-a\tan^2\frac{x}{2}}$$

এখন, মনে কর, $\tan\frac{x}{2}=z$; $\therefore\ \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=2\int \frac{dz}{a+2bz-az^2} = \frac{2}{a}\int \frac{dz}{1+\frac{2b}{a}z-z^2}$

$$=\frac{2}{a}\int\frac{dz}{1+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}+\frac{2b}{a}z-z^2}=\frac{2}{a}\int\frac{dz}{\frac{a^2+b^2}{a^2}-\left(z-\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}}\log\frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}+\left(z-\frac{b}{a}\right)}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}-\left(z-\frac{b}{a}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\frac{\sqrt{a^2+b^2}+(az-b)}{\sqrt{a^2+b^2}-(az-b)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\left(a\tan\frac{x}{2}-b\right)}{\sqrt{a^2+b^2}-\left(a\tan\frac{x}{2}-b\right)}$$

[**বিকল্প পদ্ধতি ঃ** $\int\frac{\sec x\,dx}{a+b\tan x}=\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x}$

মনে কর, $a=r\sin\theta,\quad b=r\cos\theta$

সুতরাং $r^2=a^2+b^2$ বা, $r=\sqrt{a^2+b^2}$

এবং $\tan\theta=\frac{a}{b}$ বা, $\theta=\tan^{-1}\frac{a}{b}$.

এখন, প্রদত্ত সমাকল $=\int\frac{dx}{r(\sin\theta\cos x+\cos\theta\sin x)}=\frac{1}{r}\int\frac{dx}{\sin(x+\theta)}$

$$=\frac{1}{r}\int\operatorname{cosec}(x+\theta)d\theta=\frac{1}{r}\log\tan\frac{x+\theta}{2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\tan\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{a}{b}\right].\ ]$$

উদা. 4. $\int\frac{dx}{4+3\tan x}=\int\frac{\cos x\,dx}{4\cos x+3\sin x}$

এখন, মনে কর, $l(4\cos x+3\sin x)+m(-4\sin x+3\cos x)=\cos x$

$\therefore\ 4l+3m=1$ এবং $3l-4m=0$

$\therefore\ l=\frac{4}{25},\quad m=\frac{3}{25}$.

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল

$$=\int\frac{\frac{4}{25}(4\cos x+3\sin x)+\frac{3}{25}(-4\sin x+3\cos x)}{4\cos x+3\sin x}dx$$

$$=\int\frac{4}{25}dx+\frac{3}{25}\int\frac{-4\sin x+3\cos x}{4\cos x+3\sin x}dx$$

$$=\tfrac{4}{25}x+\tfrac{3}{25}\log(4\cos x+3\sin x).$$

উদা. 5. $\int\frac{dx}{a^2-b^2\cos^2 x}=\int\frac{\sec^2 x\,dx}{a^2\sec^2 x-b^2}$

$$=\int\frac{\sec^2 x\,dx}{a^2\tan^2 x+a^2-b^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\sec^2 x\,dx}{\tan^2 x+\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$

মনে কর, $\tan x=z$ $\quad\therefore\quad \sec^2 x\,dx=dz$

(i) যদি $a^2>b^2$ হয় তবে,

প্রদত্ত সমাকল $=\frac{1}{a^2}\int\frac{dz}{z^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}}\tan^{-1}\frac{z}{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}$

$$=\frac{1}{a\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\frac{az}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{1}{a\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\frac{a\tan x}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

(ii) যদি $a^2<b^2$ হয় তবে,

প্রদত্ত সমাকল $=\frac{1}{a^2}\int\frac{dz}{z^2-\frac{b^2-a^2}{a^2}}$

$$=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2}}}\log\frac{z-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2}}}{z+\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2}}}$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{az-\sqrt{b^2-a^2}}{az+\sqrt{b^2-a^2}}$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{a\tan x-\sqrt{b^2-a^2}}{a\tan x+\sqrt{b^2-a^2}}$$

(iii) যদি $a^2=b^2$ হয় তবে,

প্রদত্ত সমাকল $=\int\frac{dx}{a^2(1-\cos^2 x)}=\frac{1}{a^2}\int\operatorname{cosec}^2 x\,dx.=-\frac{1}{a^2}\cot x.$

উদা. 6. $\int\sin^3 x\,dx=\int\sin^2 x\sin x\,dx$

$$=-\int(1-\cos^2 x)(-\sin x)\,dx$$

মনে কর, $\cos x=z$; $\quad\therefore\quad -\sin x\,dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=-\int(1-z^2)\,dz$

$$=-z+\frac{z^3}{2}=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}$$

উদা. 7. $\int\cos^4 x\, dx=\int(\cos^2 x)^2\, dx=\int[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)]^2\, dx$

$=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\, dx$

$=\frac{1}{4}\int[1+2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)]\, dx$

$=\frac{1}{4}\int(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x)\, dx$

$=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x+2.\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{2}.\frac{\sin 4x}{4}\right]$

$=\frac{1}{32}[12x+8\sin 2x+\sin 4x].$

উদা. 8. $\int\sin^4 x\cos^4 x\, dx=\frac{1}{16}\int(2\sin x\cos x)^4\, dx$

$=\frac{1}{16}\int\sin^4 2x.dx=\frac{1}{16}\int(\sin^2 2x)^2\, dx$

$=\frac{1}{16}\int[\frac{1}{2}(1-\cos 4x)]^2\, dx=\frac{1}{16}.\frac{1}{4}\int[1-2\cos 4x+\cos^2 4x]\, dx$

$=\frac{1}{64}\int[1-2\cos 4x+\frac{1}{2}(1+\cos 8x)]\, dx$

$=\frac{1}{64}\left[\frac{3}{2}x-\frac{\sin 4x}{2}+\frac{\sin 8x}{16}\right].$

$=\frac{1}{1024}[24x-8\sin 4x+\sin 8x].$

উদা. 9. $\int\sqrt{\sin x}\cos^3 x\, dx=\int\sqrt{\sin x}\cos^2 x\cos x\, dx$

$=\int\sqrt{\sin x}\,(1-\sin^2 x)\cos x\, dx$

মনে কর $\sin x=z$; $\therefore\ \cos x\, dx=dz$

প্রদত্ত সমাকল $=\int\sqrt{z}(1-z^2)\, dz=\int(z^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{3}{2}})\, dz$

$=\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}}=\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x-\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x.$

উদা. 10. $\int\frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\sin x\, dx.$

মনে কর, $\cos x=z$ $\quad\therefore\ -\sin x\, dx=dz$

$\therefore\ \sin^4 x=(1-\cos^2 x)^2=(1-z^2)^2$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int\frac{(1-z^2)^2}{z^2}dz=\int\frac{1-2z^2+z^4}{z^2}\, dz$

$=\int\left(\frac{1}{z^2}-2+z^2\right)dz=-\frac{1}{z}-2z+\frac{z^3}{3}$

$=-\frac{1}{\cos x}-2\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}.$

উদা. 11. $\int\frac{dx}{\sin x\cos^3 x}=\int\frac{dx}{\frac{\sin x}{\cos x}.\cos^4 x}=\int\frac{\sec^2 x.\sec^2 x\, dx}{\tan x}$

মনে কর, $\tan x=z,\quad \sec^2 x\, dx=dz.$

প্রদত্ত সমাকল $=\int\frac{(1+z^2)\ dx}{z}=\int\left(\frac{1}{z}+z\right) dx$

$$=\log z+\frac{z^2}{2}=\log \tan x+\frac{\tan^2 x}{2}.$$

উদা. 12. $\int\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\, dx=\int\cot^2 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx$

মনে কর, $\cot x=z$; $\therefore\ -\operatorname{cosec}^2 x\, dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=-\int z^2 dz=-\frac{z^3}{3}=-\frac{\cot^3 x}{3}.$

উদা. 13. $\int\sec^3 x\, dx=\int\sec^2 x \sec x\, dx$

$$=\sec x\int\sec^2 x\, dx-\int\left[\frac{d(\sec x)}{dx}\int\sec^2 x\, dx\right] dx$$

$$=\sec x \tan x-\int\sec x \tan^2 x\, dx$$

$$=\sec x \tan x-\int\sec^3 x\, dx+\int \sec x\, dx$$

$\therefore\ 2\int\sec^3 x\, dx=\sec x \tan x+\int\sec x\, dx$

$$=\sec x \tan x+\log\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]$$

$\therefore\ \int\sec^3 x\, dx=\frac{1}{2}\sec x \tan x+\frac{1}{2}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$

উদা. 14. $\int\sec^4 x.dx=\int\sec^2 x.\sec^2 x\, dx=\int(1+\tan^2 x)\sec^2 x\, dx$

মনে কর, $\tan x=z$, $\therefore\ \sec^2 x\, dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$=\int(1+z^2)\, dz=z+\frac{z^3}{3}=\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}.$

উদা. 15. $\int\tan^3 x\, dx=\int\tan x \tan^2 x\, dx$

$$=\int\tan x\,(\sec^2 x-1)\, dx=\int\tan x \sec^2 x\, dx-\int\tan x\, dx$$

এখন, $\int\tan x \sec^2 x\, dx$-এ $\tan x=z$ ধর $\therefore\ \sec^2 x\, dx=dz$

সুতরাং $\int\tan x \sec^2 x\, dx=\int z.dz=\frac{z^2}{2}=\frac{\tan^2 x}{2}$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল$=\frac{1}{2}\tan^2 x-\log\sec x.$

উদা. 16. $\int\cot^4 x\, dx=\int\cot^2 x(\operatorname{cosec}^2 x-1)\, dx$

$$=\int\cot^2 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx-\int(\operatorname{cosec}^2 x-1)\, dx$$

$=-\frac{\cot^3 x}{3}+\cot x+x$; [প্রথম সমাকলে $\cot x=z$ ধরিয়া কর]

উদা. 17. $\int\left(\frac{\tan x}{\cos x}\right)^4 dx=\int\tan^4 x\sec^2 x\sec^2 x\,dx$

এখন, মনে কর $\tan x=z$; $\therefore\ \sec^2 x\,dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int z^4(1+z^2)\,dz=\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}=\frac{\tan^5 x}{5}+\frac{\tan^7 x}{7}.$

উদাহরণমালা—IV-B

সমাকলন কর :

1. (i) $\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$, (ii) $\int\frac{dx.}{5-3\sin x+4\cos x}$

2. (i) $\int\frac{dx}{\cos a+\cos x}$, (ii) $\int\frac{dx}{a+b\sin x}$

3. (i) $\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$, (ii) $\int\frac{\cos x\,dx}{2\sin x+3\cos x}$,

(iii) $\int\frac{dx}{a+b\tan x}$, (iv) $\int\frac{dx}{1+\cos\alpha\cos x}$

4. (i) $\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$, (ii) $\int\frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$

5. (i) $\int\frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x\cos x}\,dx$, (ii) $\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}$

6. (i) $\int\sin^2 x\,dx$, (ii) $\int\cos^3 x\,dx$, (iii) $\int\cos^5 x\,dx$

7. (i) $\int\sin^3 x\cos^3 x\,dx$, (ii) $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^{\frac{2}{3}} x}\,dx$, (iii) $\int\frac{dx}{\sin^{\frac{5}{2}} x\cos^{\frac{3}{2}} x}$

8. (i) $\int\tan^4 x\operatorname{cosec}^4 x\,dx$ (ii) $\int\sec^5 x\,dx$ (iii) $\int\operatorname{cosec}^4 x\,dx.$

সমাধান :

উদা. 1. (i) $\int\frac{ax}{3\sin x+4\cos x}$

$$=\int\frac{dx}{3.2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+4\cos^2\frac{x}{2}-4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\int\frac{dx}{4\left(\cos^2\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\int\frac{\frac{1}{4}\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{1+\frac{3}{2}\tan\frac{x}{2}-\tan^2\frac{x}{2}}$$

মনে কর, $\tan\frac{x}{2}=z$ $\therefore\ \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{1+\frac{3}{2}z-z^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\frac{25}{16}-\frac{9}{16}+\frac{3}{2}z-z^2}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(z-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2.\frac{5}{4}}\log\frac{\frac{5}{4}+(z-\frac{3}{4})}{\frac{5}{4}-(z-\frac{3}{4})}$$

$$=\frac{1}{5}\log\frac{5+4z-3}{5-4z+3}=\frac{1}{5}\log\frac{1+2\tan\frac{x}{2}}{4-2\tan\frac{x}{2}}.$$

(ii) $\int\frac{dx}{5-3\sin x+4\cos x}$

$$=\int\frac{dx}{5\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)-6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+4\cos^2\frac{x}{2}-4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\int\frac{dx}{9\cos^2\frac{x}{2}-6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=2\int\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{\tan^2\frac{x}{2}-6\tan\frac{x}{2}+9}=2\int\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{\left(\tan\frac{x}{2}-3\right)^2}$$

মনে কর, $\tan\frac{x}{2}-3=z$ $\therefore\ \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=2\int\frac{dz}{z^2}=-\frac{2}{z}=-\frac{2}{\tan\frac{x}{2}-3}.$

উদা. 2. (i) $\int\frac{dx}{\cos a+\cos x}$

$$=\int\frac{dx}{\cos a\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\int\frac{dx}{(1+\cos a)\cos^2\frac{x}{2}-(1-\cos a)\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{2\cos^2\frac{a}{2}-2\sin^2\frac{a}{2}\tan^2\frac{x}{2}}=\int\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx}{\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\frac{a}{2}}\int\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx}{\cot^2\frac{a}{2}-\tan^2\frac{x}{2}}$$

মনে কর, $\tan\frac{x}{2}=z \quad \therefore \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx=dz$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\dfrac{1}{\sin^2\frac{a}{2}}\displaystyle\int\frac{dz}{\cot^2\frac{a}{2}-z^2}$

$$=\frac{1}{\sin^2\frac{a}{2}}\cdot\frac{1}{2\cot\frac{a}{2}}\cdot\log\frac{\cot\frac{a}{2}+z}{\cot\frac{a}{2}-z}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}\log\frac{\cos\frac{a}{2}+\sin\frac{a}{2}\tan\frac{x}{2}}{\cos\frac{a}{2}-\sin\frac{a}{2}\tan\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sin a}\log\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sin a}\log\frac{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{a}{2}\right)}=\frac{1}{\sin a}\log\frac{\cos\frac{1}{2}(x-a)}{\cos\frac{1}{2}(x+a)}$$

(ii) $\displaystyle\int\frac{dx}{a+b\sin x}=\int\frac{dx}{a\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{a+2b\tan\frac{x}{2}+a\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2}{a}\int\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx}{1+\frac{2b}{a}\tan\frac{x}{2}+\tan^2\frac{x}{2}}$$

মনে কর, $\tan\frac{x}{2}=z$; $\therefore \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx=dz$

$$\therefore \quad \text{প্রদত্ত সমাকল} = \frac{2}{a}\int \frac{dz}{z^2+\frac{2b}{a}z+1} = \frac{2}{a}\int \frac{dz}{\left(z+\frac{b}{a}\right)^2+\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}$$

(a) $a^2>{}^2b$ হইলে, প্রদত্ত সমাকল $= \dfrac{2}{a}\displaystyle\int \frac{dz}{\left(z+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}}$

$$= \frac{2}{a}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}}\tan^{-1}\frac{z+\frac{b}{a}}{\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\frac{az+b}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

(b) $a^2<b^2$ হইলে, প্রদত্ত সমাকল $= \dfrac{2}{a}\displaystyle\int \frac{dz}{\left(z+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2-a^2}{a^2}}$

$$= \frac{2}{a}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2}}}\log\frac{\left(z+\frac{b}{a}\right)-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2}}}{\left(z+\frac{b}{a}\right)+\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{az+b-\sqrt{b^2-a^2}}{az+b+\sqrt{b^2-a^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{a\tan\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}$$

উদা. 3. (i) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \frac{1}{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)+(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)}dx$

$$= \frac{1}{2}\int\left(1+\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\right)dx = \tfrac{1}{2}[x+\log(\sin x+\cos x)].$$

(ii) $\displaystyle\int\frac{\cos x\,dx}{2\sin x+3\cos x}$

মনে কর, $\cos x = l(2\sin x+3\cos x)+m(2\cos x-3\sin x)$

$$= (3l+2m)\cos x+(2l-3m)\sin x.$$

সুতরাং $3l+2m=1, \quad 2l-3m=0 \quad$ বা, $\; l=\frac{3}{13}, \quad m=\frac{2}{13}.$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল

$$=\int\frac{\frac{3}{13}(2\sin x+3\cos x)+\frac{2}{13}(2\cos x-3\sin x)}{(2\sin x+3\cos x)}dx$$

$$=\int\left[\frac{3}{13}+\frac{2}{13}\cdot\frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}\right]dx$$

$$=\tfrac{3}{13}x+\tfrac{2}{13}\log(2\sin x+3\cos x).$$

(iii) $$\int\frac{dx}{a+b\tan x}=\int\frac{\cos x\,dx}{a\cos x+b\sin x}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\int\frac{a(a\cos x+b\sin x)+b(-a\sin x+b\cos x)}{(a\cos x+b\sin x)}dx$$

$$=\frac{a}{a^2+b^2}\int dx+\frac{b}{a^2+b^2}\int\frac{(-a\sin x+b\cos x)}{(a\cos x+b\sin x)}dx$$

$$=\frac{a}{a^2+b^2}x+\frac{b}{a^2+b^2}\log(a\cos x+b\sin x).$$

(iv) $$\int\frac{dx}{1+\cos\alpha\cos x}$$

$$=\int\frac{dx}{\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+\cos\alpha\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\int\frac{dx}{(1+\cos\alpha)\cos^2\frac{x}{2}+(1-\cos\alpha)\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=2\int\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{(1+\cos\alpha)+(1-\cos\alpha)\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$=2\int\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\int\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx}{\cot^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{x}{2}}$$

মনে কর, $\tan\frac{x}{2}=z$ $\quad\therefore\quad \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx=dz$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $= \dfrac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \displaystyle\int \dfrac{dz}{z^2+\cot^2 \frac{\alpha}{2}}$

$$= \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\cot \frac{\alpha}{2}} \tan^{-1} \frac{z}{\cot \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\sin \alpha} \tan^{-1} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\cot \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sin \alpha} \tan^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \tan \frac{\alpha}{2} \right).$$

উদা. 4. (i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^2 x} dx$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{dx}{\sin x} = \int \sec x \tan x \, dx + \int \operatorname{cosec} x \, dx$$

$$= \sec x + \log \tan \frac{x}{2}.$$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$

$$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin x \cdot \cos^3 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos^3 x} dx$$

$$= \int \tan x \sec^2 x \, dx + 2 \int \frac{1}{\sin 2x} dx$$

$$= \int \tan x \, d(\tan x) + 2 \int \operatorname{cosec} 2x \, dx = \frac{\tan^2 x}{2} + \log \tan x$$

উদা. 5. (i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{\sqrt{\tan x} \sec^2 x}{\tan x} dx$

$$= \int \frac{\sec^2 x \, dx}{\sqrt{\tan x}} = \int \frac{d(\tan x)}{\sqrt{\tan x}} = 2\sqrt{\tan x}.$$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{\sec^2 x \, dx}{\sec^2 x + 1} = \int \frac{\sec^2 x \, dx}{\tan^2 x + 2}$

$$= \int \frac{d(\tan x)}{\tan^2 x + (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{\tan x}{\sqrt{2}}$$

উদা. 6. (i) $\displaystyle\int \sin^2 x \, dx = \tfrac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right)$

$$= \tfrac{1}{2}(x - \sin x \cos x).$$

(ii) $\int\cos^3 x\,dx=\int\cos^2 x\cos x\,dx=\int(1-\sin^2 x)d(\sin x)$

$=\sin x-\dfrac{\sin^3 x}{3}.$

(iii) $\int\cos^5 x\,dx=\int\cos^4 x\cos x\,dx=\int(1-\sin^2 x)^2\,d(\sin x)$

$=\int(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)d(\sin x)=\sin x-\dfrac{2\sin^3 x}{3}+\dfrac{\sin^5 x}{5}$

উদা. 7. (i) $\int\sin^3 x\cos^3 x\,dx=\frac{1}{8}\int 8\sin^3 x\cos^3 x\,dx$

$=\frac{1}{8}\int\sin^3 2x\,dx=\frac{1}{8}.\int\dfrac{3\sin 2x-\sin 6x}{4}dx$

$=\frac{1}{8}.\left(\dfrac{-3\cos 2x}{8}+\dfrac{\cos 6x}{24}\right)=\frac{1}{192}(\cos 6x-9\cos 2x).$

(ii) $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x}{\sin^{\frac{2}{3}}x}dx=\int\frac{\cos^2 x\cos x}{\sin^{\frac{2}{3}}x}dx=\int\frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin^{\frac{2}{3}}x}dx$

মনে কর, $\sin x=z$ $\quad\therefore\quad \cos x\,dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$=\displaystyle\int\frac{1-z^2}{z^{\frac{2}{3}}}dz=\int\left(z^{-\frac{2}{3}}-z^{\frac{4}{3}}\right)dz=3z^{\frac{1}{3}}-\frac{3}{7}z^{\frac{7}{3}}$

$=3\sin^{\frac{1}{3}}x-\frac{3}{7}\sin^{\frac{7}{3}}x.$

(iii) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^{\frac{5}{2}}x\cos^{\frac{3}{2}}x}=\int\frac{dx}{\dfrac{\sin^{\frac{5}{2}}x}{\cos^{\frac{5}{2}}x}\cos^4 x}=\int\frac{(1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx}{\tan^{\frac{5}{2}}x}$

মনে কর, $\tan x=z$ $\quad\therefore\quad \sec^2 x\,dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$=\displaystyle\int\frac{1+z^2}{z^{\frac{5}{2}}}dz=\int(z^{-\frac{5}{2}}+z^{-\frac{1}{2}})dz=-\frac{2}{3}z^{-\frac{3}{2}}+2z^{\frac{1}{2}}$

$=-\frac{2}{3}\tan^{-\frac{3}{2}}x+2\sqrt{\tan x}.$

উদা. 8. (i) $\displaystyle\int\tan^4 x\,\mathrm{cosec}^4 x\,dx=\int\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\mathrm{cosec}^4 x\,dx.$

$=\int\sec^4 x\,dx=\int(1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx$

$=\int(1+\tan^2 x)d(\tan x)=\tan x+\dfrac{\tan^3 x}{3}.$

(ii) $\int\sec^5 x\,dx=\int\sec^3 x.\sec^2 x\,dx$

$=\sec^3 x.\tan x-\int 3\sec^2 x.\sec x\tan x\tan x\,dx$

$$=\sec^3 x \tan x - 3\int \sec^3 x(\sec^2 x - 1)dx$$

$$=\sec^3 x \tan x - 3\int \sec^5 x\, dx + 3\int \sec^3 x\, dx.$$

$\therefore\quad 4\int \sec^5 x\, dx = \sec^3 x \tan x + 3\int \sec^3 x\, dx$

আবার, $\int \sec^3 x\, ax = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

সুতরাং $4\int \sec^5 x\, dx = \sec^3 x \tan x + \frac{3}{2}\sec x \tan x + \frac{3}{2}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

$\therefore\quad \int \sec^5 x\, dx = \frac{1}{4}\sec^3 x \tan x + \frac{3}{8}\sec x \tan x + \frac{3}{8}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

(iii) $\int \operatorname{cosec}^4 x\, dx = \int (1+\cot^2 x)\operatorname{cosec}^2 x\, dx$

$$=-\int (1+\cot^2 x)d(\cot x) = = -\cot x - \frac{\cot^3 x}{3}.$$

প্রশ্নমালা IV

সমাকলন কর :

1. (i) $\int \operatorname{cosec} 2x\, dx.$ (ii) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x}dx.$

2. (i) $\int \frac{\cos x}{\cos 2x}dx,$ (ii) $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx,$ (iii) $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx.$

3. (i) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x}dx$ (ii) $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x}dx.$

4. (i) $\int \frac{\sin x}{\sin 2x}dx,$ (ii) $\int \frac{dx}{\sin^{\frac{5}{2}} x \cos^{\frac{7}{2}} x}$ [$\tan x = z$ ধর]

5. $\int \frac{dx}{1+\sin 2x}.$ 6. $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}.$

7. $\int \frac{dx}{(3\sin x + 4\cos x)^2}.$

8. (i) $\int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x},$ (ii) $\int \frac{dx}{4-5\sin^2 x}.$

9. (i) $\int \frac{dx}{1-\cos x + \sin x},$ (ii) $\int \frac{6+3\sin x + 14\cos x}{3+4\sin x + 5\cos x}dx.$

10. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^2 x}\, dx.$

৫

আংশিক ভগ্নাংশের সমাকলন

(Integration of Rational Functions)

5.1. এই অংশে কতগুলি বীজগণিতিক অপেক্ষকের যাহার লবের বহুপদটির মাত্রা হরের বহুপদের মাত্রা অপেক্ষা কম সমাকলন করা হইবে। হরের বহুপদটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলে নিম্নোক্ত ধরনের কোনও একটি হইবে।

(i) একঘাত ও অনাবৃত্ত।

(ii) একঘাত ও পুনরাবৃত্ত।

(iii) অনাবৃত্ত দ্বিঘাত।

(vi) পুনরাবৃত্ত দ্বিঘাত।

উদাহরণমালা V-A

উদা. 1. $\int\frac{2x+1}{x(x+1)}\,dx$

মনে কর, $\frac{2x+1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$ বা, $2x+1=A(x+1)+B(x)$

এখন, $x=0$ বসাইয়া $A=1$ এবং $x=-1$ বসাইয়া $B=+1$

সুতরাং, প্রদত্ত সমাকল $=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)dx=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x+1}$

$=\log x+\log(x+1)=\log x(x+1).$

উদা. 2. $\int\frac{x\,dx}{(x-a)(x-b)}$

মনে কর, $\frac{x}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$

$\therefore\quad x=A(x-b)+B(x-a)$

এখন, $x=a$ বসাইলে $A=\frac{a}{a-b}$ এবং $x=b$ বসাইলে $B=\frac{b}{b-a}$

সুতরাং, প্রদত্ত সমাকল $=\int\left[\frac{a}{(a-b)(x-a)}+\frac{b}{(b-a)(x-b)}\right]dx$

$$=\frac{a}{a-b}\int\frac{dx}{x-a}-\frac{b}{a-b}\int\frac{dx}{x-b}=\frac{a}{a-b}\log(x-a)-\frac{b}{a-b}\log(x-b)$$

$$=\frac{1}{a-b}\log\frac{(x-a)^a}{(x-b)^b}.$$

উদা. 3. $\int\frac{2x+1}{x^3+x^2-2x}\,dx$

$$\frac{2x+1}{x^3+x^2-2x}=\frac{2x+1}{x(x-1)(x+2)}$$

মনে কর, $\frac{2x+1}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$

$\therefore\quad 2x+1=A(x-1)(x+2)+B\,x(x+2)+C\,x(x-1)$

এখন, $x=0$ বসাইয়া $A=-\frac{1}{2}$, $x=1$ বসাইয়া $B=1$, $x=-2$ বসাইয়া $C=\frac{1}{2}$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+2}\right)dx$

$$=-\tfrac{1}{2}\log x+\log(x-1)+\tfrac{1}{2}\log(x+2)$$

$$=\log(x-1)+\tfrac{1}{2}\log\frac{x+2}{x}.$$

উদা. 4. $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$

মনে কর, $\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$

$\therefore\quad 1=A\,(x+1)^2+B\,x(x+1)+Cx.$

এখন, $x=0$ বসাইয়া, $A=1$ এবং $x=-1$ বসাইয়া, $C=-1$

আবার, x-এর সহগ সমাধান করিয়া পাওয়া যায়

$2A+B+C=0 \qquad \therefore\ B=-1$

সুতরাং, প্রদত্ত সমাকল $=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]dx$

$$=\log x-\log(x+1)+\frac{1}{x+1}=\log\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}.$$

উদা. 5. $\int\frac{x\,dx}{(x-a)^2(x-b)}$

মনে কর, $\frac{x}{(x-a)^2(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{(x-b)}$

$\therefore\quad x=A\,(x-a)(x-b)+B\,(x-b)+C\,(x-a)^2$

এখন, $x=a$ বসাইয়া $B=\dfrac{a}{a-b}$ এবং $x=b$ বসাইয়া $C=\dfrac{b}{(b-a)^2}$

আবার, x^2এর সহগ সমাধান করিয়া পাওয়া যায়

$$0=A+C \qquad \therefore \quad A=-C=-\frac{b}{(b-a)}$$

সুতরাং, প্রদত্ত সমাকল $=\displaystyle\int\frac{-\frac{b}{(b-a)^2}}{x-a}dx+\int\frac{\frac{a}{a-b}}{(x-a)^2}dx+\int\frac{\frac{b}{(b-a)^2}}{(x-b)}dx$

$$=-\frac{b}{(b-a)^2}\log(x-a)-\frac{a}{a-b}\,\frac{1}{(x-a)}+\frac{b}{(b-a)^2}\log(x-b).$$

উদা. 6. $\dfrac{x^2+6x+11}{(x+2)^3}dx$

মনে কর, $\dfrac{x^2+6x+11}{(x+2)^3}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{(x+2)^2}+\dfrac{C}{(x+2)^3}$

$\therefore\quad x^2+6x+11=A(x+2)^2+B(x+2)+C$

এখন, $x=-2$ বসাইয়া পাওয়া যায় $C=3$

আবার, x^2-এর সহগ সমাধান করিলে $A=1$

এবং x^0-এর সহগ সমাধান করিলে $4A+2B+C=11$; $\therefore\quad B=2$

সুতরাং, প্রদত্ত সমাকল $=\displaystyle\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{2}{(x+2)^2}dx+\frac{3}{(x+2)^3}dx$

$$=\log(x+2)-\frac{2}{x+2}-\frac{3}{2}\frac{1}{(x+2)^2}.$$

উদা. 7. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+1}$

মনে কর, $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$

$\therefore\quad 1=A(x^2-x+1)+(x+1)(Bx+C)$; $x=-1$ বসাইলে $A=\frac{1}{3}$

এখন, x^2-এর সহগ সমাধান করিলে $A+B=0$; বা, $B=-\frac{1}{3}$

এবং x^0-এর সহগ সমাধান করিলে $A+C=1$; বা, $C=\frac{2}{3}$

সুতরাং, প্রদত্ত সমাকল $=\displaystyle\int\frac{\frac{1}{3}}{x+1}dx+\int\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx$

$$=\frac{1}{3}\log(x+1)-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\log(x+1)-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1-3}{x^2-x+1}dx$$

$$=\tfrac{1}{3}\log(x+1)-\tfrac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2-x+1}\,dx+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$=\tfrac{1}{3}\log(x+1)-\tfrac{1}{6}\log(x^2-x+1)+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\tfrac{1}{3}\log(x+1)-\tfrac{1}{6}\log(x^2-x+1)+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\tfrac{1}{3}\log(x+1)-\tfrac{1}{6}\log(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

উদা. 8. $\int\frac{\cos x\,dx}{(\sin x-a)(\sin x-b)}$

মনে কর, $\sin x=z \quad \therefore \quad \cos x\,dx=dz$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int\frac{dz}{(z-a)(z-b)}=\int\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)dz$

$$=\frac{1}{a-b}\left(\int\frac{dz}{z-a}-\int\frac{dz}{z-b}\right)=\frac{1}{a-b}.[\log(z-a)-\log(z-b)]$$

$$=\frac{1}{a-b}.\log\frac{z-a}{z-b}=\frac{1}{a-b}.\log\frac{\sin x-a}{\sin x-b}.$$

উদাহরণমালা V-B

সমাকলন কর :

1. (i) $\int\frac{dx}{x^2-x}$, (ii) $\int\frac{(x-1)\,dx}{(x+2)(x-3)}$, (iii) $\int\frac{dx}{(x-a)\,(x-b)}$.

2. (i) $\int\frac{3x}{x^2-x-2}\,dx$, (ii) $\int\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\,dx$,

(iii) $\int\frac{x^2dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

3. (i) $\int\frac{dx}{(x^4-1)}$, (ii) $\int\frac{dx}{(x^3-1)}$,

4. (i) $\int\frac{dx}{(x^2-1)^2}$, (ii) $\int\frac{dx}{(x-1)^3(x+1)}$.

5. (i) $\int\frac{x}{(1+x)(1+x^2)}\,dx$, (ii) $\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx$.

6. (i) $\int\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, (ii) $\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$.

7. (i) $\int\frac{e^x dx}{(e^x-1)^2(e^x+1)}$, (ii) $\int\frac{dx}{\cos x(5+3\cos x)}$

(iii) $\int\frac{e^x dx}{e^x-3e^{-x}+2}$.

সমাধান :

উদা. 1. (i) $\int\frac{dx}{x^2-x}$

$$\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}, \text{ ধর।}$$

সুতরাং $1=A(x-1)+Bx.$

এখন, $x=0$ বসাইয়া $A=-1$ এবং $x=1$ বসাইয়া $B=1$

সুতরাং, প্রদত্ত সমাকল $=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx.$

$$=\log(x-1)-\log x.=\log\frac{x-1}{x}.$$

(ii) $\int\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}dx$

মনে কর, $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$

সুতরাং, $x-1=A(x-3)+B(x-2)$

এখন, $x=2$ বসাইয়া $A=-1$ এবং $x=3$ বসাইয়া $B=2$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int\left(\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx=2\log(x-3)-\log(x-2)$

$$=\log\frac{(x-3)^2}{x-2}.$$

(iii) $\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)}$

$$=\frac{1}{a-b}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)dx=\frac{1}{a-b}[\log(x-a)-\log(x-b)]$$

$$=\frac{1}{a-b}\log\frac{x-a}{x-b}.$$

উদা. 2. (i) $\int\frac{3x}{x^2-x-2}dx.$

$$\frac{3x}{x^2-x-2}=\frac{3x}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}, \text{ ধর।}$$

$\therefore\ 3x = A(x+1) + B(x-2)$

এখন, $x=2$ বসাইয়া $A=2$ এবং $x=-1$ বসাইয়া $B=1$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $= \int\left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1}\right)dx$

$$= 2\log(x-2) + \log(x+1) = \log\frac{(x-2)^2}{(x+1)}.$$

(ii) $\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}dx$

$$\frac{x^2+1}{x(x^2-1)} = \frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1},$$ ধর।

সুতরাং $x^2+1 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$

এখন, $x=0$ বসাইয়া পাওয়া যায়, $A=-1$

$x=1$ বসাইয়া পাওয়া যায়, $B=1$

এবং $x=-1$ বসাইয়া পাওয়া যায়, $C=1$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $= \int\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)dx$

$$= -\log x + \log(x-1) + \log(x+1) = \log\frac{x^2-1}{x}.$$

(iii) $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

মনে কর, $\frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$

$\therefore\ x^2 = A(x-2)(x-3) + B(x-3)(x-1) + C(x-1)(x-2)$

এখন, $x=1$ বসাইয়া পাওয়া যায়, $A=\frac{1}{2}$

$x=2$ বসাইয়া পাওয়া যায়, $B=-4$

এবং $x=3$ বসাইয়া পাওয়া যায়, $C=\frac{9}{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $= \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{4}{x-2} + \frac{\frac{9}{2}}{x-3}\right)dx$

$$= \tfrac{1}{2}\log(x-1) - 4\log(x-2) + \tfrac{9}{2}\log(x-3).$$

উদা. 3. (i) $\int \frac{dx}{x^4-1}$

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$\therefore\ 1 = = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (x^2-1)(Cx+D)$

এখন, $x=1$ বসাইয়া পাওয়া যায়, $A=\frac{1}{4}$

$x=-1$ বসাইয়া পাওয়া যায়, $B=-\frac{1}{4}$.

উভয়দিকের x^3এর সহগ সমাধান করিয়া, $A+B+C=0$ $\therefore$ $C=0$।

এবং x^0এর সহগ সমাধান করিয়া

$$A-B-D=1 \quad \therefore \quad D=A-B-1=-\tfrac{1}{2}$$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল$=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x-1}-\frac{\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right)dx$

$$=\tfrac{1}{4}\log(x-1)-\tfrac{1}{4}\log(x+1)-\tfrac{1}{2}\tan^{-1}x.$$

$$=\tfrac{1}{4}\log\frac{x-1}{x+1}-\tfrac{1}{2}\tan^{-1}x.$$

(ii) $\int\frac{dx}{x^3-1}=\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+x+1)}$

মনে কর, $\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$

$\therefore$ $1=A(x^2+x+1)+(x-1)(Bx+C)$

এখন $x=1$ বসাইয়া পাওয়া যায় $A=\frac{1}{3}$

আবার, x^2এর সহগ সমাধান করিয়া $A+B=0$ বা, $B=-\frac{1}{3}$

এবং xএর সহগ সমাধান করিয়া, $A-B+C=0$ বা, $C=B-A=-\frac{2}{3}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল$=\int\frac{\frac{1}{3}}{x-1}dx+\int\frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}dx$

$$=\tfrac{1}{3}\log(x-1)-\tfrac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx$$

$$=\tfrac{1}{3}\log(x-1)-\tfrac{1}{6}\int\frac{2x+1+3}{x^2+x+1}dx$$

$$=\tfrac{1}{3}\log(x-1)-\tfrac{1}{6}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\tfrac{1}{3}\log(x-1)-\tfrac{1}{6}\log(x^2+x+1)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\tfrac{1}{3}\log(x-1)-\tfrac{1}{6}\log(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

উদা. 4. (i) $\int\frac{dx}{(x^2-1)^2}$

মনে কর, $\frac{1}{(x^2-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x+1)}+\frac{D}{(x+1)^2}$

$\therefore \quad 1 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2$

এখন, $x=1$ বসাইয়া পাওয়া যায় $B=\frac{1}{4}$

$x=-1$ বসাইয়া পাওয়া যায় $D=\frac{1}{4}$

আবার, x^3এর সহগ সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $A+C=0$

এবং x^0এর সহগ সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $-A+B+C+D=1$

$\therefore \quad -A+C=\frac{1}{2}$ বা, $A=-\frac{1}{4}$, $C=\frac{1}{4}$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল

$$=\int\frac{-\frac{1}{4}}{x-1}dx+\int\frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2}dx+\int\frac{\frac{1}{4}}{x+1}dx+\int\frac{\frac{1}{4}}{(x+1)^2}dx$$

$$=-\tfrac{1}{4}\log(x-1)-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}+\tfrac{1}{4}\log(x+1)-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$=\tfrac{1}{4}\log\frac{x+1}{x-1}-\frac{x}{2(x^2-1)}.$$

(ii) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)^3(x+1)}$

মনে কর, $\displaystyle\frac{1}{(x-1)^3(x+1)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{(x+1)}$

$\therefore \quad 1=A(x-1)^2(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x+1)+D(x-1)^3$

এখন, $x=1$ বসাইয়া পাওয়া যায় $C=\frac{1}{2}$

$x=-1$ বসাইয়া পাওয়া যায় $D=-\frac{1}{8}$

আবার, x^3 এর সহগ সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $A+D=0$; বা, $A=\frac{1}{8}$

এবং x^0এর সহগ সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $A-B+C-D=1$; $B=-\frac{1}{4}$.

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল

$$=\int\frac{\frac{1}{8}}{x-1}dx+\int\frac{-\frac{1}{4}}{(x-1)^2}dx+\int\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^3}dx+\int\frac{-\frac{1}{8}}{x+1}dx$$

$$=\tfrac{1}{8}\log(x-1)+\tfrac{1}{4}\,\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{(x-1)^2}-\tfrac{1}{8}\log(x+1)$$

$$=\tfrac{1}{8}\log\frac{x-1}{x+1}+\frac{x-2}{4(x-1)^2}.$$

উদা. 5. (i) $\displaystyle\int\frac{x}{(1+x)(1+x^2)}dx.$

মনে কর, $\displaystyle\frac{x}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$

$\therefore \quad x = A(1+x^2)+(1+x)(Bx+C)$

এখন, $x=-1$ বসাইয়া পাওয়া যায় $A=-\frac{1}{2}$

আবার, x^2এর সহগ সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $A+B=0$ বা, $B=\frac{1}{2}$

এবং x-এর সহগ সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $1=B+C$ বা, $C=\frac{1}{2}$

স্বতরাং, প্রদত্ত সমাকল $=\int\frac{-\frac{1}{2}}{1+x}dx+\int\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}dx$

$$=-\tfrac{1}{2}\log(1+x)+\tfrac{1}{4}\int\frac{2x+2}{x^2+1}dx$$

$$=-\tfrac{1}{2}\log(1+x)+\tfrac{1}{4}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=-\tfrac{1}{2}\log(1+x)+\tfrac{1}{4}\log(x^2+1)+\tfrac{1}{2}.\tan^{-1}x.$$

(ii) $\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+x+1)+(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{2}.\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

উদা. 6. (i) $\int\frac{xdx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$; মনে কর, $x^2=z$; $\therefore 2xdx=dz.$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{(z+a^2)(z+b^2)}=\frac{1}{2(b^2-a^2)}\int\left(\frac{1}{z+a^2}-\frac{1}{z+b^2}\right)dz$

$$=\frac{1}{2(b^2-a^2)}[\log(z+a^2)-\log(z+b^2)$$

$$=\frac{1}{2(b^2-a^2)}\log\frac{z+a^2}{z+b^2}=\frac{1}{2(b^2-a^2)}\log\frac{x^2+a^2}{x^2+b^2}.$$

(ii) $\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$

$$=\int\frac{1}{x^2+b^2}dx-a^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

$$=\int\frac{dx}{x^2+b^2}-\frac{a^2}{b^2-a^2}\int\left(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{1}{x^2+b^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}-\frac{a^2}{b^2-a^2}\cdot\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}-\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}\right)$$

$$=\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}-\frac{a}{a^2-b^2}\tan^{-1}\frac{x}{a}+\frac{a^2}{b(b^2-a^2)}\tan^{-1}\frac{x}{b}.$$

$$=\frac{b}{b^2-a^2}\tan^{-1}\frac{x}{b}-\frac{a}{b^2-a^2}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$=\frac{1}{b^2-a^2}\left[b\tan^{-1}\frac{x}{b}-a\tan^{-1}\frac{x}{a}\right].$$

উদা. 7. (i) $\int\frac{e^x dx}{(e^x-1)^2(e^x+1)}$

মনে কর, $e^x=z \quad \therefore \; e^x dx=dz$

$$\therefore \int\frac{e^x dx}{(e^x-1)^2(e^x+1)}=\int\frac{dz}{(z-1)^2(z+1)}$$

এখন, মনে কর, $\frac{1}{(z-1)^2(z+1)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{(z-1)^2}+\frac{C}{z+1}$

$\therefore \; 1=A(z-1)(z+1)+B(z+1)+C(z-1)^2$

সুতরাং, $z=1$ বসাইয়া পাওয়া যায় $B=\frac{1}{2}$

$z=-1$ বসাইয়া পাওয়া যায় $C=\frac{1}{4}$

আবার, z^2-এর সহগ সমাধান করিয়া পাওয়া যায়

$A+C=0$; বা, $A=-\frac{1}{4}$

সুতরাং, প্রদত্ত সমাকল $=\int\frac{-\frac{1}{4}}{z-1}dz+\int\frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2}dz+\int\frac{\frac{1}{4}}{z+1}dz$

$$=-\tfrac{1}{4}\log(z-1)-\tfrac{1}{2}\frac{1}{(z-1)}+\tfrac{1}{4}\log(z+1)$$

$$=\tfrac{1}{4}\log\frac{z+1}{z-1}-\tfrac{1}{2}\frac{1}{(z-1)}=\tfrac{1}{4}\log\frac{e^x+1}{e^x-1}-\frac{1}{2(e^x-1)}.$$

(ii) মনে কর, $\frac{1}{\cos x(5+3\cos x)}=\frac{A}{\cos x}+\frac{B}{5+3\cos x}$

$\therefore \; 1=A(5+3\cos x)+B\cos x.$

$\cos x=0$ বসাইয়া পাওয়া যায় $A=\frac{1}{5}$ এবং $\cos x$-এর সহগ সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $3A+B=0$ বা, $B=-\frac{3}{5}$.

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int\frac{\frac{1}{5}}{\cos x}dx+\int\frac{-\frac{3}{5}}{5+3\cos x}dx$

$$=\tfrac{1}{5}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\frac{3}{5}\int\frac{dx}{(5+3\cos x)},$$

এখন, $$\int\frac{dx}{5+3\cos x}=\int\frac{dx}{5\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+3\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\int\frac{dx}{8\cos^2\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}}=\int\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{\tan^2\frac{x}{2}+4}=\int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan^2\frac{x}{2}+2^2}$$

$$=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\tan\frac{x}{2}}{2}=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right).$$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\frac{1}{5}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\frac{3}{10}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)$.

(iii) $$\int\frac{e^x dx}{e^x-3e^{-x}+2}=\int\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+2e^x-3}$$

$$=\int\frac{zdz}{z^2+2z-3},\qquad [\,e^x=z \text{ ধরিয়া ; } e^x dx=dz.\,]$$

$$=\int\frac{z}{(z+3)(z-1)}dz=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{z-1}+\frac{3}{z+3}\right)dz$$

$$=\frac{1}{4}\log(z-1)+\frac{3}{4}\log(z+3)=\frac{1}{4}\log(e^x-1)+\frac{3}{4}\log(e^x+3).$$

প্রশ্নমালা V

সমাকলন কর ঃ

1. (i) $\int\frac{1}{x^2+x}\,dx$, (ii) $\int\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\,dx$, (iii) $\int\frac{(2x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$.

2. (i) $\int\frac{x^3dx}{x^2+7x+12}$, (ii) $\int\frac{(x-1)(x-5)}{(x-2)(x-4)}\,dx$.

3. (i) $\int\frac{x^2dx}{(x-a)(x-b)(x-c)}$, (ii) $\int\frac{x}{x^4-1}\,dx$, (iii) $\int\frac{x^2dx}{1-x^4}$.

4. (i) $\int\frac{dx}{(x-2)^2(x-1)^3}$, (ii) $\int\frac{(x+1)dx}{(x-1)^2(x+2)^2}$.

5. (i) $\int\frac{x^3dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, (ii) $\int\frac{x^4dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$.

6 (i) $\int\frac{xdx}{x^3-1}$, (ii) $\int\frac{xdx}{x^4-x^2-2}$.

(iii) $\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)(2x^2+1)}$, (ii) $\int\frac{dx}{1+3e^x+2e^{2x}}$,

(v) $\int\frac{\cos x\,dx}{(\sin x-a)(\sin x-b)}$.

৬

নিশ্চিত সমাকল

(Definite Integral)

6·1. আলোচ্য অংশে নিশ্চিত সমাকল ও তৎসম্পর্কিত প্রশ্নাবলী আলোচিত হইবে। বিশেষ শ্রেণীর সমষ্টি বা কোনও জ্যামিতিক ক্ষেত্রের (যাহার ক্ষেত্রফল জ্যামিতিক নিয়মে বাহির করা যায় না বা কষ্টসাধ্য) ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে নিশ্চিত সমাকলের ব্যবহারও বর্তমান অংশের বিষয়বস্তু। নিম্নের কতিপয় সূত্র দেওয়া হইল।

(i) $f(x)$ এবং $\phi(x)$ অপেক্ষক দুইটি যদি এইরূপ হয় যে $f(x)$ অপেক্ষকটি $a \leqslant x \leqslant b$ বিস্তারে সমাকলনযোগ্য এবং ঐ বিস্তারে সর্বত্র $\phi'(x)=f(x)$ তবে,

$\int_a^b f(x)dx=\phi(b)-\phi(a)$ [সমাকলনের মৌল উপপাদ্য]

(ii) $$\underset{h\to 0}{Lt}\ h[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+\overline{n-1}h)]$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\ h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh),$$

$$=\int_a^b f(x)dx, \qquad \text{যদি } nh=b-a \text{ হয়।}$$

(iii) $a=0,\ \ b=1$ ধরিলে

$$\underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1} f\left(\frac{r}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx.$$

(iv) (a) $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

(b) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(z)dz$

(c) $a<c<b$ হইলে

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

(d) $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx.$

(e) $f(x)=f(a+x)$ হইলে

$$\int_0^{na} f(x)dx=n\int_0^a f(x)dx.$$

(f) $$\int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(2a-x)dx.$$

সুতরাং (g) $\int_0^{2a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$ যদি $f(2a-x)=f(x)$

এবং $\int_0^{2a} f(x)dx=0$ যদি $f(2a-x)=-f(x)$.

উদাহরণমালা VI-A

A. মান নির্ণয় কর

উদা. 1. $\int_1^{10} x^8\ dx=\left[\frac{x^9}{9}\right]_1^{10}=\frac{10^9}{9}-\frac{1}{9}=\frac{10^9-1}{9}$.

উদা. 2. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\ dx=\left[\frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{3}-0=\frac{1}{3}$.

উদা. 3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)dx$.

$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

উদা. 4. $\int_0^1 \sqrt{x}dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$.

উদা. 5. $\int_0^{\frac{\pi}{8}}\cos 4x dx=\left[\frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$.

উদা. 6. $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\left[\tan^{-1}x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$.

উদা. 7. $\int_0^1 xe^x dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-\left[e^x\right]_0^1=0$.

উদা. 8. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x+\sin 2x)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{\cos 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=\frac{\pi^2}{2}-\frac{\cos 2\pi}{2}-\frac{\pi^2}{8}+\frac{\cos\pi}{2}=\frac{3\pi}{8}-1.$

উদা. 9. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(x-2)^3}=\int_{-2}^{-1}\frac{d(x-2)}{(x-2)^3}$

$=\left[-\frac{1}{2}(x-2)^{-2}\right]_{-2}^{-1}=-\frac{1}{2}\left(-3\right)^{-2}+\frac{1}{2}\left(-4\right)^{-2}=-\frac{7}{288}.$

উদা. 10. $\int_0^4\sqrt{1+2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{1+2x}\,d(2x+1)$

$=\frac{1}{3}\left[(1+2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{1}{3}.\left(9^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{26}{3}.$

উদা. 11. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\left[\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^1=\sin^{-1}\frac{1}{2}-\sin^{-1}0=\frac{\pi}{6}.$

উদা. 12. $\int_0^1 x^3\sqrt{1+3x^4}\,dx$

মনে কর, $1+3x^4=z$; $\therefore\ 12x^3dx=dz.$ বা, $x^3dx=\frac{dz}{12}$

আবার, $x=0$ হইলে $z=1$ এবং $x=1$ হইলে $z=4$

স্থতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\frac{1}{12}\int_1^4 z^{\frac{1}{2}}dz=\frac{1}{12}.\frac{2}{3}\left[z^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{1}{18}.\left[4^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right]$

$=\frac{1}{18}(8-1)=\frac{7}{18}.$

উদা. 13. $\int_1^2\frac{2xdx}{1+x^2}\,dx.$

মনে কর, $1+x^2=z$ $\quad\therefore\ 2xdx=dz$

এখন, $x=1$ হইলে $z=2$ এবং $x=2$ হইলে $z=5$

স্থতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\int_2^5\frac{dz}{z}=\left[\log z\right]_2^5=\log 5-\log 2=\log\frac{5}{2}.$

উদা. 14. $\int_2^3\frac{2x+6}{x^2+6x-9}\,dx.$

মনে কর, $x^2+6x-9=z$ $\quad\therefore\ (2x+6)dx=dz$

আবার, $x=2$ হইলে $z=7$ এবং $x=3$ হইলে $z=18$

স্থতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\int_7^{18}\frac{dz}{z}=\left[\log z\right]_7^{18}=\log 18-\log 7=\log\frac{18}{7}.$

উদা. 15. $\int_0^1 \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

মনে কর, $\sin^{-1}x=z \quad \therefore \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dz$

আবার, $x=0$ হইলে $z=0$ এবং $x=1$ হইলে $z=\frac{\pi}{2}$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\int_0^{\frac{\pi}{2}} zdz=\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}$.

উদা. 16. $\int_0^1 \frac{x^3dx}{1+x^8}$

মনে কর, $x^4=z \quad \therefore \quad 4x^3dx=dz \quad \therefore \quad x^3dx=\frac{1}{4}dz$

আবার, $x=0$ হইলে, $z=0$ এবং $x=1$ হইলে $z=1$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল

$$=\tfrac{1}{4}\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2}=\tfrac{1}{4}\cdot\left[\tan^{-1}z\right]_0^1=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{16}.$$

উদা. 17. $\int_0^1 2e^{-x^2}xdx$

মনে কর, $x^2=z \quad \therefore \quad 2xdx=dz.$

আবার, $x=0$ হইলে $z=0$ এবং $x=1$ হইলে $z=1$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int_0^1 e^{-z}dz=\left[-e^{-z}\right]_0^1=e^0-e^{-1}=1-\frac{1}{e}$

উদা. 18. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\log x}$

মনে কর, $\log x=z\,; \quad \therefore \quad \frac{1}{x}dx=dz$

আবার, $x=e$ হইলে $z=1$ এবং $x=e^2$ হইলে $z=2$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\int_1^2 \frac{dz}{z}=\left[\log z\right]_1^2=\log 2-\log 1=\log 2$

উদা. 19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e \sin x \cos x}{a^2 \sin^2x+b^2 \cos^2x}dx$, যখন $a^2 \neq b^2$

মনে কর, $a^2 \sin^2x+b^2 \cos^2x=z$

$\therefore \quad [a^2.2 \sin x \cos x - b^2.2 \sin x \cos x]dx = dz$

বা, $(a^2 - b^2)\, 2 \sin x \cos x\, dx = dz$

আবার, $x=0$ হইলে $z=b^2$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$ হইলে $z=a^2$

স্থতরাং প্রদত্ত সমাকল $= \dfrac{1}{a^2-b^2}\displaystyle\int_{b^2}^{a^2} \frac{dz}{z} = \frac{1}{a^2-b^2}\Big[\log z\Big]_{b^2}^{a^2}$

$= \dfrac{1}{a^2-b^2}(\log a^2 - \log b^2) = \dfrac{2}{a^2-b^2} \log \dfrac{a}{b}.$

উদা. 20. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx$

মনে কর, $\tan^{-1}x = z$ $\quad\therefore \quad \dfrac{1}{1+x^2}dx = dz$

আবার, $x=0$, হইলে $z=0$ এবং $x=1$ হইলে $z=\frac{\pi}{4}$

স্থতরাং প্রদত্ত সমাকল $= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} z dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{32} - 0 = \frac{\pi^2}{32}.$

উদা. 21. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

মনে কর, $e^x = z$; $\therefore\ e^x dx = dz$

আবার, $x=0$ হইলে $z=1$ এবং $x=1$ হইলে $z=e$

স্থতরাং প্রদত্ত সমাকল $= \displaystyle\int_1^e \frac{dz}{1+z^2} = \Big[\tan^{-1}z\Big]_1^e = \tan^{-1}e - \tan^{-1}1$

$= \tan^{-1}e - \frac{\pi}{4}.$

উদা. 22. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}}\, dx$

মনে কর, $x + \frac{1}{x} = z$; $\therefore\ \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx = dz$ বা, $\dfrac{x^2-1}{x^2}dx = dz$

আবার, $x=1$ হইলে $z=2$ এবং $x=2$ হইলে $z=\frac{5}{2}$

স্থতরাং প্রদত্ত সমাকল $= \displaystyle\int_2^{\frac{5}{2}} e^z dz = \Big[e^z\Big]_2^{\frac{5}{2}} = e^{\frac{5}{2}} - e^2.$

B. সংজ্ঞা হইতে মান নির্ণয় কর :

উদা. 23. $\int_0^1 x^2dx = \underset{h\to 0}{Lt}\ h\sum_{r=1}^{n}(rh)^2$ যখন $nh=1$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ [h(h^2+2^2h^2+3^2h^2+\cdots\cdots+n^2h^2)]$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ [h^3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)]$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ h^3\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{nh(nh+h)(2nh+h)}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\underset{h\to 0}{Lt}\ 1(1+h)(2+h) \qquad [\because\ nh=1]$$

$$= \tfrac{1}{6}.\,2 = \tfrac{1}{3}.$$

উদা. 24. $\int_1^2 e^x dx = \underset{h\to 0}{Lt}\ h\sum_{r=0}^{n-1} e^{1+rh}$ যখন, $nh=2-1=1$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ h[e^1+e^{1+h}+e^{1+2h}+\cdots\cdots+e^{1+\overline{n-1}h}]$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ e.\,h[1+e^h+e^{2h}+\cdots\cdots+e^{(n-1)h}]$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ e.h.\,\frac{e^{nh}-1}{e^h-1} = \underset{h\to 0}{Lt}\ eh\,\frac{e-1}{e^h-1} \qquad [\because\ nh=1]$$

$$= e(e-1)\underset{h\to 0}{Lt}\ \frac{1}{\frac{e^h-1}{h}} = e(e-1)\,1. = e(e-1).$$

উদা. 25. $\int_0^1 (ax^2+b)dx = \underset{h\to 0}{Lt}\ h\sum_{r=1}^{n}[a(rh)^2+b]$, $nh=1-0=1$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ h[a(h)^2+a(2h)^2+a(3h)^2+\cdots\cdots+a(nh)^2]$$

$$+ \underset{h\to 0}{Lt}\ h[b+b+\cdots\cdots+b\ n\ \text{সংখ্যকবার পর্যন্ত}]$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ ah^3\,[1+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2] + \underset{h\to 0}{Lt}\ [bnh]$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\ a.\,h^3\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+b. \quad [\because\ nh=1\ ]$$

$$=\tfrac{1}{6}\ \underset{h\to 0}{Lt}\ a\ nh(nh+h)(2nh+h)+b.$$

$$=\tfrac{1}{6}\ \underset{h\to 0}{Lt}\ a.\,1.\,(1+h)(2+h)+b=\tfrac{1}{6}.\,a.\,2+b=\frac{a}{3}+b,$$

C. নিম্নলিখিত সীমাগুলি নির্ণয় কর :

উদা. 26. $\underset{n\to\infty}{Lt}\ \left\{\frac{1}{n}+\frac{n^2}{(n+1)^3}+\frac{n^2}{(n+2)^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{8n}\right\}$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt}\ \left\{\frac{1}{n}+\frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}+\frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}+\cdots\cdots+\frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^3}\right\}$$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{1}{n}\sum_{r=6}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^3}=\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^3}=\left[-\frac{1}{2(1+x)^2}\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{2.\,(1+1)^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$

উদা. 27. $\underset{n\to\infty}{Lt}\ \left[\frac{1^2}{n^3+1^3}+\frac{2^2}{n^3+2^3}+\cdots\cdots+\frac{n^2}{2n^3}\right]$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt}\ \left[\frac{\frac{1^2}{n^3}}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^3}+\frac{\frac{2^2}{n^3}}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^3}+\cdots\cdots+\frac{\frac{n^2}{n^3}}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^3}\right]$$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{1}{n}\left[\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^3}+\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^3}+\cdots\cdots+\frac{\left(\frac{n}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^3}\right]$$

$$= \underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{1}{n}\sum\frac{\left(\frac{r}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{r}{n}\right)^3}=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{d(x^3+1)}{x^3+1}=\frac{1}{3}\left[\log\ (x^3+1)\right]_0^1$$

$$=\tfrac{1}{3}[\log 2-\log 1]=\tfrac{1}{3}\log 2.$$

উদা. 28. $\underset{n\to\infty}{Lt}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots\cdots+\frac{2}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]$

$$=\underset{n\to\infty}{Lt}\left[\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots\cdots+\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}\right]$$

$$=\underset{n\to\infty}{Lt}\frac{1}{n}\sum\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{n}\right)^2}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\left[\sin^{-1}x\right]_0^1=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

D. মান নির্ণয় কর ঃ

উদা. 29. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}$

মনে কর, $x=\sin\theta$. $\therefore\ dx=\cos\theta\,d\theta$.

এখন, $x=0$ হইলে $\theta=0$ এবং $x=\frac{1}{2}$ হইলে $\theta=\frac{\pi}{6}$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta\,d\theta}{(1-2\sin^2\theta)\cos\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{\cos 2\theta}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec 2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\left[\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)-\log\tan\frac{\pi}{4}\right]=\frac{1}{2}\log\tan\frac{5\pi}{12}$$

$$=\frac{1}{2}\log\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\log\cot\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$$

কারণ $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ এবং $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

উদা. 30. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4x\cos^3x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4x\cos^2x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4x\,(1-\sin^2x)\cos x\,dx$$

মনে কর, $\sin x=z$; $\therefore\ \cos x\,dx=dz$

এখন, $x=0$ হইলে $z=0$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$ হইলে $z=1$.

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\int_0^1 z^4(1-z^2)\,dz=\int_0^1(z^4-z^6)\,dz$

$$=\left[\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}\right]_0^1=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{2}{35}.$$

উদা. 31. $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(5-x)}}$

মনে কর, $x=\cos^2\theta+5\sin^2\theta$.
$dx=[-2\sin\theta\cos\theta+10\sin\theta\cos\theta]d\theta=8\sin\theta\cos\theta d\theta$.
$x-1=\cos^2\theta+5\sin^2\theta-1=4\sin^2\theta$.
$5-x=5-\cos^2\theta-5\sin^2\theta=4\cos^2\theta$.

এখন, $x=2$ হইলে $\theta=\frac{\pi}{6}$ [কারণ $2=\cos^2\theta+5\sin^2\theta$ বা, $\sin\theta=\frac{1}{2}$]

এবং $x=3$ হইলে $\theta=\frac{\pi}{4}$, [কারণ $3=\cos^2\theta+5\sin^2\theta$ বা, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$]

$$\text{সুতরাং প্রদত্ত সমাকল}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{8\sin\theta\cos\theta d\theta}{2\sin\theta\, 2\cos\theta}=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta$$

$$=2.\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=2.\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

উদা. 32. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,dx.$

$$\text{মনে কর,}\quad I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,dx$$

$$\text{সুতরাং}\quad 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx.=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2};\quad\therefore\quad I=\frac{\pi}{4}.$$

উদা. 33. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

মনে কর, $I=\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

$$=\int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\, dx=\int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx.$$

সুতরাং. $2I=\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx. =2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

$$=-2\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}=-2\pi.\Big[\tan^{-1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-2\pi.\left(0-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{2} \qquad \therefore\ I=\frac{\pi^2}{4}.$$

E. ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

উদা. 34. $y=-x$, x অক্ষ এবং $x=1$, $x=2$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের।

$$\int_{x=1}^{x=2} y dx=\int_1^2 (-x)dx.=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=-2+\tfrac{1}{2}=-\tfrac{3}{2}.$$

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\frac{3}{2}$.

উদা. 35. $y=2x+3x^2$, $y=0$, এবং $x=0$. $x=4$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের।

$$\int_0^4 y dx=\int_0^4 (2x+3x^2)dx=\Big[x^2+x^3\Big]_0^4=16+64.=80$$

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=80$.

উদা. 36. $y=\sin 2x$, $y=0$, এবং $x=0$, $x=\frac{\pi}{6}$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের।

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} y dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x dx.=-\left[\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=-\left[\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{2}-\frac{\cos 0}{2}\right]$$

$$=-\left[\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\right]=\tfrac{1}{4}.$$

উদা. 37. $y^2=4ax$ এবং একটি দ্বিগুণ কোটি $x=h$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের।

$$\int_0^h y dx=\int_0^h 2\sqrt{ax}\, dx=2\sqrt{a}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^h=2\sqrt{a}.\tfrac{2}{3}.h^{\frac{3}{2}}=\tfrac{4}{3}h\sqrt{ah}.$$

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=2.\frac{4}{3}h\sqrt{ah}=\frac{8}{3}h\sqrt{ah}$.

উদা. 38. $y^2=4x$ ও $y^2=x$ অধিবৃত্ত দুইটি এবং $x=1$, $x=4$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের।

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $y^2=4x$, $y=0$, $x=1$, $x=4$ এর অন্তর্গত ক্ষেত্রফল এবং $y^2=x$, $y=0$, $x=1$, $x=4$ এর অন্তর্গত ক্ষেত্রফলের অন্তর।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল=

$$\int_1^4 (\sqrt{4x}-\sqrt{x})dx=\int_1^4 \sqrt{x}\,dx=\frac{3}{3}\Big[x^{\frac{3}{2}}\Big]_1^4=\frac{2}{3}.(8-1)=\frac{14}{3}.$$

উদা. 39. $y^2=6x$ এবং $x^2=by$ অধিবৃত্তদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের।

এখানে $y^2=6x$, $x^2=by$ $\therefore$ $6x=\left(\frac{x^2}{6}\right)^2=\frac{x^4}{36}$

বা, $x^4-216x=0$; বা, $x(x^3-216)=0$; বা, $x=0,\ 6.$

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $y^2=6x$, $y=0$, $y=0$, $x=0$, $x=6$ এর অন্তর্গত ক্ষেত্রফল এবং $x^2=by$, $y=0$, $x=0$, $x=6$ এর অন্তর্গত ক্ষেত্রফলের অন্তর।

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল=

$$\int_0^6\left(\sqrt{6x}-\frac{x^2}{6}\right)dx=\left[\sqrt{6}.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{18}\right]_0^6=\frac{2\sqrt{6}}{3}.6\sqrt{6}-\frac{6^3}{18}=24-12=12.$$

প্রশ্নমালা VI—A

প্রমাণ কর :

1. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx=\frac{\pi}{4}$ (ii) $\int_0^{\pi} \cos^2 nz\, dz=\frac{\pi}{2}$, ($n\neq 0$, পূর্ণসংখ্যা)

2. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \sin 2\theta\, d\theta=\frac{2}{3}$, (ii) $\int_0^{\pi} \sin mx\, dx=0.$

(iii) $\int_0^{2\pi} \cos mx\, dx=0$, (iv) $\int \sin mx \cos nx\, dx=0.$

[m, n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, $(m, n)\neq(0, 0)$]

3. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}$, (ii) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\log x)^2}=\frac{2}{3}$

4. (i) $\int_0^7 \frac{dx}{(1+x)^{\frac{1}{3}}}=\frac{9}{2}$, (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x \sec^2 x dx=\frac{1}{7}.$

5. $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}}=\frac{14}{15}.$ 6. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

7. $\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}=2\tan^{-1}2-\frac{\pi}{2}.$

8. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1}x dx=\frac{\pi}{12}-1+\frac{\sqrt{3}}{2}.$

9. $\int_0^1 x(\tan^{-1}x)^2 dx=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4}-1\right)+\frac{1}{2}\log 2$

10. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right).$

11. $\int_1^2 \sqrt{(x-1)(2-x)}dx=\frac{\pi}{8}.$ 12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin x+\cos x}=\frac{\pi}{4}.$

13. (i) $\int_0^{\pi} \sin^4 x dx=\frac{3\pi}{8}$, (ii) $\int_0^{\pi} \sin^4 x\cos^6 x dx=\frac{3\pi}{256}.$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}=\log\frac{4}{3}$

15. $\int_0^1 \frac{5xdx}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{\pi}{4}+\log\frac{8}{9}.$

16. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$ 17. $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}.$

18 $\underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{1}{n}\left[\frac{1^m+2^m+\cdots\cdots+n^m}{n^m}\right]=\frac{1}{m+1}\ (m>-1)$

19. $\underset{n\to\infty}{Lt}\ \left\{\frac{\sqrt{n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}+\frac{\sqrt{n+2}}{n^{\frac{3}{2}}}+\cdots\cdots+\frac{\sqrt{2n}}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

20. $\underset{n\to\infty}{Lt}\ \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{e}.$

21. $y=3x$ সরলরেখা এবং $y=x^3$ বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

22. $y=\sin x+\cos x$, $y=0$, $x=0$ এবং $x=\frac{\pi}{4}$ এর অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

23. $y=\frac{1}{x^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

প্রশ্নমালা—VI-A-এর সমাধান :

উদা. 1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\Big[x-\frac{\sin 2x}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}.\Big[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}.0\Big]=\frac{\pi}{4}.$$

(ii) $\int_0^{\pi} \cos^2 nz\, dz=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2nz)dz$

$$=\frac{1}{2}\Big[z+\frac{\sin 2nz}{2n}\Big]=\frac{1}{2}[\pi.]=\frac{\pi}{2}.$$

উদা. 2. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \sin 2\theta d\theta$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta\, d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d(\sin\theta)=2.\Big[\frac{\sin^3\theta}{3}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2[\tfrac{1}{3}],=\tfrac{2}{3}.$$

(ii) $\int_0^{2\pi} \sin mx dx=-\Big[\frac{\cos mx}{m}\Big]_0^{2\pi}=0.$

(iii) $\int_0^{2\pi} \cos mx dx=\Big[\frac{\sin mx}{m}\Big]_0^{2\pi}=0$

(vi) $\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2\sin mx\cos nx dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[\sin\frac{m+n}{2}x+\sin\frac{m-n}{2}x\Big]dx=\tfrac{1}{2}.[0+0]=0.$$

উদা. 3. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin x)}{1+\sin^2 x}.$

$$=\Big[\tan^{-1}\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}.$$

(ii) $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x(1+\log x)^2}$

মনে কর, $1+\log x=z \quad \therefore \frac{1}{x}dx=dz$

আবার, $x=1$ হইলে $z=1$, এবং $x=e^2$ হইলে $z=3$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\int_1^3 \frac{dz}{z^2}=\left[-\frac{1}{z}\right]_1^3=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$

উদা. 4. (i) $\int_0^7 \frac{dx}{(1+x)^{\frac{1}{3}}}=\int_0^7 (1+x)^{-\frac{1}{3}} d(x+1)$

$$=\left[\tfrac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]_0^7=\tfrac{3}{2}.[4-1]=\tfrac{9}{2}.$$

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x \sec^2 x \, dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x \, d(\tan x)$

$$=\left[\frac{\tan^7 x}{7}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=[\tfrac{1}{7}-0]=\tfrac{1}{7}.$$

উদা. 5. $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}}=\int_0^3 \frac{(\sqrt{5x+1}-\sqrt{x+1})xdx}{(5x+1)-(x+1)}$

$$=\tfrac{1}{4}\int_0^3 \sqrt{5x+1}\, dx-\tfrac{1}{4}\int_0^3 \sqrt{x+1}\, dx.$$

$$=\frac{1}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{5}\left[(5x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3-\frac{1}{4}\frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$

$$=\tfrac{1}{30}(64-1)-\tfrac{1}{6}(8-1)=\tfrac{28}{30}=\tfrac{14}{15}.$$

উদা. 6. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1}$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}.\left[\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

উদা. 7. $\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$

মনে কর, $x+1=z^2$ $\therefore$ $dx=2zdz$

এখন, $x=0$ হইলে $z=1$ এবং $x=3$ হইলে $z=2$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\int_1^2 \frac{2zdz}{(z^2+1)z}=2\left[\tan^{-1}z\right]_1^2$

$$=2\tan^{-1}2-2\tan^{-1}1=2\tan^{-1}2-\frac{\pi}{2}.$$

উদা. 8. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} x dx = \left[x \sin^{-1} x\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx.$

$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\pi}{12} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$

উদা. 9. $\int_0^1 x(\tan^{-1} x)^2 dx.$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\left(\tan^{-1} x\right)^2\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2 \tan^{-1} x}{1+x^2}\, dx.$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \tan^{-1} x dx + \int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}\, dx$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - \left[x \tan^{-1} x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx + \left[\left(\frac{\tan^{-1} x}{2}\right)^2\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) + \frac{1}{2}\log 2.$$

উদা. 10. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$

মনে কর, $\sin^{-1} x = \theta \quad \therefore \quad x = \sin\theta = dx = \cos\theta d\theta.$

এখন, $x = 0$ হইলে $\theta = 0$ এবং $x = \frac{1}{2}$ হইলে $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\text{প্রদত্ত সমাকল} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\theta . \theta}{\cos\theta} \cos\theta\, d\theta$$

$$= \left[-\theta . \cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} 1.(-\cos\theta) d\theta$$

$$= -\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2} + \left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right].$$

উদা. 11. $\int_1^2 \sqrt{(x-1)(2-x)}\, dx$ মনে কর, $x = \cos^2\theta + 2\sin^2\theta$

$\therefore \quad dx = (-2\sin\theta\cos\theta + 4\sin\theta\cos\theta) d\theta = 2\sin\theta\cos\theta d\theta.$

আবার, $x - 1 = \cos^2\theta + 2\sin^2\theta - 1 = \sin^2\theta$ এবং, $2 - x = 2 - \cos^2\theta - 2\sin^2\theta = \cos^2\theta$; এখন, $x = 1$ হইলে $\theta = 0$ এবং $x = 2$ হইলে $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad \text{প্রদত্ত সমাকল} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos^2\theta . d\theta = 2 . \frac{1}{4} . \frac{1}{2} . \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

উদা. 12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin x+\cos x}=I$ ধর

$$\therefore \quad I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\cos x+\sin x}$$

$$\therefore \quad 2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\Big[\,x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}; \quad \therefore \quad I=\frac{\pi}{4}.$$

উদা. 13. (i) $\int_0^{\pi} \sin^4 x dx.=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx=3.\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}.\,\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{8}.$

(ii) $\int_0^{\pi} \sin^4 x \cos^6 x\, dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^6 x dx$

$=2\,\frac{4-1}{10}\;\frac{4-3}{10-2}\;\frac{6-1}{10-4}\;\frac{6-3}{10-6}\;\frac{6-5}{10-8}.\,\frac{\pi}{2}$

$=2\;\frac{3}{10}\;\frac{1}{8}\;\frac{5}{6}\;\frac{3}{4}\;\frac{1}{2}\;\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{256}.$

2

উদা. 14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$

মনে কর, $\sin x=z$; $\therefore$ $\cos x dx=dz$

$x=0$ হইলে $z=0$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$ হইলে $z=1$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\int_0^1 \frac{dz}{(z+1)(z+2)}=\int_0^1 \left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}\right)dz$

$=\Big[\log(z+1)-\log(z+2)\Big]_0^1=\log 2-\log 3+\log 2=\log \frac{4}{3}.$

উদা. 15. $\int_0^1 \frac{5x dx}{(x+2)(x^2+1)}$

মনে কর, $\frac{5x}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$

$\therefore$ $5x=A(x^2+1)+(x+2)(Bx+C)$ এখন, $x=-2$ ধরিয়া, $A=-2$

আবার, x^2-এর সহগ সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $A+B=0$ বা, $B=2$

এবং x-এর সহগ সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $5=2B+C$ $C=1.$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\int_0^1\left[\frac{-2}{x+2}+\frac{2x+1}{x^2+1}\right]dx$

$$=-\left[2\log(x+2)\right]_0^1+\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=-2\log 3+2\log 2+\left[\log(1+x^2)\right]_0^1+\left[\tan^{-1}x\right]_0^1$$

$$=-\log 9+\log 4+\log 2+\frac{\pi}{4}=\log\frac{8}{9}+\frac{\pi}{4}.$$

উদা. 16. মনে কর, $x=\sin\theta$; $\therefore$ $dx=\cos\theta d\theta$

$$\therefore \int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}=\int\frac{\sec^2\theta d\theta}{1+2\tan^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(\tan\theta)}{\tan^2\theta+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\tan^{-1}\frac{\tan\theta}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\sqrt{2}\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

সুতরাং প্রদত্ত সমাকল $=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\frac{\sqrt{2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right]=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

উদা. 17. মনে কর, $x=\tan\theta$ $\therefore dx=\sec^2\theta d\theta.$

$\therefore$ $x=0$ হইলে $\theta=0$, এবং $x=1$ হইলে $\theta=\frac{\pi}{4}$.

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^4\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta d\theta.$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right]=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}.$$

উদা. 18. $\underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{1}{n}\left[\frac{1^m+2^m+\cdots+n^m}{n^m}\right]$

$$=\underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^m+\left(\frac{2}{n}\right)^m+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^m\right]$$

$$=\underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{r}{n}\right)^m=\int_0^1 x^m\,dx=\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^1=\frac{1}{m+1}$$

[$m+1\neq 0$ বা, $m\neq -1$].

উদা. 19. $\underset{n\to\infty}{Lt}\left[\frac{\sqrt{n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}+\frac{\sqrt{n+2}}{n^{\frac{3}{2}}}+\cdots+\frac{\sqrt{2n}}{n^{\frac{3}{2}}}\right]$

$$=\underset{n\to\infty}{Lt}\left[\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{n}+\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{n}+\cdots+\frac{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}{n}\right]$$

$$=\underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\sqrt{1+\frac{r}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}}-1\right]=\tfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

উদা. 20. $\underset{n\to\infty}{Lt}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}=P$ ধর

$$\therefore\quad \log P=\underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{1}{n}\left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$=\underset{n\to\infty}{Lt}\ \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\log\left(1+\frac{n}{n}\right)=\int_0^1\log(1+x)\,dx$$

$$=\Big[x\log(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\log 2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx.$$

$$=\log 2-\Big[x-\log(1+x)\Big]_0^1$$

$$=\log 2-[1-\log 2].\quad =2\log 2-1.$$

$$=\log 4-\log e=\log\frac{4}{e}.\qquad \text{সুতরাং}\quad P=\frac{4}{e}$$

উদা. 21. $y=3x$ এবং $y=x^3$

$\therefore\quad 3x=x^3$ বা, $x(x^2-3)=0 \qquad \therefore\quad x=0,\ \sqrt{3}.$

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $y=3x$, $y=0$ ও $x=0$, $x=\sqrt{3}$ এর অন্তর্গত ক্ষেত্রফল এবং $y=x^3$, $y=0$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$ এর অন্তর্গত ক্ষেত্রফলের অন্তর।

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\int_0^{\sqrt{3}}(3x-x^3)dx.$

$$=\left[\frac{3x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}}\quad=\frac{9}{2}-\frac{9}{4}=+\frac{9}{4}$$

উদা. 22. নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x+\cos x)\, dx.$

$$=\Big[\sin x-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=0.+1=1.$$

উদা. 23. নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=\int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$

প্রশ্নমালা VI B.

দেখাও যে,

1. (i) $\int_0^\pi \sin^3 x \cos^3 x\, dx=0,$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 x\, dx=\frac{43}{60\sqrt{2}}$

2. (i) $\int_1^2 \frac{x-3}{x^3+x^2}\, dx=4 \log \frac{4}{3}-\frac{3}{2}.$

(ii) $\int_2^5 \frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}\, dx=\frac{1}{6}+\log 32.$

3. $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2-2x+2)^3}=\frac{3\pi+8}{32}$

4. (i) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}),$

(ii) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\pi}{4}.$ 6. $\int_0^1 x^3(1-x^2)^{\frac{5}{2}} dx=\frac{2}{63}$

7. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx=\frac{2}{3},$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx=\frac{3\pi}{16}.$

8. $\underset{n\to\infty}{Lt}\left[\frac{1}{1+n}+\frac{1}{2+n}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]=\log 2$

9. $\underset{n\to\infty}{Lt}\left[\frac{1}{n+m}+\frac{1}{n+2m}+\cdots+\frac{1}{n(1+m)}\right]=\frac{1}{m}\log(1+m),\ m\neq 0,$

10. (i) $y=x^3$ এবং $y=3x^2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{27}{4}.$

(ii) $y=0$, ও $y=\sin x$ এর একটি খিলান দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 2.

(iii) $ax^2+by^2=1$ এবং $bx^2+ay^2=1$ উপবৃত্তদ্বয়ের অন্তর্গত সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল $\frac{2}{\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}.$

৭

অন্তরকল সমীকরণ
(Differential Equation)

7·1. অন্তরকল সমীকরণ, উহার ক্রম ও ঘাত এবং সাধারণ সমাধান :

যে সমীকরণে কোনও চলের অন্তরকল বা অন্তরকলজ বর্তমান, তাহাকে অন্তরকল সমীকরণ বলে। অন্তরকল সমীকরণের অন্তরকল বা অন্তরকলজগুলি যদি একটিমাত্র স্বাধীন চলের সাপেক্ষে হয়, তবে উহাকে সাধারণ অন্তরকল সমীকরণ বলে। অন্তরকল সমীকরণে উপস্থিত অন্তরকল বা অন্তরকলজগুলির মধ্যে সর্বোচ্চ ক্রমের অন্তরকল বা অন্তরকলজ-এর ক্রমটিকে সমীকরণের ক্রম বলে। কোন অন্তরকল সমীকরণে সর্বোচ্চ ক্রমের অন্তরকল বা অন্তরকলজ-এর সর্বোচ্চ ঘাতকে সমীকরণটির ঘাত বলে। কোন অন্তরকল সমীকরণের স্বাধীন ও অধীনচলের অন্তরকল বা অন্তরকলজযুক্ত কোনও সম্পর্ক যদি অন্তরকল সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে তবে ঐ সম্পর্কটিকে সমীকরণটির একটি সমাধান বলে।

আলোচ্য অংশে প্রথম ও দ্বিতীয় ক্রমের এবং প্রথমঘাতের সরল সাধারণ অন্তরকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করা হইবে।

7·2. প্রথম ক্রম ও প্রথমঘাতের অন্তরকল সমীকরণের সমাধান ঃ

A. চলের বিচ্ছেদ দ্বারা অন্তরকল সমীকরণের সমাধান ঃ

উদাহরণমালা VII-A

উদা. 1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+1}{y+1}$

বা, $(x+1)dx=(y+1)dy$ বা, $\dfrac{x^2}{2}+x=\dfrac{y^2}{2}+y+c'$

বা, $x^2-y^2+2x-2y=c$ [$2c'=c$ ধরিয়া]

উদা. 2. $x^2dy+y^2dx=0$

বা, $\dfrac{dy}{y^2}+\dfrac{dx}{x^2}=0$ বা, $-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=c'$ বা, $\dfrac{x+y}{xy}=c$

বা, $x+y=cxy.$ [যদি $c=-c'$ হয়]

উদা. 3. $dr+r\tan\theta d\theta=0$

বা, $\dfrac{dr}{r}+\tan\theta d\theta=0$ বা, $\log r+\log\sec\theta=c'$

বা, $\log (r \sec \theta)=c'$. বা, $r \sec \theta=e^{c'}=c$.

এই উদাহরণটিতে স্বেচ্ছ ধ্রুবকটি সুবিধাজনকভাবে লইয়া সহজতর উপায়ে করা যায়। যেমন,

$$\frac{dr}{r}+\tan \theta d\theta=0 \quad \text{বা,} \quad \log r+\log \sec \theta=\log c$$

বা, $\log r \sec \theta=\log c \qquad \therefore \; r \sec \theta=c$.

উদা. 4. $\dfrac{dx}{x}-\dfrac{ydy}{1+y^2}=0$

বা, $\dfrac{dx}{x}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2ydy}{1+y^2}=0$ বা, $\log x-\frac{1}{2}\log(1+y^2)=\log c$

বা, $\log \dfrac{x}{\sqrt{1+y^2}}=\log c$ বা, $\dfrac{x}{\sqrt{1+y^2}}=c$

$\therefore \; x=c\sqrt{1+y^2}$.

উদা. 5. $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{y-x}$

মনে কর, $y-x=v^2 \qquad \therefore \; \dfrac{dy}{dx}-1=2v.\dfrac{dv}{dx}$

সুতরাং প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণটি,

$$2v.\frac{dv}{dx}+1=v \quad \text{বা,} \quad 2v\frac{dv}{dx}=v-1$$

বা, $\dfrac{vdv}{v-1}=\frac{1}{2}dx$ বা, $\left(1+\dfrac{1}{v-1}\right)dv=\frac{1}{2}dx$

বা, $v+\log(v-1)=\frac{1}{2}x+c$ বা, $\sqrt{y-x}+\log(\sqrt{y-x}-1)=\frac{1}{2}x+c$.

উদা. 6. $\cos^{-1}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=x+y$

$\therefore \; \dfrac{dy}{dx}=\cos(x+y)$ মনে কর, $x+y=v \quad \therefore \; 1+\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dv}{dx}$

সুতরাং প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণ

$\dfrac{dv}{dx}-1=\cos v$ বা, $\dfrac{dv}{dx}=1+\cos v \quad \therefore \; \dfrac{dv}{1+\cos v}=dx$

বা, $\dfrac{dv}{2\cos^2\frac{v}{2}}=dx$ বা, $\frac{1}{2}.\sec^2\frac{v}{2}dv=dx$

বা, $\tan\frac{v}{2}=x+c \qquad \therefore \; \tan\dfrac{x+y}{2}=x+c$.

B. সমমাত্রিক সমীকরণ ঃ

উদা. 7. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2}$

মনে কর, $y=vx \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$

সুতরাং প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণ

$$v+x.\frac{dv}{dx}=\frac{v^2x^2}{x^2}=v^2 \quad \text{বা,} \quad x\frac{dv}{dx}=v^2-v$$

$$\text{বা,} \quad \frac{dv}{v^2-v}=\frac{dx}{x}\,; \quad \text{বা,} \quad \left(\frac{1}{v-1}-\frac{1}{v}\right)dv=\frac{dx}{x}.$$

সুতরাং $\log(v-1)-\log v=\log x+\log c$

$$\text{বা,} \quad \log\frac{v-1}{v}=\log cx \quad \therefore \quad \frac{v-1}{v}=cx$$

$$\text{বা,} \quad \frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}}=cx \quad \text{বা,} \quad \frac{y-x}{y}=cx \quad \text{অর্থাৎ,} \quad y-x=cxy.$$

এই উদাহরণটি চলের বিচ্ছেদের সাহায্যে সমাধান করা যায়। যেমন,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2} \quad \text{বা,} \quad \frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{x^2} \quad \therefore \quad -\frac{1}{y}=-\frac{1}{x}+c$$

$$\text{বা,} \quad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=c \quad \therefore \quad y-x=cxy.$$

উদা. 8. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x}{2x-y}$

মনে কর, $y=vx \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

সুতরাং প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণটি

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2vx-x}{2x-vx}=\frac{2v-1}{2-v}$$

$$\text{বা,} \quad x\frac{dv}{dx}=\frac{2v-1}{2-v}-v=\frac{2v-1-2v+v^2}{2-v}=\frac{v^2-1}{2-v}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{2-v}{v^2-1}dv=\frac{dx}{x}\,; \quad \text{বা,} \quad \frac{v-2}{v^2-1}dv+\frac{dx}{x}=0$$

$$\text{বা,} \quad \frac{v-1-1}{v^2-1}dv+\frac{dx}{x}=0\,; \qquad \text{বা,} \quad \frac{dv}{v+1}-\frac{dv}{v^2-1}+\frac{dx}{x}=0$$

$$\therefore \quad \log(v+1)-\tfrac{1}{2}\log\frac{v-1}{v+1}+\log x=\log c'$$

বা, $\log \dfrac{(v+1)x}{\sqrt{\dfrac{v-1}{v+1}}}=\log c'$ বা, $\dfrac{(v+1)x}{\sqrt{\dfrac{v-1}{v+1}}}=c'$ বা, $\sqrt{\dfrac{(v+1)^3}{(v-1)}}=c'$

বা, $(y+x)^{\frac{3}{2}}=c'(y-x)^{\frac{1}{2}}$ $\therefore$ $(y+x)^3=c(y-x)$ [যদি $c'^2=c$ হয়]

উদা. 9. $xy^2dy=(x^3+y^3)dx$

বা, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^3+y^3}{xy^2}$ মনে কর, $y=vx$; $\therefore$ $\dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{xd}$

বা, $v+x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{x^3+v^3x^3}{v^2x^3}=\dfrac{1+v^3}{v^2}$

বা, $x.\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{1+v^3}{v^2}-v=\dfrac{1}{v^2}$; বা, $v^2dv=\dfrac{dx}{x}$;

$\therefore$ $\dfrac{v^3}{3}=\log x+\log c=\log cx$; $\therefore$ $cx=e^{\frac{v^3}{3}}=e^{\frac{y^3}{3x^3}}$.

উদা. 10. $\left(x+y\cos\frac{y}{x}\right)dx=x\cos\frac{y}{x}dy$

বা, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y\cos\frac{y}{x}}{x\cos\frac{y}{x}}$; মনে কর, $y=vx$ $\therefore$ $\dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$

সুতরাং প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণ

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{x+vx\cos v}{x\cos v}=\frac{1+v\cos v}{\cos v}$$

বা, $x.\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{1+v\cos v}{\cos v}-v=\dfrac{1}{\cos v}$ বা, $\cos v\,dv=\dfrac{dx}{x}$

বা, $\sin v=\log x+\log c=\log cx$

বা, $cx=e^{\sin v}$ বা, $e^{\sin\frac{x}{y}}=cx$.

উদা. 11. $y^2dx+(x^2+xy)dy=0$

$\therefore$ $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y^2}{x^2+xy}$

এখন, মনে কর, $y=vx$ $\therefore$ $\dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$

সুতরাং প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণটি

$$v+x.\frac{dv}{dx}=-\frac{v^2x^2}{x^2+vx^2}=-\frac{v^2}{1+v}$$

$$\therefore\quad x\frac{dv}{dx}=-\frac{v^2}{1+v}-v=-\frac{v+2v^2}{v+1}\quad \text{বা,}\quad \frac{v+1}{2v^2+v}dv=\frac{dx}{x}$$

$$\text{বা,}\quad \frac{dx}{x}+\frac{v+1}{2v^2+v}dv=0\quad \text{বা,}\quad \frac{dx}{x}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4v+4}{2v^2+v}dv=0$$

$$\text{বা,}\quad \frac{dx}{x}+\frac{1}{4}\frac{4v+1}{2v^2+v}dv+\frac{3}{4}\cdot\frac{dv}{v(2v+1)}=0$$

$$\text{বা,}\quad \frac{dx}{x}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4v+1}{2v^2+v}dv+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{v}-\frac{2}{2v+1}\right)dv=0$$

$$\text{বা,}\quad \log x+\tfrac{1}{4}\log(2v^2+v)+\tfrac{3}{4}[\log v-\log(2v+1)]=\log c'$$

$$\text{বা,}\quad \log x+\tfrac{1}{4}\log(2v^2+v)+\tfrac{3}{4}\log\frac{v}{2v+1}=\log c'$$

$$\text{বা,}\quad \tfrac{1}{4}\log\left[(2v^2+v)\left(\frac{v}{2v+1}\right)^3\right]=\log\frac{c'}{x}$$

$$\text{বা,}\quad \tfrac{1}{4}\log\frac{v^4}{(2v+1)^2}=\log\frac{c'}{x}\ ;\ \text{বা,}\quad \frac{v}{\sqrt{2v+1}}=\frac{c'}{x}$$

$$\text{বা,}\quad \frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{\frac{2y}{x}+1}}=\frac{c'}{x}\ ;\ \text{বা,}\quad \frac{\sqrt{x}\,y}{\sqrt{2y+x}}=c'.$$

বা, $xy^2=c(2y+x)$, [$c'^2=c$ ধরিয়া]

C. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}$ **আকারের সমীকরণ :**

উদা. 12. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$

মনে কর, $x=x'+h,\ \ y=y'+k$ সুতরাং, $dx=dx',\ \ dy=dy'$

$$\therefore\quad \frac{dy'}{dx'}=\frac{2(x'+h)-(y'+k)+1}{(x'+h)-2(y'+k)+1}=\frac{(2x'-y')+(2h-k+1)}{(x'-2y')+(h-2k+1)}$$

এখন, মনে কর, $2h-k+1=0,\ \ h-2k+1=0$

$$\therefore\quad \frac{h}{(-1)(1)-(1)(-2)}=\frac{k}{(1)(1)-(2)(1)}=\frac{1}{(2)(-2)-(1)(-1)}$$

$$\text{বা,}\quad \frac{h}{1}=\frac{k}{-1}=\frac{1}{-3}\quad \therefore\quad h=-\tfrac{1}{3},\quad k=\tfrac{1}{3}.$$

সুতরাং $h=-\frac{1}{3}$ ও $k=\frac{1}{3}$ এর জন্য প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণটি হইতেছে

$\frac{dy'}{dx'}=\frac{2x'-y'}{x'-2y'}$ এখন, $y'=vx'$ ধর। সুতরাং, $\frac{dy'}{dx'}=v+x'\frac{dv}{dx'}$

সুতরাং অন্তরকল সমীকরণটি $v+x'\frac{dv}{dx'}=\frac{2x'-vx'}{x'-2vx'}=\frac{2-v}{1-2v}$

বা, $x'\frac{dv}{dx'}=\frac{2-v}{1-2v}-v=\frac{2-2v+2v^2}{1-2v}$

বা, $\frac{2v-1}{2v^2-2v+2}dv=\frac{dx'}{x'}$; বা, $\frac{2v-1}{(v^2-v+1)}dv+\frac{2dx'}{x'}=0$

বা, $\log(v^2-v+1)+2\log x'=\log c'$

বা, $x'^2(v^2-v+1)=c'^2=c''$ ধর। বা, $y'^2-x'y'+x'^2=c''$

বা, $(y-\frac{1}{3})^2-(x+\frac{1}{3})(y-\frac{1}{3})+(x+\frac{1}{3})^2=c''$

বা, $y^2-\frac{2y}{3}+\frac{1}{9}-xy-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}+x^2+\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}=c''$

বা, $x^2+y^2-xy-y+x+\frac{1}{3}=c''$

$\therefore$ $x^2-xy+y^2+x-y=c$ [$c''-\frac{1}{3}=c$ ধরিয়া]

উদা. 13. $(6x-5y+4)dy+(y-2x-1)dx=0$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+1}{6x-5y+4}$$

মনে কর, $x=x'+h$, $y=y'+k$ $\therefore$ $dx=dx'$, $dy=dy'$

$$\therefore \frac{dy'}{dx'}=\frac{2(x'+h)-(y'+k)+1}{6(x'+h)-5(y'+k)+4}=\frac{2x'-y'+(2h-k+1)}{6x'-5y'+(6h-5k+4)}=\frac{2x'-y'}{6x'-5y'}$$

যদি $2h-k+1=0$ এবং $6h-5k+4=0$ হয়

অর্থাৎ $\frac{h}{(-1)(4)-(-5)(1)}=\frac{k}{(1)(6)-(2)(4)}=\frac{1}{(2)(-5)-(6)(-1)}$

বা, $\frac{h}{1}=\frac{k}{-2}=\frac{1}{-4}$ অর্থাৎ $h=\frac{1}{4}$ এবং $k=\frac{1}{2}$ হয়

এখন, অন্তরকল সমীকরণে $y'=vx'$, ধর $\therefore$ $\frac{dy'}{dx'}=v+x'\frac{dv}{dx'}$

সুতরাং অন্তরকল সমীকরণটি, $v+x'.\frac{dv}{dx'}=\frac{2x'-vx'}{6x'-5vx'}=\frac{2-v}{6-5v}$

বা, $x'\frac{dv}{dx'}=\frac{2-v}{5-5v}-v=\frac{2-7v+5v^2}{6-5v}$

বা, $-\frac{5v-6}{5v^2-7v+2}dv=\frac{dx'}{x'}$; বা, $\frac{5v-6}{5v^2-7v+2}dv+\frac{dx'}{x'}=0$

বা, $\frac{1}{2}\cdot\frac{10v-7-5}{5v^2-7v+2}\,dv+\frac{dx'}{x'}=0$

বা, $\frac{1}{2}\cdot\frac{10v-7}{5v^2-7v+2}\,dv-\frac{1}{2}\,\frac{dv}{v^2-\frac{7}{5}v+\frac{2}{5}}+\frac{dx'}{x'}=0$

বা, $\frac{1}{2}\cdot\frac{10v-7}{5v^2-7v+2}\,dv-\frac{1}{2}\,\frac{dv}{(v-\frac{7}{10})^2-(\frac{3}{10})^2}+\frac{dx'}{x'}=0$

বা, $\frac{1}{2}\log\,(5v^2-7v+2)-\frac{1}{2.2.\frac{3}{10}}\log\frac{v-\frac{7}{10}-\frac{3}{10}}{v-\frac{7}{10}+\frac{3}{10}}+\log x'=\log c'$

বা, $\frac{1}{2}\log\,(5v^2-7v+2)-\frac{5}{3}\log\frac{10v-10}{10v-4}+\log x'=\log c'$

বা, $2\log\frac{c'}{x}=\log\,(5v^2-7v+2)-\frac{5}{3}\log\frac{5(v-1)}{5v-2}.$

বা, $\log\frac{c'^2}{x^2}=\log\,[(5v-2)(v-1)]-\frac{5}{3}\log\frac{5(v-1)}{5v-2}.$

যখন, $v=\frac{y'}{x'}=\frac{y-k}{x-h}=\frac{y-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{4}}.$

উদা. **14.** $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x-4}{y-3x+3}$

মনে কর, $x=x'+h,\ y=y'+k \qquad \therefore\ dx=dx',\ dy=dy'$

স্তরাং $\frac{dy'}{dx'}=\frac{2(y'+k)-(x'+h)-4}{(y'+k)-3(x'+h)+3}=\frac{2y'-x'+(2k-h-4)}{y'-3x'+(k-3h+3)}=\frac{2y'-x'}{y'-3x'}.$

যদি $2k-h-4=0$ এবং $k-3h+3=0$ বা, $h=2,\ k=3$

স্তরাং, প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণ, $\frac{dy'}{dx'}=\frac{2y'-x'}{y'-3x'}$

ধর, $y'=vx' \quad \therefore\ \frac{dy'}{dx'}=v+x'\,\frac{dv}{dx'}.$

$\therefore\ v+x'\,\frac{dv}{dx'}=\frac{2vx'-x'}{vx'-3x'}=\frac{2v-1}{v-3}$

বা, $x'\,\frac{dv}{dx'}=\frac{2v-1}{v-3}-v=\frac{5v-1-v^2}{v-3}$

$\therefore\ \frac{v-3}{v^2-5v+1}\,dv+\frac{dx'}{x'}=0$

স্তরাং $\frac{1}{2}\left[\frac{2v-5}{v^2-5v+1}-\frac{1}{\left(v-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2}\right]dv+\frac{dx'}{x'}=0$

$$\therefore \frac{1}{2}\left[\log(\text{v}^2-5\text{v}+1)-\frac{1}{2.\frac{\sqrt{21}}{2}}\log\frac{\text{v}-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{21}}{2}}{\text{v}-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}}\right]+\log x'=\log c.$$

$$\therefore \log\frac{c^2}{x^2}=\log(\text{v}^2-5\text{v}+1)-\frac{1}{\sqrt{21}}\log\frac{2\text{v}-5-\sqrt{21}}{2\text{v}-5+\sqrt{21}}$$

যখন $\text{v}=\frac{y'}{x'}=\frac{y-3}{x-3}$.

উদা. 15. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-6y+7}{x-3y+4}$

এখানে লক্ষ্য কর $\frac{2}{1}=\frac{-6}{-3}$ $\left[\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\right]$

মনে কর, $x-3y=\text{v}$

$\therefore\ 1-3.\frac{dy}{dx}=\frac{d\text{v}}{dx}$. বা, $\frac{1}{3}\left(1-\frac{d\text{v}}{dx}\right)=\frac{dy}{dx}$

$\therefore$ প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণ

$$\frac{1}{3}\left(-\frac{d\text{v}}{dx}+1\right)=\frac{2\text{v}+7}{\text{v}+4}$$

বা, $-\frac{d\text{v}}{dx}=\frac{6\text{v}+21}{\text{v}+4}-1=\frac{5\text{v}+17}{\text{v}+4}$

বা, $\frac{\text{v}+4}{5\text{v}+17}d\text{v}+dx=0$

বা, $\left(1+\frac{3}{5\text{v}+17}\right)d\text{v}+5dx=0$

বা, $\text{v}+\frac{3}{5}\log(5\text{v}+17)+5x=\text{c}.$

বা, $\frac{3}{5}\log(5\text{v}+17)=-5x-\text{v}+\text{c}.$

বা, $\frac{3}{5}\log(5x-15y+17)=-5x-x+3y+\text{c}.$

বা, $\frac{3}{5}\log(5x-15y+17)+(6x-3y)=\text{c}.$

উদা. 16. $(x+y+1)dx-(2x+2y+1)dy=0$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{2x+2y+1}$ মনে কর, $x+y=\text{v}$

$\therefore\ 1+\frac{dy}{dx}=\frac{d\text{v}}{dx}$; বা, $\frac{a\text{v}}{dx}-1=\frac{\text{v}+1}{2\text{v}+1}$

বা, $\frac{d\text{v}}{dx}=\frac{3\text{v}+2}{2\text{v}+1}$ বা, $\frac{2\text{v}+1}{3\text{v}+2}d\text{v}=dx$

বা, $\frac{2}{3}\cdot\frac{3v+\frac{3}{2}}{3v+2}dv=dx$ বা, $\frac{2}{3}\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{3v+2}\right)dv=dx$

বা, $\frac{2}{3}dv+\frac{1}{3}\frac{dv}{3v+2}=dx$ বা, $\frac{2}{3}v+\frac{1}{9}\log(3v+2)=x+c$

বা, $\frac{1}{9}\log(3x+3y+2)=x-\frac{2}{3}(x+y)+c.$

$\therefore$ $\frac{1}{9}\log(3x+3y+2)=\frac{1}{3}(x-2y)+c.$

উদাহরণমালা—VII-B

নিম্নের অন্তরফল সমীকরণগুলির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :

1. $ydx-xdy=xydx.$
2. $y(1+x^2)dy-x(1+y^2)dx=0$
3. $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$
4. $x^2\frac{dy}{dx}+y=1$
5. $\frac{dy}{dx}+\frac{y^2+y+1}{x^2+x+1}=0$
6. $\sec^2 x\tan y\,dx+\sec^2 y\tan x\,dx=0$
7. $\frac{\log(\sec x+\tan x)}{\cos x}dx=\frac{\log(\sec y+\tan y)}{\cos y}dy$
8. $(x^2-yx^2)dy+(y^2+xy^2)dx=0$
9. $\frac{dy}{dx}+1=e^{x+y}$
10. $(x-y)^2\frac{dy}{dx}=a^2.$
11. $\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)+\cos(x+y).$
12. $x.\frac{dy}{dx}+\frac{y^2}{x}=y.$
13. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2x^2}.$
14. $x.\frac{dy}{dx}-y=x\sqrt{x^2+y^2}.$
15. $y^2+x^2.\frac{dy}{dx}=xy.\frac{dy}{dx}.$
16. $(x^2-y^2)dx+2xydy=0.$
17. $\frac{dy}{dx}=\frac{3y-7x+7}{3x-7y-3}.$
18. $(2x+3y-5)\frac{dy}{dx}+(3x+2y-5)=0.$
19. $\frac{dv}{dx}=\frac{2x+9y-20}{6x+2y-10}.$
20. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+3}{2x-2y+5}.$
21. $(x+y)(dx-dy)=dx+dy.$
22. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x+y-2}.$

সমাধান ঃ

উদা. 1. $ydx - xdy = xydx$

বা, $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = dx \quad \therefore \quad \log x - \log y = x + c$

$\therefore \quad \log \frac{x}{y} = x + c.$

উদা. 2. $y(1+x^2)dy - x(1+y^2)dx = 0$

$\therefore \quad \frac{ydy}{1+y^2} - \frac{xdx}{1+x^2} = 0$ বা, $\frac{1}{2} \cdot \frac{2ydy}{1+y^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2xdx}{1+x^2} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\log(1+y^2) - \frac{1}{2}\log(1+x^2) = \frac{1}{2}\log c$

বা, $\log \frac{1+y^2}{1+x^2} = \log c$; বা, $\frac{1+y^2}{1+x^2} = c$

$\therefore \quad (1+y^2) = c(1+x^2).$

উদা. 3. $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$

$\therefore \quad \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$; বা, $-\frac{2xdx}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{2ydy}{2\sqrt{1-y^2}} = 0$

বা, $-\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = -c$; $\therefore \quad \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = c.$

উদা. 4. $x^2\frac{dy}{dx} + y = 1$

$\therefore \quad x^2\frac{dy}{dx} = 1 - y \qquad \therefore \quad \frac{dy}{1-y} = \frac{dx}{x}$

বা, $\frac{dy}{y-1} + \frac{dx}{x} = 0$ বা, $\log(y-1) + \log x = \log c$

বা, $\log x(y-1) = \log c$ বা, $x(y-1) = c.$

উদা. 5. $\frac{dy}{dx} + \frac{y^2+y+1}{x^2+x+1} = 0$

বা, $\frac{dx}{x^2+x+1} + \frac{dy}{y^2+y+1} = 0$

বা, $\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 0$

বা, $\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tan^{-1} \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tan^{-1} \frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = c'$

বা, $\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\tan^{-1}\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right]=c'$

$\therefore\ \tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\tan^{-1}\frac{2y+1}{\sqrt{3}}=c.$

উদা. 6. $\sec^2 x\tan y\,dx+\sec^2 y\tan x\,dx=0$

$\therefore\ \frac{\sec^2 x dx}{\tan x}+\frac{\sec^2 y dy}{\tan y}=0$

বা, $\log\tan x+\log\tan y=\log c$

বা, $\log(\tan x\tan y)=\log c \qquad \therefore\ \tan x\tan y=c.$

উদা. 7. $\frac{\log(\sec x+\tan x)}{\cos x}dx=\frac{\log(\sec y+\tan y)}{\cos y}dy$

বা, $\sec x\log(\sec x+\tan x)dx=\sec y\log(\sec y+\tan y)dy$

বা, $\log(\sec x+\tan x)d\log(\sec x+\tan x)$
$=\log(\sec y+\tan y)d\log(\sec y+\tan y)$

বা, $\frac{1}{2}[\log(\sec x+\tan x)]^2=\frac{1}{2}[\log(\sec y+\tan y)]^2+\frac{1}{2}c$

$\therefore\ [\log(\sec x+\tan x)]^2=[\log(\sec y+\tan y)]^2+c.$

উদা. 8. $(x^2-yx^2)dy+(y^2+xy^2)dx=0$

বা, $x^2(1-y)dy+y^2(1+x)dx=0$

বা, $\frac{1-y}{y^2}dy+\frac{1+x}{x^2}dx=0$ বা, $\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx=0$

বা, $-\frac{1}{y}-\log y-\frac{1}{x}+\log x=c$

$\therefore\ \log\frac{x}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+c\right)$

উদা. 9. $\frac{dy}{dx}+1=e^{x+y}$

মনে কর, $x+y=v \qquad \therefore\ 1+\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$

$\therefore$ প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণটি $\frac{dv}{dx}=e^v$ বা, $\frac{dv}{e^v}=dx.$

বা, $-\frac{1}{e^v}=x+c \quad \therefore\ \frac{1}{e^{x+y}}+x+c=0$

উদা. 10. $(x-y)^2\frac{dy}{dx}=a^2$

মনে কর, $x-y=v \qquad \therefore\ 1-\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$

$\therefore$ প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণটি $v^2\left(1-\frac{dv}{dx}\right)=a^2$

বা, $v^2-a^2=v^2\frac{dv}{dx}$ বা, $dx=\frac{v^2}{v^2-a^2}dv$

বা, $dx=\left(1+\frac{a^2}{v^2-a^2}\right)dv$ বা, $x+c=v+\frac{a^2}{2a}\log\frac{v-a}{v+a}$

বা, $x+c=x-y+\frac{a}{2}\log\frac{x-y-a}{x-y+a}$

$\therefore$ $y+c=\frac{a}{2}\log\frac{x-y-a}{x-y+a}$.

উদা. 11. $\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)+\cos(x+y)$

মনে কর, $x+y=v$ $\therefore$ $1+\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$

সুতরাং প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণটি $\frac{dv}{dx}-1=\sin v+\cos v$

বা, $\frac{dv}{dx}=\sin v+\cos v+1$ বা, $\frac{dv}{\sin v+\cos v+1}=dx$.

বা, $\frac{dv}{2\cos^2\frac{v}{2}+2\sin\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2}}=dx$

বা, $\frac{\sec^2\frac{v}{2}\,dv}{2\left(1+\tan\frac{v}{2}\right)}=dx$ $\therefore$ $\log\left(1+\tan\frac{v}{2}\right)=x+c$.

বা, $\log\left(1+\log\frac{x+y}{2}\right)=x+c$.

উদা. 12. $x.\frac{dy}{dx}+\frac{y^2}{x}=y$

$\therefore$ $x^2.\frac{dy}{dx}+y^2=xy$ বা, $\frac{dy}{dx}=\frac{xy-y^2}{x^2}$

মনে কর, $y=vx$ $\therefore$ $\frac{dy}{dx}=v+x.\frac{dv}{dx}$

সুতরাং প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণটি

$$v+x.\frac{dv}{dx}=\frac{x.vx-v^2x^2}{x^2}=v-v^2 \quad \therefore \quad x.\frac{dv}{dx}=-v^2$$

বা, $\frac{dv}{-v^2}=\frac{dx}{x}$; $\therefore$ $\frac{1}{v}=\log x+\log c=\log cx$

$$\therefore \quad cx=e^{\frac{1}{v}}=e^{\frac{y}{x}}.$$

উদা. 13. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2x^2}$

মনে কর, $y=vx$ $\quad\therefore\quad \frac{dy}{dx}=v+x.\frac{dv}{dx}$

সুতরাং প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণটি

$$v+x.\frac{dv}{dx}=\frac{x^2+v^2x^2}{2x^2}=\frac{1+v^2}{2}$$

বা, $x.\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}-v=\frac{(v-1)^2}{2}$; বা, $\frac{2dv}{(v-1)^2}=\frac{dx}{x}$

বা, $-\frac{2}{v-1}=\log x+\log c=\log cx$

$$\therefore \quad cx=e^{-\frac{2}{v-1}}=e^{\frac{2x}{x-y}}$$

উদা. 14. $x\frac{dy}{dx}-y=x\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y+x\sqrt{x^2+y^2}}{x}$

মনে কর, $y=vx$ $\quad\therefore\quad \frac{dy}{dx}=v+x.\frac{dv}{dx}$

$\therefore$ প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণটি

$$v+x.\frac{dv}{dx}=\frac{vx+x\sqrt{x^2+v^2x^2}}{x}=v+x\sqrt{1+v^2}$$

বা, $x.\frac{dv}{dx}=x\sqrt{1+v^2}$; বা, $\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}=dx$

বা, $\log(v+\sqrt{1+v^2})=x+\log c$

বা, $\log\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y}{x}}\right)=x+\log c$

বা, $\log\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}=x+\log c$

বা, $\log\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{cx}=x$ $\quad\therefore\quad y+\sqrt{x^2+y^2}=cxe^x.$

উদা. 15. $y^2+x^2.\frac{dy}{dx}=xy.\frac{dy}{dx}$

বা, $\frac{dy}{dx}(xy-x^2)=y^2 \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}$

মনে কর, $y=vx \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=v+x.\frac{dv}{dx}$

সুতরাং প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণ,

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2x^2}{x^2v-x^2}=\frac{v^2}{v-1}; \text{ বা, } x.\frac{dv}{dx}=\frac{v^2}{v-1}-v=\frac{v}{v-1}$$

বা, $\frac{v-1}{v}dv=\frac{dx}{x}$; বা, $\left(1-\frac{1}{v}\right)dv=\frac{dx}{x}$

বা, $v-\log v=\log x+\log c$; $\therefore \quad v=\log(vxc)$

বা, $vxc=e^{v}$ বা, $yc=e^{\frac{x}{y}}$.

উদা. 16. $(x^2-y^2)dx+2xydy=0$

বা, $2xydy=-(x^2-y^2)dx$ বা, $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}$

মনে কর, $y=vx \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=v+x.\frac{dv}{dx}$

$\therefore$ প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণ $v+x.\frac{dv}{dx}=\frac{v^2x^2-x^2}{2vx^2}=\frac{v^2-1}{2v}$

বা, $x.\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-1}{2v}-v=-\frac{v^2+1}{2v}$ বা, $\frac{2v}{v^2+1}dv+\frac{dx}{x}=0$

বা, $\log(v^2+1)+\log x=\log c$ বা, $x(v^2+1)=c$

বা, $x\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)=c$; $\therefore \quad x^2+y^2=cx$

উদা. 17. $\frac{dy}{dx}=\frac{3y-7x+7}{3x-7y-3}$

মনে কর, $x=x'+h, y=y'+k \quad \therefore \quad dx=dx', dy=dy'$

$\therefore$ প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণটি,

$$\frac{dy'}{dx'}=\frac{3(y'+k)-7(x'+h)+7}{3(x'+h)-7(y'+k)-3}=\frac{3y'-7x'+(3k-7h+7)}{3x'-7y'+(3h-7k-3)}=\frac{3y'-7x'}{3x'-7y'}$$

যখন $3k-7h+7=0$ এবং $3h-7k-3=0$ অর্থাৎ $h=1, \quad k=0$

এখন, $\frac{dy'}{dx'}=\frac{3y'-7x'}{3x'-7y'}$এ $y'=vx'$ ধর বা, $\frac{dy'}{dx'}=v+x'.\frac{dv}{dx'}$

বা, $\text{v}+x'.\frac{d\text{v}}{dx'}=\frac{3\text{v}x'-7x'}{3x'-7\text{v}x'}=\frac{3\text{v}-7}{3-7\text{v}}$

বা, $x'.\frac{d\text{v}}{dx'}=\frac{3\text{v}-7}{3-7\text{v}}-\text{v}=\frac{7(\text{v}^2-1)}{3-7\text{v}}$

বা, $\frac{3-7\text{v}}{7(\text{v}^2-1)}d\text{v}=\frac{dx'}{x'}$

বা, $-\frac{1}{2}.\frac{2\text{v}}{\text{v}^2-1}d\text{v}+\frac{3}{7}.\frac{d\text{v}}{\text{v}^2-1}=\frac{dx'}{x'}$

বা, $-\frac{1}{2}\log(\text{v}^2-1)+\frac{3}{14}\log\frac{\text{v}-1}{\text{v}+1}=\log \text{c}x'$

বা, $\frac{3}{14}\log\frac{\text{v}-1}{\text{v}+1}=\log \text{c}x'+\frac{1}{2}\log(\text{v}^2-1)$

$$=\log(\text{c}x'\sqrt{\text{v}^2-1})=\log \text{c}\sqrt{\text{v}^2x'^2-x'^2}$$

বা, $\frac{3}{14}\log\frac{\frac{y'}{x'}-1}{\frac{y'}{x'}+1}=\log \text{c}\sqrt{y'^2-x'^2}$

বা, $\frac{3}{14}\log\frac{y'-x'}{y'+x'}=\log \text{c}\sqrt{y'^2-x'^2}$

$\therefore\ \frac{3}{14}\log\frac{y-x+1}{y+x-1}=\log \text{c}\sqrt{y^2-(x-1)^2}$.

উদা. 18. $(2x+3y-5)\frac{dy}{dx}+(3x+2y-5)=0$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{3x+2y-5}{2x+3y-5}$.

মনে কর, $x=x'+h,\ \ y=y'+k\ \ \therefore\ dx=dx',\ \ dy=dy'$

$\therefore\ \frac{dy'}{dx'}=-\frac{3(x'+h)+2(y'+k)-5}{2(x'+h)+3(y'+k)-5}$

$$=-\frac{3x'+2y'+(3h+2k-5)}{2x'+3y'+(2h+3k-5)}$$

এখন, $3h+2k-5=0$; $2h+3k-5=0$, যদি $h=1,\ k=1,$
সুতরাং অন্তরকল সমীকরণটি হইতেছে,

$\frac{dy'}{dx'}=-\frac{3x'+2y'}{2x'+3y'}$ ধর, $y'=\text{v}x'$; $\frac{dy'}{dx'}=\text{v}+x'.\frac{d\text{v}}{dx'}$

সুতরাং, $\text{v}+x'.\frac{d\text{v}}{dx'}=-\frac{3x'+2\text{v}x'}{2x'+3\text{v}x'}=-\frac{3+2\text{v}}{2+3\text{v}}$

বা, $x'.\frac{dv}{dx'} = -\frac{3+2v}{2+3v} - v = -\frac{3+4v+3v^2}{2+3v}$

বা, $\frac{3v+2}{3v^2+4v+3}dv + \frac{dx'}{x'} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\cdot\frac{6v+4}{3v^2+4v+3}dv + \frac{dx'}{x'} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\log(3v^2+4v+3) + \log x' = \log c'$

বা, $\log x'\sqrt{3v^2+4v+3} = \log c'$

বা, $\sqrt{3v^2x'^2+4vx'^2+3x'^2} = c'$

বা, $3y'^2+4x'y'+3x'^2 = c'^2 = c$ (ধর)

বা, $3(x-1)^2+4(x-1)(y-1)+3(y-1)^2 = c.$

উদা. 19. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+9y-20}{6x+2y-10}.$

মনে কর $x = x'+h,\ y = y'+k \quad \therefore \quad dx = dx',\ dy = dy'$

$\therefore \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{2(x'+h)+9(y'+k)-20}{6(x'+h)+2(y'+k)-10} = \frac{2x'+9y'+(2h+9k-20)}{6x'+2y'+(6h+2k-10)}$

যদি $2h+9k-20=0$ এবং $6h+2k-10=0$ হয় তবে $h=1,\ k=2.$

স্থতরাং $h=1,\ k=2$ এর জন্য সমীকরণটি $\frac{dy'}{dx'} = \frac{2x'+9y'}{6x'+2y'}$

এখন, ধর $y' = vx' \quad \therefore \quad \frac{dy'}{dx'} = v + x'.\frac{dv}{dx'}$

স্থতরাং $v + x'.\frac{dv}{dx'} = \frac{2x'+9vx'}{6x'+2vx'} = \frac{2+9v}{6+2v}$

বা, $x'.\frac{dv}{dx} = \frac{2+9v}{6+2v} - v = \frac{2+3v-2v^2}{2v+6}$

বা, $\frac{2v+6}{2v^2-3v-2}dv + \frac{dx'}{x'} = 0$ বা, $\frac{2v+6}{(2v+1)(v-2)}dv + \frac{dx'}{x'} = 0$

বা, $\frac{-2}{2v+1}dv + \frac{2}{v-2}dv + \frac{dx'}{x'} = 0$

বা, $-\log(2v+1) + 2\log(v-2) + \log x' = \log c$

বা, $\log\frac{x'(v-2)^2}{2v+1} = \log c$ বা, $x'(v-2)^2 = c(2v+1)$

বা, $x'\left(\frac{y'}{x'}-2\right)^2 = c\left(\frac{2y'}{x'}+1\right)$ বা, $(y'-2x')^2 = c(x'+2y')$

বা, $[(y-2)-2(x-1)]^2=c[x-1+2(y-2)]$

বা, $(y-2x)^2=c(x+2y-5)$

উদা. 20. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+3}{2x-2y+5}$

মনে কর, $x-y=v \quad \therefore \quad 1-\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dv}{dx}$

$\therefore$ প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণ $1-\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{v+3}{2v+5}$

বা, $\dfrac{dv}{dx}=1-\dfrac{v+3}{2v+5}=\dfrac{v+2}{2v+5}$; বা, $\dfrac{2v+5}{v+2}\,dv=dx$

বা, $\left(2+\dfrac{1}{v+2}\right)dv=dx$ বা, $2v+\log(v+2)=x+c$

বা, $2(x-y)+\log(x-y+2)=x+c$

উদা. 21. $(x+y)(dx-dy)=dx+dy$

$\therefore \quad (x+y-1)dx=(x+y+1)dy$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y-1}{x+y+1}$

মনে কর, $x+y=v \quad \therefore \quad 1+\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dv}{dx}$.

$\therefore$ প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণ $\dfrac{dv}{dx}-1=\dfrac{v-1}{v+1}$

বা, $\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{v-1}{v+1}+1=\dfrac{2v}{v+1}$ বা, $\dfrac{v+1}{2v}dv=dx$

বা, $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2v}\right)dv=dx$ বা, $\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}\log v=x+\frac{1}{2}\log c$

বা, $v+\log v=2x+\log c$; বা, $x+y+\log v=2x+\log c$

বা, $\log\dfrac{v}{c}=x-y$ বা, $\dfrac{v}{c}=e^{x-y} \quad \therefore \quad x+y=c.e^{x-y}$

উদা. 22. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x+y-2}$

মনে কর, $x+y=v \quad \therefore \quad 1+\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dv}{dx}$

$\therefore$ প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণ $\dfrac{dv}{dx}-1=\dfrac{v}{v-2}$

বা, $\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{v}{v-2}+1=\dfrac{2v-2}{v-2}$

বা, $\frac{v-2}{2v-2}dv=dx$ বা, $\frac{1}{2}\cdot\frac{v-2}{v-1}dv=dx$

বা, $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{v-1}\right)dv=dx.$ বা, $\frac{1}{2}v-\frac{1}{2}\log(v-1)=x+\frac{\log c}{2}$

বা, $v-\log(v-1)=2x+\log c$

বা, $v-2x=\log(v-1)+\log c=\log c(v-1)$

বা, $\log c(x+y-1)=y-x \quad \therefore \quad c(x+y-1)=e^{y-x}$

প্রশ্নমালা—VII-A

নিম্নের সমীকরণগুলির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :

1. $xdy-ydx=0$ 2. $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$

3. $(1-x)dy-(1+y)dx=0$ 4. $xdy+ydx=0$

5. $(1-x^2)(1-y)dx=xy(1+y)dy$

6. $(e^y+1)\cos x\,dx+e^y\sin x\,dy=0$

7. $y-x.\frac{dy}{dx}=a\left(y^2+\frac{dy}{dx}\right)$ 8. $(x+y)^2.\frac{dy}{dx}=a^2$

9. $\frac{dy}{dx}=(4x+y+1)^2$ 10. $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$

11. $(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}=xy$ 12. $x^2dy+y(x+y)dx=0$

13. $2x^2\frac{dy}{dx}=y(x+y)$ 14. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y-3}{2x+y-3}$

15. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-6y+7}{x-3y+4}$ 16. $\frac{dy}{dx}=\frac{4x+6y+5}{3y+2x+4}$

17. $(3x+5y+6).\frac{dy}{dx}=(7y+x+2)$

7-3. দ্বিতীয় ক্রম ও প্রথম ঘাতের অন্তরকল সমীকরণের সমাধান :

এই অংশে $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$ আকারের ধ্রুবক সহগযুক্ত দ্বিতীয় ক্রমের এবং প্রথম ঘাতের সমীকরণের সমাধান করা হইবে।

উদা. 1. সমাধান কর : $\frac{d^2y}{dx^2}-7.\frac{dy}{dx}+12y=0$

মনে কর $y=e^{mx}$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি সমাধান।

$\frac{dy}{dx}=me^{mx},\ \frac{d^2y}{dx^2}=m^2e^{mx}$

সুতরাং প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণে বসাইয়া পাওয়া যাইবে,

$$m^2e^{mx}-7me^{mx}+12e^{mx}=0 \quad \text{বা,} \quad e^{mx}(m^2-7m+12)=0$$

$\therefore \; m^2-7m+12=0 \quad [\because \; e^{mx}\neq 0] \qquad \therefore \; m=3,\ 4$

যেহেতু সহায়ক সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান নির্ণেয় সাধারণ সমাধান,

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{4x}$$

উদা. 2. সমাধান কর : $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2.\dfrac{dy}{dx}+y=0$

মনে কর, $y=e^{mx}$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি সমাধান।

এখন. $\dfrac{dy}{dx}=me^{mx}$ ও $\dfrac{d^2y}{dx^2}=m^2e^{mx}$.

সুতরাং প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণে $y=e^{mx}$ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$m^2e^{mx}+2me^{mx}+e^{mx}=0 \qquad$ বা, $\; e^{mx}(m^2+2m+1)=0$

বা, $\; m^2+2m+1=0 \qquad [\because \; e^{mx}\neq 0.]$

$\therefore \; (m+1)^2=0 \qquad \therefore \; m=-1,\ -1$

যেহেতু সহায়ক সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান, প্রদত্ত সমীকরণের নির্ণেয় সাধারণ সমাধান $y=(c_1+c_2x)e^{-x}$

উদা. 3. সমাধান কর : $\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dx}{dt}+5x=0$

মনে কর, $x=e^{mt}$ একটি সমাধান।

এখন, $\dfrac{dx}{dt}=me^{mt}$ ও $\dfrac{d^2x}{dt^2}=m^2e^{mt}$.

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণে $x=e^{mt}$ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$$m^2e^{mt}+2me^{mt}+5e^{mt}=0 \quad \text{বা,} \quad (m^2+2m+5)e^{mt}=0$$

বা, $\; m^2+2m+5=0 \qquad [\because \; e^{mt}\neq 0]$

$$\therefore \; m=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=-1\pm 2i=-1+2i,\ -1-2i$$

যেহেতু সহায়ক সমীকরণের বীজদ্বয় অবাস্তব ও অসমান প্রদত্ত অন্তরকল সমীকরণের নির্ণেয় সাধারণ সমাধান,

$$y=c_1e^{(-1+2i)x}+c_2e^{(-1-2i)x}$$

$$=e^{-x}.c_1e^{2ix}+e^{-x}.c_2e^{-2ix}$$

$$=e^{-x}[c_1(\cos 2x+i\sin 2x)+c_2(\cos 2x-i\sin 2x)]$$

$$=e^{-x}[(c_1+c_2)\cos 2x+i(c_1-c_2)\sin 2x]$$

$$=e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$$

উদা. 4. সমাধান কর :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(a+b)\frac{dy}{dx}+aby=0$$

মনে কর, $y=e^{mx}$ সমীকরণটির একটি সমাধান।

এখন, $\frac{dy}{dx}=me^{mx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=m^2e^{mx}$

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণে $y=e^{mx}$ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$m^2e^{mx}+(a+b)me^{mx}+abe^{mx}=0$; বা, $e^{mx}[m^2+(a+b)m+ab]=0$

বা, $m^2+(a+b)m+ab=0$ $[\because e^{mx}\neq 0]$

বা, $(m+a)(m+b)=0$ $\therefore m=-a, -b.$

যেহেতু সহায়ক সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান, প্রদত্ত সমীকরণের সাধারণ সমাধান, $y=c_1e^{-ax}+c_2e^{-bx}$.

উদা. 5. সমাধান কর :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$ এবং $x=0$ হইলে $y=4$ ও $x=\frac{\pi}{2}$ হইলে $y=0$

মনে কর, $y=e^{mx}$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি সমাধান।

$$\therefore \frac{dy}{dx}=me^{mx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=m^2e^{mx}.$$

এখন, $y=e^{mx}$ প্রদত্ত সমীকরণে বসাইলে, $m^2e^{mx}+e^{mx}=0$

বা, $e^{mx}(m^2+1)=0$ বা, $m^2+1=0$ $[\because e^{mx}\neq 0]$ $\therefore m=\pm i.$

যেহেতু সহায়ক সমীকরণের বীজদ্বয় অবাস্তব,

প্রদত্ত সমীকরণের সাধারণ সমাধান $y=c_1e^{ix}+c_2e^{-ix}$

$=c_1(\cos x+i\sin x)+c_2(\cos x-i\sin x)$

$=(c_1+c_2)\cos x+i(c_1-c_2)\sin x$

$=A\cos x+B\sin x.$

এখন, $x=0$ হইলে $y=4$; $\therefore 4=A.\cos 0^\circ+B.\sin 0^\circ=A.$

আবার, $x=\frac{\pi}{2}$ হইলে $y=0$; $\therefore 0=A\cos\frac{\pi}{2}+B\sin\frac{\pi}{2}$ $\therefore B=0$

সুতরাং নির্ণেয় বিশেষ সমাধান $y=4\cos x.$

উদাহরণমালা VII-C

1. সমাকরণগুলির সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর :

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2}-n^2y=0$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2}-2m\frac{dy}{dx}+(m^2+n^2)y=0$ (iv) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+13y=0$

(v) $\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+9y=0$ (vi) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=0$

2. বিশেষ সমাধান নির্ণয় কর ঃ

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=0$ যখন $x=0,\ y=3,\ \frac{dy}{dx}=0$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=0$ যখন $x=0,\ y=2,\ \frac{dy}{dx}=0$

সমাধান ঃ

উদা. 1. (i) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=0$

মনে কর, $y=e^{mx}$ সমীকরণটির একটি সমাধান।

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=me^{mx},\ \frac{d^2y}{dx^2}=m^2e^{mx}$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণে $y=e^{mx}$ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$m^2e^{mx}-2e^{mx}m+e^{mx}=0$ বা, $e^{mx}(m^2-2m+1)=0$

$\therefore\ m^2-2m+1=0\ [\because\ e^{mx}\neq 0]\quad \therefore\ m=1, 1$

যেহেতু, সহায়ক সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান,

প্রদত্ত সমীকরণের সাধারণ সমাধান $y=(c_1+c_2x)e^x$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}-n^2y=0$

মনে কর, $y=e^{mx}$ সমীকরণটির একটি সমাধান।

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=me^{mx},\ \frac{d^2y}{dx^2}=m^2e^{mx}$$

সমীকরণে $y=e^{mx}$ বসাইলে সহায়ক সমীকরণ হয়,

$$m^2-n^2=0 \text{ বা, } m^2=n^2\quad \therefore\ m=\pm n$$

যেহেতু সহায়ক সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান,

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের সাধারণ সমাধান, $y=c_1e^{nx}+c_2e^{-nx}$.

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2}-2m\frac{dy}{dx}+(m^2+n^2)y=0$

মনে কর, $y=e^{\alpha x}$ সমীকরণটির একটি সমাধান।

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\alpha e^{\alpha x},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\alpha^2e^{\alpha x}$$

$\therefore$ সমীকরণে $y=e^{\alpha x}$ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$$e^{\alpha x}(\alpha^2-2m\alpha+m^2+n^2)=0$$

যেহেতু $e^{\alpha x}\neq 0$, $\alpha^2-2m\alpha+m^2+n^2=0$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{2m\pm\sqrt{4m^2-4(m^2+n^2)}}{2}$$

$$=\frac{m\pm in}{2}=\frac{m+in}{2},\ \frac{m-in}{2}.$$

সুতরাং সহায়ক সমীকরণের বীজদ্বয় অবাস্তব ও অসমান।

$$\therefore\quad \text{নির্ণেয় সাধারণ সমাধান}\quad y=C_1e^{\frac{m+in}{2}x}+C_2e^{\frac{m-in}{2}x}$$

$$=C_1e^{\frac{mx}{2}}e^{\frac{inx}{2}}+C_2e^{\frac{mx}{2}}e^{-\frac{inx}{2}}$$

$$=e^{\frac{mx}{2}}[C_1(\cos nx+i\sin nx)+C_2(\cos nx-i\sin nx)]$$

$$=e^{\frac{mx}{2}}[(C_1+C_2)\cos nx+i(C_1-C_2)\sin nx]$$

$$=e^{\frac{mx}{2}}(A\cos nx+B\sin nx).$$

(iv) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+13y=0$

মনে কর, $y=e^{mx}$ একটি সমাধান।

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=me^{mx},\ \frac{d^2y}{dx^2}=m^2e^{mx}$$

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণে $y=e^{mx}$ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$$e^{mx}(m^2-4m+13)=0\qquad \because\ e^{mx}\neq 0,\quad m^2-4m+13=0$$

$$\therefore\quad m=\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\frac{4\pm 6i}{2}=2\pm 3i$$

যেহেতু সহায়ক সমীকরণের বীজদ্বয় অবাস্তব ও অসমান। প্রদত্ত সমীকরণের নির্ণেয় সাধারণ সমাধান $y=C_1e^{(2+3i)x}+C_2e^{(2-3i)x}$

$$=C_1e^{2x}.\,e^{3ix}+C_2e^{2x}.\,e^{-3ix}$$

$$=e^{2x}[C_1(\cos 3x+i\sin 3x)+C_2(\cos 3x-i\sin 3x)]$$

$=e^{2x}[(c_1+c_2)\cos 3x+i(c_1-c_2)\sin 3x]$

$=e^{2x}[A\cos 3x+B\sin 3x]$

(v) $\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+9y=0$

মনে কর, $y=e^{mx}$ সমীকরণটির একটি সমাধান।

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=me^{mx},\ \frac{d^2y}{dx^2}=m^2e^{mx}.$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণে $y=e^{mx}$ বসাইয়া পাওয়া যায়, $e^{mx}(m^2+6m+9)=0$

$\because \quad e^{mx}\neq 0,\quad m^2+6m+9=0$

বা, $(m+3)^2=0 \qquad \therefore \quad m=-3,\ -3.$

যেহেতু সহায়ক সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান, নির্ণেয় সাধারণ সমাধান

$y=(c_1+c_2x)e^{-3x}$

(vi) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=0$

মনে কর, $y=e^{mx}$ সমীকরণের একটি সমাধান।

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=me^{mx},\ \frac{d^2y}{dx^2}=m^2e^{mx}.$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণে $y=e^{mx}$ বসাইয়া পাওয়া যায়, $(m^2+m)e^{mx}=0$

যেহেতু $e^{mx}\neq 0,\quad m^2+m=0$

বা, $m(m+1)=0 \qquad \therefore \quad m=0,\ -1$

সুতরাং সহায়ক সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান।

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ সমাধান $y=c_1+c_2e^{-x}.$

উদা. 2. (i) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=0$

মনে কর, $y=e^{mx}$ একটি সমাধান

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=me^{mx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=m^2e^{mx}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণে $y=e^{mx}$ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$e^{mx}(m^2+m-2)=0$ বা, $e^{mx}\neq 0,\ m^2+m-2=0$

বা, $(m+2)(m-1)=0 \qquad \therefore \quad m=1,\ -2$

সুতরাং সমীকরণের সাধারণ সমাধান $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x} \quad \dots \quad \dots$(i)

এখন, $x=0,\ y=3 \quad \therefore \ 3=c_1+c_2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots$(ii)

আবার, (i) হইতে অন্তরকলন করিয়া পাওয়া যায়

$\frac{dy}{dx}=c_1e^x-2c_2e^{-2x}$ যখন, $x=0$, $\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore\ 0=c_1-2c_2$ ... ...(iii)

এখন, (ii) ও (iii) সমাধান করিয়া পাওয়া যায়, $c_1=2$ ও $c_2=1$

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান $y=2e^x+e^{-2x}$.

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0$

মনে কর, $y=e^{mx}$ একটি সমাধান।

এখন, $\frac{dy}{dx}=me^{mx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=m^2e^{mx}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণে $y=e^{mx}$ বসাইয়া পাওয়া যায়

$e^{mx}(m^2-3m+2)=0$ $\because\ e^{mx}\neq 0$, $m^2-3m+2=0$

বা, $(m-2)(m-1)=0$ $\therefore\ m=1, 2$

$\therefore$ সমীকরণের সমাধান $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$ ... ...(i)

বা, $\frac{dy}{dx}=c_1e^x+2c_2e^{2x}$ ... ...(ii)

এখন, $x=0$, $y=2$, $\frac{dy}{dx}=0$ (i) ও (ii)-এ বসাইয়া পাওয়া যায়,

$2=c_1+c_2$ $0=c_1+2c_2$ $\therefore\ c_1=4$, $c_2=-2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $y=4e^x-2e^{2x}$.

প্রশ্নমালা—VII-B

1. সমাধান নির্ণয় কর :

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}-(m+n)\frac{dy}{dx}+mny=0$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=0$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2}+2a\frac{dy}{dx}+a^2y=0$ (iv) $\frac{d^2y}{dx^2}-7\frac{dy}{dx}-44y=0$

(v) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+y=0$

2. বিশেষ সমাধান নির্ণয় কর :

$\frac{d^2y}{dx^2}+n^2y=0$ যখন $x=0$, $y=a$, $\frac{dy}{dx}=0$

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা I

1. (i) $\dfrac{x^3}{3}+e^x$, (ii) e^x+2x-e^{-x} ; **2.** (i) $\frac{1}{2}(x+\sin x)$,

(ii) $\frac{1}{2}\left(\cos x-\dfrac{\cos 5x}{5}\right)$; **3.** $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$; **4.** (i) $\log x+3x+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$,

(ii) $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}+\dfrac{x^7}{7}+\dfrac{x^8}{8}$.

5. (i) $-\cot x+\sec x-\cos x$, (ii) $\tan x-\cot x$,

(iii) $-\cot x-\frac{3}{2}x-\dfrac{\sin 2x}{4}$; **6.** (i) $2\sec x-3\operatorname{cosec} x$,

(ii) $\sin x\cos x$; **7.** (i) $\tan x-x$, (iii) $\tan x+\sec x$;

8. (i) $\frac{1}{4}x+\dfrac{\sin 6x}{24}+\dfrac{\sin 4x}{16}+\dfrac{\sin 2x}{8}$,

(iii) $-\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{\cos(p+m-n)x}{p+m-n}+\dfrac{\cos(p-m+n)x}{p-m+n}-\dfrac{\cos(p+m+n)x}{p+m+n}\right.$

$\left.-\dfrac{\cos(p-m-n)x}{p-m-n}\right]$.

প্রশ্নমালা II

1. (i) $\frac{1}{3}\log(3x+4)$, (ii) $\sec^{-1}x$, (iii) $\log\dfrac{x-3}{x-2}$;

2. (i) $\dfrac{a'}{a^2}(ax+b)+\dfrac{ab'-a'b}{a^2}\log(ax+b)$,

(ii) $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{a-b}\left\{(x+a)^{\frac{3}{2}}-(x+b)^{\frac{3}{2}}\right\}$; **3.** (i) $\log\sec x$,

(ii) $\log\sin x$; **4.** (i) $\log\log(\sec x+\tan x)$, (ii) $2\sqrt{x+\sin x}$,

(iii) $\log(\log\tan x)$; **5.** (i) $\log\sin^{-1}x$, (ii) $\log(1+\tan x)$;

6. (i) $\tan(x.e\ )$, (ii) $\tan^{-1}(\log x)$; **7.** (i) $\frac{1}{6}\tan^{-1}\dfrac{3x-2}{2}$,

(ii) $\log\dfrac{3x+4}{2x+3}$, (iii) $\frac{1}{2}\log\dfrac{x^2+1}{x^2+3}$;

8. (i) $\frac{1}{2}\log(2x^2+x-1)+\frac{5}{6}\log\dfrac{2x-1}{2(x+1)}$,

(ii) $\frac{7}{2}\log(x^2-2x+35)-\dfrac{2}{\sqrt{34}}\tan^{-1}\dfrac{x-1}{\sqrt{34}}$;

9. (i) $\log[(2x+1)+2\sqrt{x^2+x+1}]$,

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\log\left(x-\frac{1}{6}+\sqrt{x^2-\dfrac{x}{3}+1}\right)$;

10. (i) $\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})$,

(ii) $-\frac{3}{4}\sqrt{2-3x-2x^2}+\frac{13}{4\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{4x+3}{5}$,

(iii) $2\sqrt{x^2+x+1}+8\log\left[\frac{2x+1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right]$;

11. (i) $\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}$, (ii) $\log\frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}+1}$,

(iii) $\frac{1}{3}\log\left[\frac{5x-1}{9(2-x)}+\frac{\sqrt{1-2x+3x^2}}{3(2-x)}\right]$; **12.** (i) $\tan^{-1}(e^x)$,

(ii) $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$; **13.** (i) $\frac{3}{4}\log(x+3)+\frac{1}{4}\log(x-1)$,

(ii) $x-\log(x^2+2x+3)+\frac{3}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$.

14. (i) $\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\log(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1})$,

(ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}[\log x-\log(x+3+\sqrt{x^2+2x+3})]$

15. (i) $\log(e^t+\sqrt{e^{2t}-16})$, (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\log(x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x+2})$.

প্রশ্নমালা III

1. (i) $\frac{\cos mx}{m^2}+\frac{x\sin mx}{m}$, (ii) $\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}$;

2. (i) $2x\tan\frac{x}{2}-4\log\sec\frac{x}{2}$, (ii) $-e^{-x}(2+2x+x^2)$,

(iii) $\frac{x^3}{3}\sin^{-1}x+\frac{x^2+2}{9}\sqrt{1-x^2}$;

3. (i) $\frac{x^4}{128}[32(\log x)^3-24(\log x)^2-12\log x-3]$,

(ii) $\frac{1}{8}(1-2x^2)\cos 2x+\frac{1}{4}x\sin 2x$;

4. (i) $x\log(x+\sqrt{x^2+a^2})-\sqrt{x^2+a^2}$, (ii) $\log x(\log\log x-1)$;

5. (i) $-\frac{x}{4}\cos^4 x+\frac{1}{128}(12x+8\sin 2x+\sin 4x)$

(ii) $\frac{1}{9}(6\sin x+\sin^3 x-9x\cos x+3x\cos^3 x)$;

6. (i) $2x\tan^{-1}x-\log(1+x^2)$, (ii) $2x\tan^{-1}x-\log(1+x^2)$,

(iii) $2x\tan^{-1}x-\log(1+x^2)$; **7.** (i) $e^x\log\sin x$, (ii) $\frac{1}{2}e^{2x}\tan x$;

8. (i) $\frac{e^x}{2}\left[\frac{\cos 5x+5\sin 5x}{26}+\frac{\cos x+\sin x}{2}\right]$,

(ii) $-\frac{e^{-x}}{5}[\sin 2x+2\cos 2x]$;

9. $\dfrac{e^x \tan^{-1}x}{2}\left[\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m^2+4}\left\{\dfrac{(1+x^2)m}{(1+x^2)}+\dfrac{4x}{(1+x^2)}\right\}\right]$;

10. $\dfrac{e^x}{2}[(x^3-3x+3)\sin x-(x^3-3x^2+3x)\cos x]$;

11. $\frac{1}{2}[x(x-\sqrt{x^2-1})-\log(x+\sqrt{x^2-1})]$;

12. $\frac{2}{3}(2x^2+3x+4)^{\frac{3}{2}}+\dfrac{4x+3}{4}\sqrt{2x^2+3x+4}+\dfrac{23}{16}\sqrt{2}\log(x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x+2})$; 13. $\frac{1}{4}[(2x-\alpha-\beta)\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}]-\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{2}\log\left[x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}\right]$;

14. $\frac{1}{2}(x+2)\sqrt{x^2-4}+4\log(x+\sqrt{x^2-4})$.

প্রশ্নমালা IV

1. (i) $\frac{1}{2}\log\tan x$, (ii) $2\sin x-\log(\sec x+\tan x)$;

2. (i) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log\dfrac{1+\sqrt{2}\sin x}{1-\sqrt{2}\sin x}$, (ii) $\tan x-\cot x$,

(iii) $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x$; 3. (i) $2\cos x+\log\tan\dfrac{x}{2}$,

(ii) $\log\tan\dfrac{x}{2}-x\operatorname{cosec}x$; 4. (i) $\frac{1}{2}\log(\sec x+\tan x)$;

(ii) $2\cot^{\frac{3}{2}}x(\frac{1}{5}\tan^4 x+2\tan^2 x-\frac{1}{3})$; 5. $-\dfrac{1}{1+\tan x}$;

6. $\frac{1}{5}\log\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{4}{3}\right)$; 7. $-\dfrac{1}{3(3\tan x+4)}$;

8. (i) $\frac{1}{2}\log\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$, (ii) $\frac{1}{4}\log\dfrac{2+\tan x}{2-\tan x}$;

9. (i) $-\log\left(1+\cot\dfrac{x}{2}\right)$, (ii) $2x+\log(3+4\sin x+5\cos x)$;

10. $\tan^{-1}(\tan^2 x)$.

প্রশ্নমালা V

1. (i) $\log\dfrac{x}{x+1}$, (ii) $2\log(x-3)-\log(x-2)$,

(iii) $\frac{5}{3}\log(x-1)-\frac{3}{2}\log x-\frac{1}{6}\log(x+2)$;

2. (i) $\frac{1}{2}x^2-7x-27\log(x+3)+64\log(x+4)$, (ii) $x-\frac{3}{2}\log\dfrac{x-4}{x-2}$;

3. (i) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}\log(x-a)+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}\log(x-b)+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}\log(x-c)$,

(ii) $\frac{1}{4}\log\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, (iii) $\frac{1}{4}\log\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{2}\tan^{-1}x$;

4. (i) $-\dfrac{x-1}{x-2}-3\log\dfrac{x-2}{x-1}+3.\dfrac{x-2}{x-1}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^2$,

(ii) $\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{3}\log\dfrac{x-1}{x+2}\right)$;

5. (i) $\dfrac{1}{2(a^2-b^2)}[a^2\log(x^2+a^2)-b^2\log(x^2+b^2)]$,

(ii) $x+\dfrac{a^3}{b^2-a^2}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}+\dfrac{b^3}{a^2-b^2}\tan^{-1}\dfrac{x}{b}$;

6. (i) $\frac{1}{3}\log\dfrac{x-1}{\surd(x^2+x+1)}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$, (ii) $\frac{1}{6}\log\dfrac{x^2-2}{x^2+1}$,

(iii) $\tan^{-1}x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}x\surd 2$,

(iv) $x+\log(1+e^x)-2\log(1+2e^x)$, (v) $\dfrac{1}{a-b}\log\dfrac{\sin x-a}{\sin x-b}$.

প্রশ্নমালা VII-A

1. $y=cx$; 2. $\log(xy)+x-y=c$; 3. $(1-x)(1+y)=c$;

4. $xy=c$; 5. $\log x-\dfrac{x^2}{2}=-\dfrac{y^2}{2}-2y-2\log(1-y)+c$;

6. $\sin x(e^y+1)=c$; 7. $y=c(1-ay)(x+a)$;

8. $x+y=a\tan\dfrac{y-c}{a}$; 9. $4x+y+1=2\log(2x+c)$;

10. $x+y=\tan(x+c)$; 11. $cy=e^{\frac{x^2}{2y^2}}$; 12. $2x+y=cx^2y$;

13. $y-x=cy\sqrt{x}$; 14. $\dfrac{x+y-2}{x-y}=c\surd\{(x-1)^2-(y-1)^2\}$;

15. $2x-y+\frac{1}{5}\log(5x-15y+17)=c$;

16. $y-2x+\frac{3}{8}\log[8(3y+2x)+23]=c$;

17. $\log(5v^2-4v-1)-\frac{5}{3}\log\dfrac{5(v-1)}{5v+1}=\log\dfrac{c}{x'^2}$

যখন $v=\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{y}{x+2}$.

প্রশ্নমালা VII-B

1. (i) $c_1e^{mx}+c_2e^{nx}$, (ii) $y=(c_1+c_2x)e^{2x}$,

(iii) $y=(c_1+c_2x)e^{-ax}$, (iv) $y=c_1e^{11x}+c_2e^{-4x}$,

(v) $y=e^{2x}\left(c_1e^{\sqrt{3}x}+c_2e^{-\sqrt{3}x}\right)$; 2. $x=a\cos nt$.

বেগ ও ত্বরণ

(Velocity and Acceleration)

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

(i) সমবেগ $=v$, সময় $=t$ এবং সরণ $=s$ হইলে, $s=v.t.$

(ii) u এবং v দুইটি বেগ, α তাহাদের অন্তর্বর্তী কোণ, w লব্ধি বেগ, u বেগের সহিত লব্ধির নতি θ.

(a) $w^2=u^2+v^2+2uv\cos\alpha$.

(b) $\tan\theta=\dfrac{v\sin\alpha}{u+v\cos\alpha}$.

(c) বৃহত্তম লব্ধি $=u+v$ এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি $=u\sim v$.

(iii) V বেগের সহিত θ-কোণে V-এর উপাংশ $V\cos\theta$ এবং এই দিকের লম্বাভিমুখে (অর্থাৎ V-এর সহিত $90°-\theta$ কোণে) উপাংশ $V\sin\theta$.

(iv) w বেগের সহিত θ এবং ϕ কোণ ধরিয়া w-এর বিশ্লেষিতাংশ নির্ণয়ের জন্য

$$\frac{u}{\sin\phi}=\frac{v}{\sin\theta}=\frac{w}{\sin(\theta+\phi)}.$$

উদাহরণমালা I

উদা. 1. একটি রেলগাড়ী ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে চলিলে (i) প্রতি সেকেণ্ডে উহার বেগ কত ফুট ? (ii) 5 মিনিটে উহার সরণ কত ?

(i) 1 ঘণ্টায় সরণ $=60$ মাইল

$\therefore$ 1 মিনিটে সরণ $=1$ মাইল বা, 1760×3 ফুট

1 সেকেণ্ড „ $=\dfrac{1760\times3}{60}=88$ ফুট $\therefore$ $v=88$ ফু./সে.

দ্রষ্টব্য ঃ স্মরণ রাখিলে সুবিধা হইবে—

ঘণ্টায় 60 মাইল বেগ = সেকেণ্ডে 88 ফুট বেগ

(ii) 5 মিনিট $=5\times60=300$ সে. ; $s=vt=88\times300=26400$ ফুট।

লক্ষ্য কর ঃ ঘণ্টায় 30 মাইল বেগ = সেকেণ্ডে 44 ফুট

„ 10 „ „ = সেকেণ্ডে $\frac{44}{3}$ ফুট।

উদা. 2. ফুট এবং সেকেণ্ড দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক লইয়া নিম্নলিখিত বেগের মান নির্ণয় কর ঃ—(i) ঘণ্টায় 75 মাইল ; (ii) মিনিটে 30 গজ।

(i) এক ঘণ্টায় সরণ = 75 মাইল

∴ এক মিনিটে সরণ $= \frac{75}{60}$ মাইল $= \frac{75}{60} \times 1760 \times 3$ ফুট

এক সেকেণ্ডে সরণ $= \frac{75}{60 \times 60} \times 1760 \times 3$ ফুট $= 110$ ফুট

∴ বেগ ঘণ্টায় 75 মাইল = সেকেণ্ডে 110 ফুট।

[ঘণ্টায় 60 মাইল = সেকেণ্ডে 88 ফুট

" 15 " = 22 ফুট

ঘণ্টায় 75 মাইল = সেকেণ্ডে 110 ফুট]

(ii) 1 মিনিটে সরণ = 30 গজ

∴ 1 সেকেণ্ডে সরণ $= \frac{30}{60}$ গজ $= \frac{30 \times 3}{60} = \frac{3}{2}$ ফুট

∴ বেগ মিনিটে 30 গজ = সেকেণ্ডে $\frac{3}{2}$ ফুট।

উদা. 3. মাইল এবং ঘণ্টাকে দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক লইয়া নিম্নলিখিত বেগের মান নির্ণয় কর :— (i) সেকেণ্ডে 11 ফুট; (ii) মিনিটে 88 গজ।

(i) 1 সেকেণ্ডে সরণ = 11 ফুট;

1 ঘণ্টায় সরণ $= 11 \times 60 \times 60$ ফুট $= \dfrac{11 \times 60 \times 60}{1760 \times 3}$ মাইল $= 7\frac{1}{2}$ মাইল

∴ বেগ ঘণ্টায় $7\frac{1}{2}$ মাইল।

(ii) 1 মিনিটে সরণ = 88 গজ; 1 ঘণ্টায় সরণ $= 88 \times 60$ গজ

$= \dfrac{88 \times 60}{1760} = 3$ মাইল। ∴ বেগ ঘণ্টায় 3 মাইল।

উদা. 4. যদি একটি রেলগাড়ী সমবেগে ঘণ্টায় 30 মাইল যায়, তাহা হইলে 10 সেকেণ্ডে উহা কতদূর যাইবে?

বেগ ঘণ্টায় 30 মাইল = সেকেণ্ডে 44 ফুট [উদা. 1 দেখ]

∴ 10 সেকেণ্ডে সরণ $= 44 \times 10 = 440$ ফুট

গাড়ীটি 10 সেকেণ্ডে 440 ফুট যাইবে।

উদা. 5. যদি একটি কণা সমবেগে মিনিটে 45 গজ যায়, তাহা হইলে উহা 36 ফুট কত সময়ে যাইবে?

কণাটির সরণ 1 মিনিটে 45 গজ $= 45 \times 3$ ফুট

1 ফুট সরণ হয় $\dfrac{1}{45 \times 3}$ মিনিটে

∴ 36 ফুট সরণ হয় $\dfrac{36}{45 \times 3}$ মিনিটে $= \dfrac{36 \times 60}{45 \times 3} = 16$ সেকেণ্ডে সময়ে।

উদা. 6. একটি রেলগাড়ী সমবেগে 4 সেকেণ্ডে 88 ফুট যায়। ইহার বেগ ঘণ্টায় কত মাইল ?

4 সেকেণ্ডে সরণ $=88$ ফুট ; 1 সেকেণ্ডে সরণ $=\frac{88}{4}=22$ ফুট

1 ঘণ্টায় সরণ $=22\times60\times60$ ফুট $=\dfrac{22\times60\times60}{1760\times3}$ মাইল $=15$ মাইল

$\therefore$ বেগ ঘণ্টায় 15 মাইল।

উদা. 7. (*a*) কিলোমিটার এবং ঘণ্টাকে দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক লইয়া নিম্নলিখিত বেগের মান নির্ণয় কর :—

(i) সেকেণ্ডে 10 সেন্টিমিটার ; (ii) মিনিটে 100 মিটার।

(*b*) আমি ঘণ্টায় 6 কিলোমিটার হাঁটি ; এক সেকেণ্ডে কত মিটার যাই ?

(*a*) (i) বেগ সেকেণ্ডে 10 সে. মি.

অর্থাৎ সরণ 1 সেকেণ্ডে $=10$ সে. মি.

" 1 ঘণ্টায় $=10\times60\times60$ সে. মি.

$=\dfrac{10\times60\times60}{100\times1000}$ কি. মি. $=0\cdot36$ কি. মি.

$\therefore$ বেগ ঘণ্টায় 0·36 কিলোমিটার।

(ii) বেগ মিনিটে 100 মিটার, অর্থাৎ সরণ 1 মিনিটে $=100$ মিটার

" 1 ঘণ্টায় $=100\times60$ মিটার $=\dfrac{100\times60}{1000}$ কি.মি. $=6$ কি.মি.

$\therefore$ বেগ ঘণ্টায় 6 কিলোমিটার।

(*b*) 1 ঘণ্টায় অতিক্রম করা হয় 6 কি. মি. $=6\times1000$ মিটার

1 সেকেণ্ডে অতিক্রম করা হয় $=\dfrac{6\times1000}{60\times60}$ মিটার $=\frac{10}{6}$ মিটার $=1\cdot67$ মিটার।

উদা. 8. ফুট ও সেকেণ্ড দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক লইয়া ত্বরণের মান 32 হইলে

(i) গজ ও মিনিট একক লইয়া ইহার মান নির্ণয় কর।

(ii) মাইল ও ঘণ্টা একক লইয়া ইহার মান নির্ণয় কর।

(i) ত্বরণ $=32$ ফুট/সেকেণ্ড^2

অর্থাৎ 1 সেকেণ্ডে বেগের পরিবর্তন = সেকেণ্ডে 32 ফুট

1 মিনিটে " " = সেকেণ্ডে $32\times60=1920$ ফুট

= মিনিটে 1920×60 ফুট

= মিনিটে $\dfrac{1920\times60}{3}$ গজ $=39400$ গজ।

$\therefore$ ত্বরণ $=38400$ গজ/মিনিট^2।

(ii) ত্বরণ $=32$ ফুট/সেকেণ্ড^2

অর্থাৎ 1 সেকেণ্ডে বেগের পরিবর্তন = সেকেণ্ডে 32 ফুট

1 ঘণ্টায় বেগের পরিবর্তন = সেকেণ্ডে $32\times60\times60$ ফুট

$=$ ঘণ্টায় $32\times(60\times60)^2$ ফুট

$=$ ঘণ্টায় $\dfrac{32\times60\times60\times60\times60}{1760\times3}$ মাইল

$=$ ঘণ্টায় $\dfrac{864000}{11}=78545\frac{5}{11}$ মাইল।

$\therefore$ ত্বরণ ঘণ্টায় প্রতি ঘণ্টায় $78545\frac{5}{11}$ মাইল।

উদা. 9. ত্বরণের সেন্টিমিটার-সেকেণ্ড এককে (i) মিটার-মিনিট এককে পরিণত কর। (ii) কিলোমিটার-ঘণ্টা এককে পরিণত কর।

(i) 1 সেকেণ্ডে বেগের পরিবর্তন = সেকেণ্ডে 1 সেমি. = মিনিটে 60 সেমি.

1 মিনিটে বেগের পরিবর্তন = মিনিটে 60×60 সে.মি. = মিনিটে $\dfrac{60\times60}{100}$ মিটার

= মিনিটে 36 মিটার। $\therefore$ ত্বরণ = 36 মিটার/মিনিট^2

(ii) 1 সেকেণ্ডে বেগের পরিবর্তন = সেকেণ্ডে 1 সেমি. = ঘণ্টায় 3600 সে.মি.

1 ঘণ্টায় বেগের পরিবর্তন = ঘণ্টায় 3600×3600 সে.মি.

[1 ঘণ্টা $=60\times60=3600$ সেকেণ্ড]

$=$ ঘণ্টায় $\dfrac{3600\times3600}{100\times1000}$ কি.মি. = ঘণ্টায় 129·6 কি.মি.

$\therefore$ ত্বরণ = 129·6 কি.মি./ঘণ্টা^{2}।

উদা. 10. যদি $\frac{1}{10}$ সেকেণ্ড সময়ের একক এবং 1 গজ দৈর্ঘ্যের একক হয়, তখন একটি বস্তুর ত্বরণ 2. এই ত্বরণকে ফুট এবং সেকেণ্ড একক লইয়া ব্যক্ত কর।

[H. S. 1966]

ত্বরণ $=\dfrac{2 \text{ গজ}}{(\frac{1}{10}\text{ সে.})^2}=200$ গজ/সে.$^2=200\times3$ ফু./সে.$^2=600$ ফু./সে.^{2}।

উদা. 11. নিম্নের উদাহরণগুলিতে u এবং v উপাংশ বেগ, α ইহাদের অন্তর্ভূত কোণ এবং w ইহাদের লব্ধি।

(i) দেওয়া আছে $u=8$, $v=6$, $\alpha=90°$, w নির্ণয় কর।

(ii) দেওয়া আছে $u=24$, $w=25$ এবং $\alpha=90°$ হইলে v নির্ণয় কর।

(iii) দেওয়া আছে $u=5$, $v=3$ এবং $\alpha=60°$; w নির্ণয় কর।

(iv) দেওয়া আছে $u=7$, $v=8$, $w=13$; α নির্ণয় কর।

(v) দেওয়া আছে $v=3$, $w=3\sqrt{3}$ এবং $\alpha=60^\circ$; u নির্ণয় কর।

(vi) $u=63$, $w=65$ এবং $\alpha=90^\circ$ হইলে v নির্ণয় কর।

সমাধান : (i) $w^2=u^2+v^2=8^2+6^2=10^2 \quad \therefore \quad w=10$

(ii) $w^2=u^2+v^2 \qquad \therefore \quad 25^2=24^2+v^2$

বা, $v^2=25^2-24^2=(25+24)(25-24)=49$; $\therefore \quad v=7.$

(iii) $w^2=u^2+v^2+2uv\cos\alpha$

$=5^2+3^2+2\times5\times3\times\frac{1}{2}=25+9+15=49$; $\therefore \quad w=7.$

(iv) $w^2=u^2+v^2+2uv\cos\alpha$ সূত্র হইতে

$13^2=7^2+8^2+2\times7\times8\cos\alpha$

বা, $112\cos\alpha=169-49-64=56$

$\therefore \quad \cos\alpha=\frac{56}{112}=\frac{1}{2}$; $\therefore \quad \alpha=60^\circ$,

(v) $(3\sqrt{3})^2=u^2+3^2+2.u.3\cos 60^\circ$

বা, $27=u^2+9+3u \qquad [\because \cos 60^\circ=\frac{1}{2}]$

বা, $u^2+3u-18=0$; বা, $(u+6)(u-3)=0$,

$\therefore \quad u=3.$ (ঋণাত্মক মান পরিহার করিয়া)

(vi) $w^2=u^2+v^2$ সূত্র হইতে $65^2=63^2+v^2$

বা, $v^2=65^2-63^2=(65+63)(65-63)$

$=128\times2=256 \qquad \therefore \quad v=16.$

উদা. 12. সেকেণ্ডে 6 ফুট এবং সেকেণ্ডে 4 ফুট মানের দুইটি বেগের বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি নির্ণয় কর।

বৃহত্তম লব্ধি $=6+4=10$ ফুট/সেকেণ্ড

ক্ষুদ্রতম লব্ধি $=6-4=2$ ফু./সে.

উদা. 13. একটি সাঁতারু স্রোতের লম্বাভিমুখে মিনিটে 64 গজ বেগে সাঁতার কাটিতেছে ; স্রোতের বেগ মিনিটে 48 গজ হইলে সাঁতারুর প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর। নদীর প্রস্থ 200 গজ হইলে সাঁতারু অপর পারে কত গজ নীচে গিয়া পৌঁছিবে ?

এখানে সাঁতারুর যুগপৎ দুই বেগ (i) স্রোতের বেগ মিনিটে 48 গজ (u)

(ii) সাঁতার কাটার বেগ মিনিটে 64 গজ (v) ; $\alpha=90^\circ$

$\therefore \quad w^2=u^2+v^2=(48)^2+(64)^2$

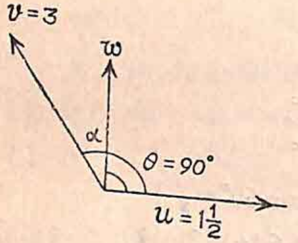
$w=80$ গজ/মিনিট.

w যদি v-এর সঙ্গে θ কোণ করে, $\tan\theta=\frac{u}{v}=\frac{48}{64}=\frac{3}{4}.$

সাঁতারু যদি বিপরীত বিন্দু হইতে x গজ নীচে গিয়া অপর পারে পৌঁছে, তাহা হইলে $\frac{x}{200}=\tan\theta=\frac{3}{4}$; $\therefore\ x=\frac{3}{4}\times 200=150$ গজ

অপর পারে পৌঁছিতে সময় লাগে $=\frac{200}{64}=3\frac{1}{8}$ মিনিট।

উদা. 14. একজন সাঁতারু ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে সাঁতার কাটিতে পারে। স্রোতের বেগ যদি ঘণ্টায় $1\frac{1}{2}$ মাইল হয়, তাহা হইলে স্রোতের দিকের সঙ্গে কত কোণ করিয়া সাঁতার কাটিলে সে অপর পারে যাত্রাস্থান হইতে সোজা বিপরীত স্থলে গিয়া পৌঁছিবে ?



মনে কর সাঁতারু স্রোতের দিকের সঙ্গে α কোণ করিয়া সাঁতার কাটে। এখানে লব্ধি বেগ স্রোতের সঙ্গে 90° কোণ করে।

$$\therefore\ \frac{\sin(\alpha-90^\circ)}{\sin 90^\circ}=\frac{1\frac{1}{2}}{3}$$

বা, $-\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

বা, $\cos\alpha=-\frac{1}{2}\ \therefore\ \alpha=120^\circ$.

[**বিকল্প পদ্ধতি :** $\tan\theta=\frac{v\sin\alpha}{u+v\cos\alpha}$ সূত্র হইতে,

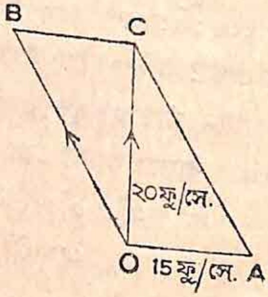
$$\tan 90^\circ=\frac{3\sin\alpha}{1\frac{1}{2}+3\cos\alpha}\ ;\quad \text{বা,}\quad \cot 90^\circ=\frac{1\frac{1}{2}+3\cos\alpha}{3\sin\alpha}$$

এখন $\cot 90^\circ=0,\ \therefore\ 1\frac{1}{2}+3\cos\alpha=0$

বা, $\cos\alpha=-\frac{1}{2}=\cos 120^\circ$; $\alpha=120^\circ$.]

উদা. 15. দুইটি বেগের লব্ধি প্রথম বেগের লম্বাভিমুখে সেকেণ্ডে 20 ফুট। প্রথম বেগ সেকেণ্ডে 15 ফুট হইলে দ্বিতীয় বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

OA প্রথম বেগ, OC লব্ধি, OC যুক্ত কর এবং OACB সামান্তরিক সম্পূর্ণ কর। তাহা হইলে OB অপর উপাংশ নির্দেশ করে।



$OB=AC$

এখন $AC^2=OA^2+OC^2$

$=15^2+20^2=25^2$

$\therefore\ AC=25$

$\therefore$ দ্বিতীয় বেগ সেকেণ্ডে 25 ফুট।

দ্বিতীয় বেগ লব্ধির সহিত θ কোণ করিলে, $\tan\theta=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.

উদা. 16. নিম্নলিখিত কোণ সমূহের বর্ণিত দিকে এবং তাহার লম্বাভিমুখী দিকে উপাংশ নির্ণয় কর।

(i) প্রথম দিকের সঙ্গে $0°$ কোণে 10 ফু./সে. বেগ।

(ii) প্রথম দিকের সঙ্গে $30°$ কোণে ঘণ্টায় 4 মাইল বেগ।

(iii) প্রথম দিকের সঙ্গে $45°$ কোণে সেকেণ্ডে 50 সেন্টিমিটার বেগ।

(iv) প্রথম দিকের সঙ্গে $60°$ কোণে মিনিটে 24 গজ বেগ।

(v) প্রথম দিকের সঙ্গে $90°$ কোণে ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার বেগ।

(vi) প্রথম দিকের সঙ্গে $120°$ কোণ করিয়া সেকেণ্ডে 44 ফুট বেগ।

(vii) প্রথম দিকের সঙ্গে $135°$ কোণে ঘণ্টায় $10\sqrt{2}$ মাইল বেগ।

(viii) প্রথম দিকের সঙ্গে $150°$ কোণে সেকেণ্ডে 22 ফুট বেগ।

(ix) প্রথম দিকের সঙ্গে $180°$ কোণে সেকেণ্ডে 64 সেন্টিমিটার বেগ।

সমাধান ঃ (i) $0°$ কোণে বিশ্লেষিতাংশ $=10 \cos 0° = 10$ ফু./সে.

প্রথমের লম্বাভিমুখে বিশ্লেষিতাংশ $=10 \sin 0° = 0$

(ii) $30°$ কোণে বিশ্লেষিতাংশ $=4 \cos 30° = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ মা./ঘ.

প্রথমের লম্বাভিমুখে বিশ্লেষিতাংশ $=4 \sin 30° = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ মা./ঘ.

(iii) প্রথম বিশ্লেষিতাংশ $=50 \cos 45° = 50 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 25\sqrt{2}$ সেমি./সে.

দ্বিতীয় বিশ্লেষিতাংশ $50 \sin 45° = 50 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 25\sqrt{2}$ সেমি./সে.

(iv) প্রথম বিশ্লেষিতাংশ $=24 \cos 60° = 24 \times \frac{1}{2} = 12$ গজ/মি.

দ্বিতীয় বিশ্লেষিতাংশ $=24 \sin 60° = 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ গজ/মি.

(v) প্রথম বিশ্লেষিতাংশ $=10 \cos 90° = 0$

দ্বিতীয় বিশ্লেষিতাংশ $=10 \sin 90° = 10$ কি.মি./ঘ.

(iv) প্রথম বিশ্লেষিতাংশ $=44 \cos 120° = 44(-\frac{1}{2}) = -22$ ফু./সে.

দ্বিতীয় বিশ্লেষিতাংশ $=44 \sin 120° = 44 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 22\sqrt{3}$ ফু./সে.

(vii) $10\sqrt{2} \cos 135° = -10$ মা./ঘ. $10\sqrt{2} \sin 135° = 10$ মা./ঘ.

(viii) প্রদত্ত বেগের সহিত $150°$ কোণে বিশ্লেষিতাংশ

$$=22 \cos 150° = 22\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -11\sqrt{3} \text{ ফুট/সেকেণ্ড}$$

প্রদত্ত দিকের লম্বাভিমুখে বিশ্লেষিতাংশ $=22 \sin 150° = 22 \times \frac{1}{2}$
$=11$ ফুট/সেকেণ্ড।

(ix) $64 \cos 180° = -64$ সেমি./সে. ; $64 \sin 180° = 0$.

উদা. 17. একটি নদী সেকেণ্ডে 2 ফুট বেগে প্রবাহিত হইতেছে। লম্বাভিমুখে নদীটি অতিক্রম করিবার জন্য সেকেণ্ডে 3 ফুট বেগে সাঁতার কাটিলে একজন সাঁতারু কোন্‌দিকে সাঁতার কাটিবে? যদি নদীটি 100 ফুট চওড়া হয়, কত সময় পরে সাঁতারু অপর পারে পৌঁছিবে?

মনে কর, স্রোতের সঙ্গে α কোণে সাঁতারুর সাঁতার কাটা দরকার। লব্ধি স্রোতের সঙ্গে 90° কোণ করে। $\frac{\sin(\alpha - 90°)}{\sin 90°} = \frac{2}{3}$; বা, $-\cos \alpha = \frac{2}{3}$

বা, $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, $\alpha = \cos^{-1}(-\frac{2}{3})$,

লব্ধি বেগ $= \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ ফু./সে.

অপরতীরে উত্তীর্ণ হইতে প্রয়োজনীয় সময় $= \frac{100}{\sqrt{5}} = 20\sqrt{5}$ সেকেণ্ড।

উদা. 18. স্রোত না থাকিলে একজন লোক 200 মিটার চওড়া একটি নদী সোজা গিয়া 4 মিনিটে উত্তীর্ণ হইতে পারে; স্রোত থাকিলে তাহার 5 মিনিট সময় লাগে। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

যেহেতু স্রোতাহীন অবস্থায় নদী উত্তীর্ণ হইতে সময় 4 মিনিট

$\therefore$ সাঁতার কাটার বেগ $= \frac{200}{4} = 50$ মিটার/মিনিট

যখন স্রোত থাকে তখন সময় 5 মিনিট

$\therefore$ লব্ধি বেগ $= \frac{200}{5} = 40$ মিটার/মিনিট

ধর, স্রোতের বেগ u, তাহা হইলে $u^2 = 50^2 - 40^2 = 30^2$.

$\therefore$ $u = 30$ মিটার/মিনিট;

উদা. 19. একটি যুদ্ধ জাহাজ ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে যাইবার কালে 4 মাইল দূরে অবস্থিত একটি দুর্গের প্রতি নদীর চওড়া দিক বরাবর একটি গোলা ছুঁড়ে। যদি গোলার অনুভূমিক বেগ সেকেণ্ডে 1200 ফুট হয়, তাহা হইলে দুর্গ হইতে গোলার কি পরিমাণ বিচ্যুতি হইবে?

15 মাইল/ঘণ্টা $= 22$ ফু./সে.

ধর, যেদিকে যুদ্ধ জাহাজ চলিতেছে সেদিকে দুর্গ হইতে x ফুট দূরে গিয়া কামানের গোলা পড়িবে।

$$\frac{x}{4 \times 1760 \times 3} = \frac{22}{1200} \quad \therefore \; x = \frac{22 \times 176}{10} = \frac{1936}{5} = 387\tfrac{1}{5} \text{ ফুট।}$$

উদা. 20. একটি কণার যুগপৎ উত্তর, দক্ষিণ, পূর্ব এবং পশ্চিম দিকে 8, 5, 10 এবং 6 ফু./সে. বেগ আছে ; লব্ধিবেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

উত্তরদিকে 8 ফু./সে. এবং দক্ষিণদিকে 5 ফু./সে. এই দুই বেগের লব্ধি উত্তর দিকে (8−5) বা 3 ফু./সে. বেগ।

পূর্বদিকে 10 ফু./সে. এবং পশ্চিমদিকে 6 ফু./সে. এই দুইবেগের লব্ধি পূর্ব দিকে (10−6) বা 4 ফু./সে. বেগ

এখন নির্ণেয় লব্ধি উত্তরদিকে 3 ফু./সে. এবং পূর্বদিকে 4 ফু./সে. এর লব্ধি

∴ নির্ণেয় লব্ধি $=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ফু./সে.

লব্ধি পূর্বদিকের সঙ্গে θ কোণ করিলে, $\tan\theta=\frac{4}{3}$

উদা. 21. একটি কণার যুগপৎ দুইটি বেগ আছে ; একটি বেগ পূর্বাভিমুখে সেকেণ্ডে 10 ফুট, অপরটি উত্তর-পশ্চিমাভিমুখে সেকেণ্ডে $10\sqrt{2}$ ফুট। লব্ধিবেগ নির্ণয় কর।

উত্তর-পশ্চিমদিকে $10\sqrt{2}$ ফু./সে. বেগ = উত্তরদিকে 10 ফু./সে. এবং পশ্চিমদিকে 10 ফু./সে.

∴ 10 ফু./সে. পূর্বদিকে এবং $10\sqrt{2}$ ফু./সে. উত্তর-পশ্চিমদিকে বেগ দুইটির লব্ধি = উত্তর দিকে 10 ফু./সে.

[**বিকল্প পদ্ধতি :** $w^2=u^2+v^2+2uv\cos\alpha$ সূত্র ব্যবহার করিয়া

$$w^2=10^2+(10\sqrt{2})^2+2.10.10\sqrt{2}\cos 135^\circ$$
$$=10^2+(10\sqrt{2})^2+2.10.10\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=100+200-200=10^2 \quad \therefore\ w=10 \text{ ফু./সে.}$$

লব্ধি প্রথম বেগের সঙ্গে অর্থাৎ পূর্বদিকের সঙ্গে θ কোণ করিলে,

$$\tan\theta=\frac{10\sqrt{2}\sin 135^\circ}{10+10\sqrt{2}\cos 135^\circ}=\frac{10}{10-10}=\frac{10}{0}$$

বা, $\cot\theta=\frac{0}{10}=0, \quad \therefore\ \theta=90^\circ$. অর্থাৎ লব্ধিবেগ উত্তরাভিমুখে।]

উদা. 22. একটি বস্তুর যুগপৎ 20, 10 এবং 8 একক বিশিষ্ট তিনটি বেগ থাকিলে ইহা স্থিরাবস্থায় থাকা সম্ভব কিনা ?

স্থিরাবস্থায় থাকিতে হইলে যে কোন দুই বেগের লব্ধি তৃতীয় বেগের সমান ও বিপরীতমুখী হইতে হইবে।

10 এবং 8 একক বেগদ্বয়ের বৃহত্তম লব্ধি 18 একক। কিন্তু 20 একক বেগ 18 একক বেগ অপেক্ষা বৃহত্তর। আবার, 20 এবং 8 এককের ক্ষুদ্রতম লব্ধি 12 একক

কিন্তু 10 একক বেগ 12 একক বেগ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। অতএব এই তিনটি বেগ হেতু বস্তু স্থিরাবস্থায় থাকিতে পারে না।

উদা. 23. একটি কণা সেকেণ্ডে 3, 7 এবং 8 ফুট বেগের জন্য স্থিরাবস্থায় আছে। বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম বেগের অন্তর্বর্তী কোণ নির্ণয় কর।

8 ফু./সে. (বৃহত্তম) এবং 3 ফু./সে (ক্ষুদ্রতম) এই দুই বেগের লব্ধি তৃতীয় বেগ 7 ফুট./সে-এর সমান ও বিপরীতমুখী হইতে হইবে। ধর, নির্ণেয় কোণ α, তাহা হইলে,

$\therefore\ 7^2=8^2+3^2+2\times8\times3\cos\alpha$; বা, $48\cos\alpha=49-64-9$

বা, $48\cos\alpha=-24$; $\therefore\ \cos\alpha=-\frac{1}{2}$, $\therefore\ \alpha=120^\circ$.

উদা. 24. একটি স্টীমার কোনও নদীর স্রোতের প্রতিকূলে s পরিমাণ পথ অতিক্রম করিতে t_1 সময় লাগে এবং স্রোতের অনুকূলে ঐ পথ ফিরিতে t_2 সময় লাগে। প্রমাণ কর যে স্রোতহীন নদীতে স্টীমারের বেগ $\frac{s}{2}\left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_1}\right)$ এবং স্রোতের বেগ $\frac{s}{2}\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)$।

মনে কর, স্রোতের বেগ v এবং স্টীমারের বেগ u. যাইবার সময় লব্ধিবেগ $u-v$ এবং ফিরিবার সময় লব্ধিবেগ $u+v$.

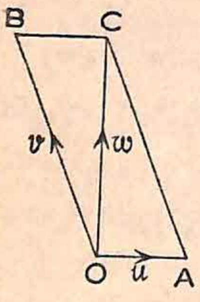
এখন $\frac{s}{u-v}=t_1$; বা, $u-v=\frac{s}{t_1}$ ... (i)

এবং $\frac{s}{u+v}=t_2$; বা, $u+v=\frac{s}{t_2}$ ... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করিয়া, $2u=\frac{s}{t_2}+\frac{s}{t_1}$ $\therefore\ u=\frac{s}{2}\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)$

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া, $2v=\frac{s}{t_2}-\frac{s}{t_1}$ $\therefore\ v=\frac{s}{2}\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)$

উদা. 25. u এবং v দুইটি বেগের ($u<v$) লব্ধি u বেগের লম্বাভিমুখে ; লব্ধি বেগের মান নির্ণয় কর।



মনে কর, OA এবং OB, u এবং v বেগদ্বয়কে প্রদর্শন করে।

OACB সামান্তরিকে OC কর্ণ লব্ধি-বেগ wকে প্রদর্শন করে এবং ইহা u-এর লম্বাভিমুখে। OAC ত্রিভুজ সমকোণী।

$\therefore\ OC^2=AC^2-OA^2=OB^2-OA^2=v^2-u^2$.

$\therefore$ লব্ধি $w=\sqrt{v^2-u^2}$.

উদা. 26. একজন সাঁতারু t_1 সময়ে একটি নদী সোজা উত্তীর্ণ হয় এবং t_2 সময়ে

সমপরিমাণ দূরত্ব স্রোতাভিমুখে যায়। যদি স্রোতহীন জলে লোকটির বেগ u হয় এবং v স্রোতের বেগ হয়, দেখাও যে $t_1 : t_2 = \sqrt{u+v} : \sqrt{u-v}$.

মনে কর, নদীর প্রস্থ d,

প্রথম ক্ষেত্রে, লব্ধিবেগ $= \sqrt{u^2-v^2}$ $\quad \therefore \quad t_1 = \dfrac{d}{\sqrt{u^2-v^2}}$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে লব্ধিবেগ $= u+v$, $\quad \therefore \quad t_2 = \dfrac{d}{u+v}$.

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{d}{\sqrt{u^2-v^2}} \times \frac{u+v}{d} = \frac{\sqrt{u+v}}{\sqrt{u-v}}$$

উদা. 27. একজন লোক t_1 সময়ে একটি নদী সোজা পার হইয়া পুনরায় ফিরিয়া আসে। নদীর প্রস্থের সমান দূরত্ব স্রোতাভিমুখে গিয়া আবার ফিরিয়া আসিতে t_2 সময় লাগে। যদি স্রোতহীন নদীতে লোকটির বেগ u হয় এবং স্রোতের বেগ v হয়, দেখাও যে $t_1 : t_2 = \sqrt{u^2-v^2} : u$.

প্রথম ক্ষেত্রে, যাইতে এবং আসিতে লব্ধিবেগ $\sqrt{u^2-v^2}$.

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, যাইবার সময় লব্ধিবেগ $u+v$.

ফিরিবার সময় লব্ধিবেগ $u-v$.

প্রথম ক্ষেত্রে, সময় $t_1 = \dfrac{2d}{\sqrt{u^2-v^2}}$ $\qquad$ [$d=$নদীর প্রস্থ]

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, সময় $t_2 = \dfrac{d}{u+v} + \dfrac{d}{u-v} = \dfrac{2u}{u^2-v^2}d$.

$$\therefore \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{2d}{\sqrt{u^2-v^2}} \times \frac{u^2-v^2}{2ud} = \frac{\sqrt{u^2-v^2}}{u}.$$

$$\therefore \quad t_1 : t_2 = \sqrt{u^2-v^2} : u$$

উদা. 28. একজন লোক s গজ প্রশস্ত নদী স্রোত না থাকিলে সোজা গিয়া t সেকেণ্ডে উত্তীর্ণ হইতে পারে এবং স্রোত থাকিলে t' সেকেণ্ডে উত্তীর্ণ হয়। দেখাও যে স্রোতের বেগ প্রতি মিনিটে $s\sqrt{\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{t'^2}}$ গজ।

মনে কর, u স্রোতের বেগ এবং v সাঁতার কাটার বেগ, w লব্ধিবেগ (25 উদাহরণের চিত্র দ্রষ্টব্য।)

$$\text{এখানে } v = \frac{s}{t} \text{ এবং } w = \frac{s}{t'}$$

$$\text{এখন } u = \sqrt{v^2-w^2} = s\sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t'^2}}.$$

উদা. 29. একটি নদীতে স্রোতের বেগ u এবং একজন লোক তাহার নৌকা v বেগে বাহিতে পারে ($v>u$)। যদি (i) যাত্রাস্থলের ঠিক বিপরীত বিন্দুতে সে পৌঁছিতে এবং (ii) ন্যূনতম সময়ে নদী উত্তীর্ণ হইতে চায়, তাহা হইলে কোন্ দিকে তাহাকে নৌকা বাহিতে হইবে? যদি নদী বিস্তার b হয়, তাহা হইলে এই দুই ক্ষেত্রে নদী উত্তরণের সময়ের পার্থক্য নির্ণয় কর। [H. S. 1963]

মনে কর, লোকটি স্রোতের দিকের সঙ্গে α কোণ করিয়া নৌকা বাহিলে যাত্রাস্থলের বিপরীত বিন্দুতে গিয়া পৌঁছে, তাহা হইলে

$$\frac{\sin(\alpha-90^\circ)}{u}=\frac{\sin 90^\circ}{v}; \text{ বা, } -\cos\alpha=\frac{u}{v},\ \cos\alpha=-\frac{u}{v}.$$

$$\text{অর্থাৎ } \alpha=\cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right).$$

$$\text{লব্ধিবেগ}=\sqrt{u^2+v^2+2uv\cos\alpha}=\sqrt{u^2+v^2+2uv\left(-\frac{u}{v}\right)}$$
$$=\sqrt{v^2-u^2}.$$

[**বিকল্প পদ্ধতি** :—লব্ধিবেগ w স্রোতের লম্বাভিমুখে হইলে, স্রোতের দিকে এবং স্রোতের লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া

$$u+v\cos\alpha=0\cdots\text{(i)} \quad \therefore \cos\alpha=-\frac{u}{v}.$$

$$w=v\sin\alpha \quad \cdots\text{(ii)} \quad \therefore \quad w=v\sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}}=\sqrt{v^2-u^2}\ ]$$

যেহেতু সময় $=\dfrac{b}{v\sin\alpha}$, ইহা ন্যূনতম হইলে $\sin\alpha$ বৃহত্তম অর্থাৎ 1 এবং $\alpha=90^\circ$.

$$\text{সময়ের পার্থক্য}=\frac{b}{v\sin\alpha}-\frac{b}{v}=\frac{b}{v}\left(\frac{v}{\sqrt{v^2-u^2}}-1\right). \quad \because \sin\alpha=\sqrt{1-\frac{u^2}{v^2}}.$$

উদা. 30. দুইজন সাঁতারু v_1 এবং v_2 বেগে সাঁতার কাটিয়া u বেগে প্রবহমান একটি নদী উত্তীর্ণ হয়। যে দিকে গেলে ন্যূনতম দূরত্ব অতিক্রম করিতে হয় প্রথম ব্যক্তি সেইদিকে সাঁতার কাটে, যেদিকে ন্যূনতম সময়ে অতিক্রম করা যায় দ্বিতীয় ব্যক্তি সেদিকে সাঁতার কাটে। যদি উভয়ে একই সময়ে অপর পারে গিয়া পৌঁছে, দেখাও যে $v_1{}^2-v_2{}^2=u^2$.

মনে কর, প্রথম সাঁতারু স্রোতের দিকের সঙ্গে α কোণে সাঁতার কাটে। তাহার লব্ধিবেগ w স্রোতের লম্বাভিমুখে। নদীর প্রস্থ b.

$\therefore$ স্রোতের দিকে এবং স্রোতের লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া

$$u+v_1\cos\alpha=0 \quad \cdots \quad \text{(i)} \quad w=v_1\sin\alpha \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i) হইতে $\cos \alpha = -\frac{u}{v_1}$.

(ii) হইতে $\quad w = v_1\sqrt{1-\frac{u^2}{v_1^2}} = \sqrt{v_1^2-u^2}$.

$$\therefore \text{ সময়} = \frac{b}{\sqrt{v_1^2-u^2}}$$

দ্বিতীয় সাঁতারু β কোণে সাঁতার কাটিলে,

সময় $= \frac{b}{v_2 \sin\beta}$, সময় ন্যূনতম হইলে $\sin\beta$ বৃহত্তম অর্থাৎ 1

এবং $\beta = 90°$. $\therefore$ এই সময় $= \frac{b}{v_2}$.

উভয়ে একই সময়ে নদী অতিক্রম করিলে,

$$\frac{b}{v_2} = \frac{b}{\sqrt{v_1^2-u^2}} \quad \therefore \quad v_2 = \sqrt{v_1^2-u^2}$$

$$v_2^2 = v_1^2 - u^2 \quad \therefore \quad v_1^2 - v_2^2 = u^2.$$

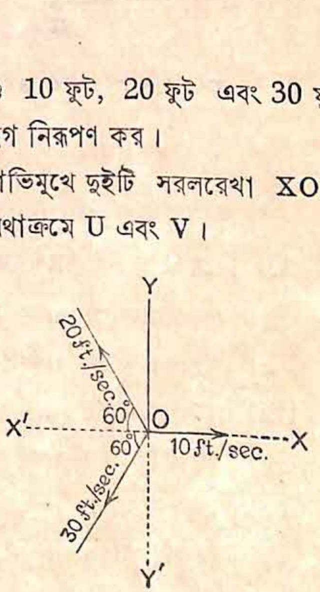
তিন বা ততোধিক বেগের লব্ধি নির্ণয় (গাণিতিক পদ্ধতি)

প্রত্যেক বেগকে দুই লম্বাভিমুখী OX এবং OY দিকে বিশ্লেষণ কর। এই দুই দিকে বিশ্লেষিতাংশসমূহের সমষ্টি U এবং V হইলে,

$$W^2 = U^2 + V^2 \quad \text{এবং} \quad \tan\theta = \frac{V}{U}.$$

উদা. 31. একটি কণার তিনটি বেগ সেকেণ্ডে 10 ফুট, 20 ফুট এবং 30 ফুট পরস্পরের সহিত 120° কোণ করিয়া আছে ; লব্ধিবেগ নিরূপণ কর।

আমরা 10 ফু./সে. বেগের দিকে এবং ইহার লম্বাভিমুখে দুইটি সরলরেখা XOX' এবং YOY' লইলাম। বিশ্লেষিতাংশসমূহের সমষ্টি যথাক্রমে U এবং V।



$$U = 10 - 20\cos 60° - 30\cos 60°$$
$$= 10 - 50\cos 60°$$
$$= 10 - 25 = -15 \text{ ফু./সে.}$$
$$V = 0 + 20\sin 60° - 30\sin 60°$$
$$= -10\sin 60°$$
$$= -10.\frac{\sqrt{3}}{2} = -5\sqrt{3} \text{ ফু./সে.}$$

এখন, $W^2 = 15^2 + (5\sqrt{3})^2$

$= 5^2(3^2+3) = 5^2 \times 12 \quad \therefore \quad W = 10\sqrt{3}$ ফু./সে.

U বেগ OX′-এর দিকে এবং V বেগ OY′-এর দিকে। W যদি OX′-এর সঙ্গে θ কোণ করে, তাহা হইলে, $\tan\theta=\frac{5\sqrt{3}}{15}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30°$.

অতএব লব্ধিবেগ $10\sqrt{3}$ ফু./সে. দ্বিতীয় বেগের লম্বাভিমুখে।

উদা. 32. একটি কণার যুগপৎ তিনটি বেগ u, v, w পরস্পরে সহিত α, β এবং γ কোণ করিয়া আছে। দেখাও যে ইহাদের লব্ধি

$$\{u^2+v^2+w^2+2uv\cos\alpha+2vw\cos\beta+2wu\cos\gamma\}^{\frac{1}{2}}$$

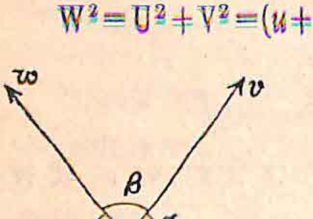
u বেগের দিকে এবং তাহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া,

$$U=u+v\cos\alpha+w\cos(\alpha+\beta)=u+v\cos\alpha+w\cos\gamma$$

$$[\because\ \alpha+\beta=360°-\gamma.]$$

$$V=0+v\sin\alpha+w\sin(\alpha+\beta)=v\sin\alpha-w\sin\gamma$$

$$W^2=U^2+V^2=(u+v\cos\alpha+w\cos\gamma)^2+(v\sin\alpha-w\sin\gamma)^2$$



$$=u^2+v^2+w^2+2uv\cos\alpha+2uw\cos\gamma+2vw(\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma)$$

$$=u^2+v^2+w^2+2uv\cos\alpha+2uw\cos\gamma+2vw\cos(\alpha+\gamma)$$

$$=u^2+v^2+w^2+2uv\cos\alpha+2vw\cos\beta+2wu\cos\gamma$$

$[\because\ \cos(\alpha+\gamma)=\cos(360°-\beta)=\cos\beta.]$

প্রশ্নমালা I

1. নিম্নে u ও v উপাংশ বেগ, α ইহাদের অন্তর্ভূত কোণ এবং w ইহাদের লব্ধি।

(i) দেওয়া আছে $u=8$, $v=6$, $\alpha=90°$, w নির্ণয় কর।

(ii) দেওয়া আছে $u=24$, $w=25$, $\alpha=90°$, v নির্ণয় কর।

(iii) দেওয়া আছে $u=5$, $v=3$, $\alpha=60°$, w নির্ণয় কর।

(iv) দেওয়া আছে $u=7$, $v=8$, $w=13$, α নির্ণয় কর।

(v) দেওয়া আছে $v=3$, $w=3\sqrt{3}$, $\alpha=60°$, u নির্ণয় কর।

(vi) দেওয়া আছে $u=63$, $w=65$, $\alpha=90°$, v নির্ণয় কর।

2. একটি বস্তুর উপর 20, 10 এবং 8 এককের তিনটি বল ক্রিয়া করিলে, বস্তুটি কি স্থিরাবস্থা প্রাপ্ত হইবে?

3. ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে চলন্ত একটি রেলগাড়ীর কামরার জানালা হইতে রেল লাইনের লম্বাভিমুখী অনুভূমিকভাবে একটি পাথর খণ্ডকে 66 ফুট/সেকেণ্ড বেগে ছুড়িলে, উহা রেললাইন হইতে 90 ফুট দূরে অবস্থিত একটি গাছকে আঘাত করিল। যখন পাথর খণ্ডটি ছোঁড়া হইয়াছিল, তখন ঐ গাছটি জানালা হইতে কত দূরে ছিল। [C. U. 1955]

4. স্রোতের লম্বাভিমুখে স্রোতের দ্বিগুণ বেগে সাঁতার কাটিলে একজন সাঁতারু 300 গজ চওড়া নদী অতিক্রম করিতে কতদূর নীচে গিয়া অপর পারে পৌঁছিবে ?

5. মিনিটে 48 গজ বেগে প্রবহমান নদীতে একজন সাঁতারু স্রোতের লম্বাভিমুখে মিনিটে 64 গজ বেগে সাঁতার কাটে, সাঁতারুর লব্ধিবেগ কত ? যদি নদীটি 200 গজ চওড়া হয়, তাহা হইলে বিপরীত বিন্দু হইতে কত নীচে গিয়া সে অপর পারে পৌঁছিবে ? অপর পারে পৌঁছিতে তাহার কত সময় লাগিবে ?

6. একটি চোর কোন চলন্ত ট্রেন হইতে 5 ফুট/সে. বেগ লইয়া লম্বাভিমুখী লাফ দেয়। যদি ট্রেনটির বেগ 30 মাইল/ঘণ্টা হয়, তবে চোরটি কোন দিকে পতিত হইবে ?

7. 440 ফুট চওড়া একটি নদীর স্রোতের গতি ঘণ্টায় 3 মাইল ; একটি লোক ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে দাঁড় টানিতে পারে। সোজা অপরতীরে পৌঁছিতে হইলে তাহাকে কোনদিকে দাঁড় টানিতে হইবে এবং কত সময়ে সে অপর তীরে পৌঁছিবে ? [H.S. 1960]

8. একটি বিন্দুর দুইটি বেগ u_1 এবং u_2 পরস্পরের সহিত এমন কোণ করিয়া আছে যে তাহার লব্ধি বেগ u_1 ; দেখাও যে যদি u_1কে দ্বিগুণ করা হয়, তাহা হইলে নূতন লব্ধি বেগ u_2-র সহিত সমকোণে থাকিবে। [H. S. 1961]

9. B ফুট উচ্চতা বিশিষ্ট কোন লোক A ফুট উচ্চতা বিশিষ্ট কোন লাইটপোষ্ট হইতে কোন সরলরেখায় u ফুট/সেকেণ্ড বেগে চলিলে প্রমাণ কর তাহার ছায়ার প্রান্তবিন্দুর বেগ $\frac{A}{A-B}.u$ ফুট/সে. হইবে।

10. যদি 3 ফুট/সে. ও 5 ফুট/সে. বেগের লব্ধি বেগ 7 ফুট/সে. হয়, তাহা হইলে বেগ দুইটির মধ্যের কোণ নির্ণয় কর। [C. U. 1921]

11. দুইটি সমান বেগের লব্ধি বেগ উহাদের একটির মানের সমান হইলে, উহাদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

12. এক ব্যক্তি 100 গজ চওড়া একটি নদী স্রোত না থাকিলে 4 মিনিটে এবং স্রোত থাকিলে 5 মিনিটে সাঁতার কাটিয়া অপরতীরে সোজা পৌঁছিতে পারে। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর। [C. U. 1913 ; H. S. 1964]

13. কোন ব্যক্তি নৌকায় স্রোতের প্রতিকূলে তীরের সহিত 30° কোণ করিয়া 100 গজ প্রশস্ত কোন নদীর বিপরীত তীরে যাইবে। যদি স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 3 মাইল এবং নৌকার বেগ সেকেণ্ডে 6 ফুট হয়, তবে তাহার কত সময় লাগিবে? যদি স্রোতের অনুকূলে নৌকাটি যায় তবে কতদূরে বিপরীত তীরে পৌঁছাইবে?

14. পূর্বদিকে 20 সে.মি./সে. বেগের সহিত কি বেগ যুক্ত করিলে উহাদের লব্ধি 15 সে.মি./সে. উত্তরাভিমুখী হইবে?

15. এক সাঁতারু এক মাইল প্রশস্ত ও ঘণ্টায় 2 মাইল স্রোতবেগ যুক্ত নদী 4 মাইল/ঘণ্টা বেগে সোজা সাঁতরাইয়া পার হইবে ঠিক করিল। কিন্তু দিক ভুল করিয়া নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে $\frac{1}{2}$ মাইল দূরে গিয়া পৌঁছাইল। পূর্বের দিকের সহিত তাহার কতটা চ্যুতি হইয়াছিল?

16. একটি বিন্দুর যুগপৎ u মানের পাঁচটি বেগ আছে। প্রত্যেক বেগ পরবর্তী বেগের সহিত 30° কোণে আছে। প্রথম ও শেষ বেগের অন্তর্বর্তী কোণ 120° হইলে লব্ধিবেগ নির্ণয় কর। [H. S. 1965]

17. কোন সাঁতারু স্রোতের অনুকূলে ও প্রতিকূলে এক মাইল যাইতে সময় নেয় যথাক্রমে a ঘণ্টা এবং b ঘণ্টা। দেখাও যে সাঁতারুর বেগ$=\dfrac{a+b}{2ab}$ মাইল/ঘণ্টা এবং স্রোতের বেগ$=\dfrac{b+a}{2ab}$ মাইল/ঘণ্টা।

18. একটি বস্তু কণার দুইটি নির্দিষ্ট দিকে সমপরিমাণ বেগ আছে। যদি এই বেগ দুইটির মধ্যে একটির পরিমাণ অর্ধেক হয়, তাহা হইলে অপর বেগের সহিত লব্ধি বেগ পূর্বে যে কোণ করে তাহাও অর্ধেক হয়। বস্তুকণার বেগ দুইটির অন্তর্ভূত কোণ নির্ণয় কর।

19. একটি বিমান স্থির বাতাসে 125 মাইল/ঘণ্টা বেগে P বিন্দু হইতে উত্তরাভিমুখে 300 মাইল দূরে Q বিন্দুতে পৌঁছাইবে। বাতাসের বেগ ছিল পশ্চিমদিক হইতে 35 মাইল/ঘণ্টা। অর্ধেক পথ অতিক্রম করার পর বাতাসের বেগ বৃদ্ধি পাইয়া 75 মাইল/ঘণ্টা হইল। দিক ঠিক করিয়া PQ অভিমুখে যাইতে বিমানটির মোট কত সময় লাগিবে?

20. একটি কণার পাঁচটি যুগপৎ বেগ সেকেণ্ডে 10, 20, 30, 40 এবং 50 ফুট থাকিলে 5 সেকেণ্ড পরে তাহার অবস্থান নির্ণয় কর। প্রথম তিনটি বেগ যথাক্রমে পূর্ব, উত্তর-পূর্ব এবং দক্ষিণের দক্ষিণ-পশ্চিম; চতুর্থ টি উত্তরদিকের পশ্চিমে 15° এবং পঞ্চম বেগটি দক্ষিণের-পূর্বদিকে 30° কোণে নত।

আপেক্ষিক বেগ

(Relative Velocity)

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

(i) (A-র সাপেক্ষে) B-র আপেক্ষিক বেগ

= B-র নিজ বেগ এবং A-র বেগের সমান কিন্তু বিপরীতমুখী, বেগদ্বয়ের লব্ধি।

(ii) B-র প্রকৃত বেগ = A-র সাপেক্ষে B-র বেগ এবং A-র বেগের লব্ধি।

(iii) যদি A ও B-র বেগ যথাক্রমে u এবং v, এবং উহারা α-কোণে নত হয়; তবে A-র সাপেক্ষে B-র আপেক্ষিক বেগ w হইলে, $w=\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\alpha}$.

এবং যদি আপেক্ষিক বেগ w-এর দিক u-দিকের সহিত নতি θ হয়;

তবে, $\tan\theta=\dfrac{v\sin\alpha}{v\cos\alpha-u}$.

উদাহরণমালা-II

উদা. 1. একটি রেল গাড়ীর বেগ ঘণ্টায় 30 মাইল, অপর একটি গাড়ীর বেগ সেকেণ্ডে 60 ফুট

(i) উভয় গাড়ী একই দিকে চলিলে আপেক্ষিক বেগ কত?

(ii) বিপরীত দিকে চলিলে আপেক্ষিক বেগ কত?

ঘণ্টায় 30 মাইল বেগ = সেকেণ্ডে 44 ফুট বেগ।

(i) দ্বিতীয় গাড়ীর আপেক্ষিক বেগ $=60-44=16$ ফু./সে.

(ii) আপেক্ষিক বেগ $=60+44=104$ ফু./সে.

উদা. 2. 200 গজ এবং 240 গজ দীর্ঘ দুইখানা রেলগাড়ী সমান্তরাল পথে চলিতেছে। প্রথম গাড়ির বেগ ঘণ্টায় 45 মাইল এবং দ্বিতীয় গাড়ির বেগ ঘণ্টায় 30 মাইল।

(i) একই দিকে চলিলে একে অপরকে কত সময়ে অতিক্রম করিবে? (ii) বিপরীত দিকে চলিলেই বা একে অপরকে অতিক্রম করিতে কত সময় লাগিবে?

এক গাড়ী অপর গাড়ীকে অতিক্রম করিতে আপেক্ষিক বেগে $200+240=440$ গজ পথ যাইতে হইবে।

(i) প্রথম ক্ষেত্রে, আপেক্ষিক বেগ $45-30=15$ মা./ঘ. $=22$ ফু./সে.

$\therefore$ সময় $=\dfrac{440\times3}{22}=60$ সেকেণ্ড বা 1 মিনিট।

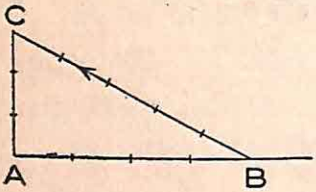
(ii) দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, আপেক্ষিক বেগ $=45+30=75$ মা./ঘ. $=110$ ফু./সে.

$$\therefore \quad \text{সময়}=\frac{440\times 3}{110}=12 \text{ সেকেণ্ড।}$$

উদা. 3. দুইজন লোক একই সময়ে একই স্থান হইতে হাঁটিতে আরম্ভ করে। একজন পূর্বদিকে ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে এবং অপর জন উত্তরদিকে ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে যায়। দ্বিতীয় ব্যক্তির আপেক্ষিক বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর। 3 মিনিট পরে একজন অপর জন হইতে কত দূরে থাকিবে?

মনে কর, তাহারা A হইতে যাত্রা করে। তাহা হইলে 1 ঘণ্টা পরে প্রথম ব্যক্তি 4 মাইল পূর্বদিকে B-তে এবং দ্বিতীয় ব্যক্তি 3 মাইল উত্তর দিকে C-তে উপস্থিত হইবে।

1 ঘণ্টা পরে দ্বিতীয় ব্যক্তির সাপেক্ষে প্রথম ব্যক্তির সরণ BC



$\therefore$ BC আপেক্ষিক বেগ নির্দেশ করে।

এখন $BC^2=AB^2+AC^2=4^2+3^2=5^2$

$\therefore \quad BC=5.$

$\tan ABC=\frac{AC}{BC}=\frac{3}{4}.$

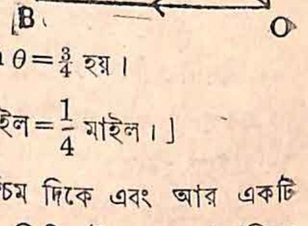
$\therefore$ প্রথম ব্যক্তির সাপেক্ষে দ্বিতীয় ব্যক্তির আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায় 5 মাইল এবং উহা BC-র দিকে; 3 মিনিট পরে দূরত্ব $=\frac{5\times 1760\times 3}{60}=440$ গজ।

[**বিকল্প পদ্ধতি ঃ** মনে কর, OA দ্বিতীয় ব্যক্তির বেগ নির্দেশ করে এবং OB প্রথম ব্যক্তির বেগের সমান বিপরীতমুখী বেগ OABC সামান্তরিক সম্পূর্ণ করে। এখন OC কর্ণ আপেক্ষিক বেগ নির্দেশ করে।

$OC^2=OA^2+OB^2=3^2+4^2=5^2, \quad OC=5$

আপেক্ষিক বেগ উত্তরদিকের সঙ্গে θ কোণ করিলে

$$\tan\theta=\frac{4}{3}$$



$\therefore$ আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায় 5 মাইল এবং ইহা উত্তরের সঙ্গে পশ্চিমে এমন কোণ করে যেন $\tan\theta=\frac{3}{4}$ হয়।

একের সাপেক্ষে অপরের 3 মিনিটে সরণ $=\frac{5\times 3}{60}$ মাইল $=\frac{1}{4}$ মাইল।]

উদা. 4. একটি স্টীমার ঘণ্টায় 12 মাইল বেগে পশ্চিম দিকে এবং আর একটি স্টীমার ঘণ্টায় 16 মাইল বেগে উত্তর দিকে যাইতেছে। দ্বিতীয় স্টীমারের আপেক্ষিক বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

দ্বিতীয় স্টীমারের আপেক্ষিক বেগ=তাহার নিজের বেগ 16 মাইল ঘণ্টা এবং প্রথম স্টীমারের বিপরীত ও সমান বেগের লব্ধি অর্থাৎ উত্তর দিকে ঘণ্টায় 16 মাইল বেগ এবং পূর্বদিকে ঘণ্টায় 12 মাইল বেগের লব্ধি= $\sqrt{16^2+12^2}$=ঘণ্টায় 20 মাইল বেগ।

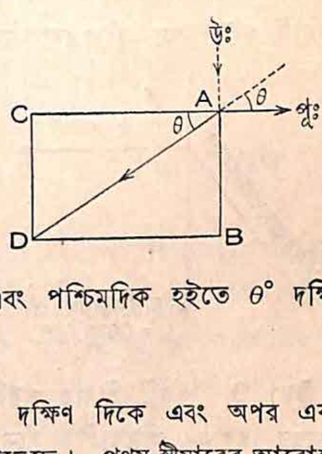
আপেক্ষিক বেগ উত্তরের সহিত পূর্বদিকে θ কোণ করিলে, $\tan\theta=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$.

উদা. 5. একটি মোটর গাড়ি ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে পূর্বাভিমুখে চলিবার সময়ে অনুভূমিকভাবে উত্তর দিক হইতে সেকেণ্ডে 33 ফুট বেগে একটি ঢিল আসিয়া পড়ে। ঢিলটি কি বেগে কোন্ দিক হইতে গাড়িতে গিয়া আঘাত করে বলিয়া মনে হয়?

গাড়ির বেগ ঘণ্টায় 30 মাইল=সেকেণ্ড 44 ফুট।

ঢিলের আপেক্ষিক বেগ=তাহার নিজের বেগ এবং গাড়ীর বিপরীত ও সমান বেগের লব্ধি অর্থাৎ দক্ষিণদিকে সেকেণ্ডে 33 ফুট বেগ এবং পশ্চিমদিকে সেকেণ্ডে 44 ফুট বেগের লব্ধি

$$=\sqrt{33^2+44^2}=11\times5=55 \text{ ফু./সে.}$$



আপেক্ষিক বেগের দিক্ গাড়ির বিপরীত দিকের সঙ্গে θ কোণ করিলে

$$\tan\theta=\frac{33}{44}=\frac{3}{4}.$$

ঢিলের আপেক্ষিক বেগ সেকেণ্ডে 55 ফুট এবং পশ্চিমদিক হইতে θ° দক্ষিণে যেন $\tan\theta=\frac{3}{4}$ হয়।

উদা. 6. একটি স্টীমার $12\sqrt{2}$ মাইল বেগে দক্ষিণ দিকে এবং অপর একটি স্টীমার ঘণ্টায় 12 মাইল বেগে দক্ষিণ-পূর্ব দিকে যাইতেছে। প্রথম স্টীমারের আরোহীর সাপেক্ষে দ্বিতীয় স্টীমারের বেগ নির্ণয় কর।

দ্বিতীয় স্টীমারের আপেক্ষিক বেগ=ইহার নিজের বেগ এবং দ্বিতীয় স্টীমারের সমান কিন্তু বিপরীত বেগের লব্ধি

অর্থাৎ দক্ষিণ-পূর্বদিকে ঘণ্টায় 12 মাইল বেগ এবং উত্তরদিকে ঘণ্টায় $12\sqrt{2}$ মাইল বেগের লব্ধি

এখন উত্তরদিকে $12\sqrt{2}$ মা./ঘ.=উত্তর-পূর্বদিকে 12 মা./ঘ. এবং উত্তর-পশ্চিমদিকে 12 মা./ঘ.

অতএব, নির্ণেয় লব্ধি=দক্ষিণ-পূর্বদিকে 12 মা./ঘ., উত্তর-পশ্চিমদিকে 12 মা./ঘ. এবং উত্তর-পূর্বদিকে 12 মাইল/ঘণ্টা, এই তিন বেগের লব্ধি
=উত্তর-পূর্বদিকে ঘণ্টায় 12 মাইল।

[**বিকল্প পদ্ধতি ঃ**

আপেক্ষিক বেগ $=\sqrt{(12\sqrt{2})^2+12^2+2.12.12\sqrt{2}\cos 135^\circ}$

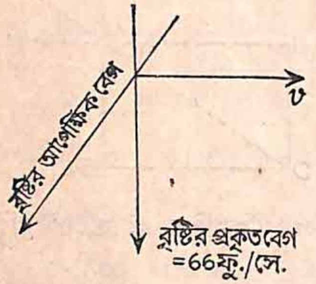
$=12$ মাইল/ঘণ্টা।

ধর, আপেক্ষিক বেগ উত্তরদিকের সঙ্গে θ° পূর্বদিকে, তাহা হইলে,

$$\tan\theta=\frac{12\sin 135^\circ}{12\sqrt{2}+12\sin 135^\circ}=\frac{12\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{12\sqrt{2}-12\times\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{12}{12}=1$$

$\therefore\ \theta=45^\circ.$]

উদা. 7. সেকেণ্ডে 66 ফুট বেগে উল্লম্বভাবে বৃষ্টি পড়িতেছে। কিন্তু রেল গাড়িতে একজন লোকের মনে হয় ইহা উল্লম্বের সঙ্গে 45° কোণ করিয়া পড়িতেছে। রেলগাড়ি ঘণ্টায় কত মাইল বেগে যাইতেছে? [Utkal. 1948]



বৃষ্টির প্রকৃত বেগ = রেলগাড়ির সাপেক্ষে তাহার বেগ ও রেলগাড়ির বেগের লব্ধি।

ধর, রেলগাড়ির বেগ সেকেণ্ডে v মাইল

$$\frac{v}{\sin 45^\circ}=\frac{66}{\sin 135^\circ}$$

$\therefore\ v=66$ ফু./সে. $=45$ মাইল/ঘণ্টা।

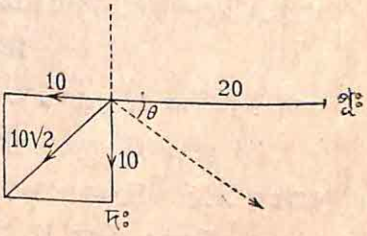
উদা. 8. একটি স্টীমার পূর্বদিকে ঘণ্টায় 20 কিলোমিটার বেগে যাইতেছে। স্টীমারের একজন আরোহীর মনে হয় বায়ু উত্তর-পূর্বদিক্ হইতে ঘণ্টায় $10\sqrt{2}$ কিলোমিটার বেগে বহিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

বায়ুর প্রকৃত বেগ = স্টীমারের সাপেক্ষে তাহার বেগ ও স্টীমারের বেগের লব্ধি

এখন দক্ষিণ-পশ্চিমদিকে $10\sqrt{2}$ কি. মি/ঘণ্টা বেগ

= দক্ষিণদিকে ঘণ্টায় 10 কি. মি. ও পশ্চিমদিকে ঘণ্টায় 10 কি. মি. বেগের লব্ধি

$\therefore$ পূর্বদিকে ঘণ্টায় 20 কি.মি. ও দক্ষিণ-পশ্চিমদিকে ঘণ্টায় 10 কি. মি.-এর লব্ধি = পূর্বদিকে (20−10) এবং দক্ষিণদিকে 10 কি.মি.-এর লব্ধি



$=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}$ কি.মি/ঘণ্টা এবং ইহা দক্ষিণ-পূর্বদিকে।

[**বিকল্প পদ্ধতি :** মনে কর, প্রকৃত বেগ V

$$V^2 = (10\sqrt{2})^2 + 20^2 + 2(10\sqrt{2})20.\cos 135^\circ$$
$$= 200 + 400 - 400 = 200$$

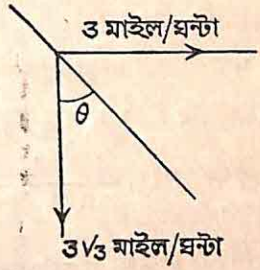
$\therefore \quad V = 10\sqrt{2}$ কি.মি./ঘ.

স্টীমারের গতির দিকের সঙ্গে V-এর দিক θ° কোণ করিলে,

$$\tan\theta = \frac{10\sqrt{2}\sin 135^\circ}{20 + 10\sqrt{2}\cos 135^\circ} = \frac{10}{20-10} = \frac{10}{10} = 1$$

$\therefore \quad \theta = 45^\circ$]

উদা. 9. ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে হাঁটিবার কালে একজন লোকের মনে হয় বৃষ্টি উল্লম্বভাবে $3\sqrt{3}$ মাইল বেগে পড়িতেছে। বৃষ্টির প্রকৃত দিক্ নির্ণয় কর। [U. P. Board]



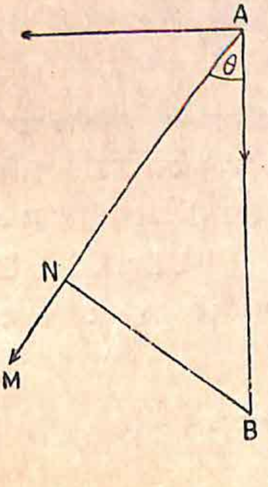
বৃষ্টির প্রকৃত বেগ = লোকের সাপেক্ষে বৃষ্টির বেগ ও লোকের বেগের লব্ধি।

বৃষ্টির প্রকৃত বেগ উল্লম্বের সঙ্গে θ কোণ করিলে,

$$\tan\theta = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore \quad \theta = 30^\circ।$$

উদা. 10. মধ্যাহ্ন কালে একটি জাহাজ A আর একটি জাহাজ B হইতে 20 মাইল উত্তরে ছিল। A ঘণ্টায় 12 মাইল বেগে সোজা দক্ষিণে এবং B ঘণ্টায় 9 মাইল বেগে সোজা পূর্বদিকে যাইতেছিল। কত সময় পরে তাহারা পরস্পরের নিকটতম হইয়াছিল এবং তখন তাহাদের মধ্যে দূরত্ব কত ছিল ?

মনে কর, মধ্যাহ্নকালে A এবং B জাহাজ দুইটির অবস্থান, তাহা হইলে AB = 20 মাইল,



A-র আপেক্ষিক বেগ তাহার নিজবেগ দক্ষিণদিকে ঘণ্টায় 12 মাইল এবং B-র বিপরীত বেগ অর্থাৎ পশ্চিমদিকে ঘণ্টায় 9 মাইল বেগের লব্ধি।

B-র সাপেক্ষে A-র বেগ যেন AB-র সঙ্গে θ কোণ করে, তাহা হইলে,

A-র আপেক্ষিক বেগ $= \sqrt{12^2 + 9^2}$

$= 15$ মাইল/ঘণ্টা,

$\tan\theta = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ ইহা হইতে $\sin\theta = \frac{3}{5}$;

$\cos\theta = \frac{4}{5}$.

B হইতে মনে হইবে A-স্টীমার AM দিকে চলিতেছে। AM-এর উপর BN লম্ব অঙ্কিত করিলে, BN ন্যূনতম দূরত্ব।

এখন BN$=$AB $\sin\theta=20\times\frac{3}{5}=12$ মাইল।

এবং AN$=$AB $\cos\theta=20\times\frac{4}{5}=16$ মাইল

স্টীমার যদি t সময় পরে ন্যূনতম দূরত্বে আসে, তাহা হইলে

$t=\frac{16}{15}$ ঘণ্টা$=1$ ঘণ্টা 4 মিনিট।

উদা. 11. একজন লোক ঘণ্টায় 4 কিলোমিটার বেগে পূর্বদিকে যাইবার কালে তাহার মনে হয় বায়ু উত্তরদিক্ হইতে বহিতেছে। যখন সে তাহার বেগ দ্বিগুণ করে তখন মনে হয় ইহা উত্তর-পূর্ব দিক্ হইতে বহিতেছে। বায়ুর প্রকৃত দিক্ এবং বেগ নির্ণয় কর।

মনে কর, বায়ুর প্রকৃত বেগ v, ইহা লোকটির সাপেক্ষে বায়ুর বেগ এবং লোকটির বেগের লব্ধি। মনে কর, ইহা পূর্বদিকের সঙ্গে দক্ষিণে θ কোণ করে।

প্রথম ক্ষেত্রে, $\dfrac{4}{\sin(90°-\theta)}=\dfrac{v}{\sin 90°}$; বা, $v=\dfrac{4}{\cos\theta}$ $\quad\cdots$(i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $\dfrac{8}{\sin(135°-\theta)}=\dfrac{v}{\sin 135°}$;

$$v=\frac{8\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta}=\frac{8}{\cos\theta+\sin\theta}\quad\cdots\quad\text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) হইতে, $\dfrac{4}{\cos\theta}=\dfrac{8}{\cos\theta+\sin\theta}$

বা, $\cos\theta+\sin\theta=2\cos\theta$. বা, $\sin\theta=\cos\theta$

$\therefore\ \tan\theta=1,\ \ \theta=45°$

এখন $v=\dfrac{4}{\cos 45°}=4\sqrt{2}$ কি. মি./ঘ.।

উদা. 12. একজন লোক সোজা পশ্চিমদিকে হাঁটিবার কালে তাহার মনে হয় বায়ু উত্তর-পশ্চিম দিক্ হইতে প্রবাহিত হইতেছে। কিন্তু যখন সে সোজা পূর্বদিকে একই বেগে হাঁটে তখন মনে হয় ইহা উত্তর-পূর্ব দিক্ হইতে বহিতেছে। বায়ুর এবং লোকটির গতিবেগের তুলনা কর। [W. B. H. S. 1960]

মনে কর, লোকের বেগ u এবং বায়ুর বেগ v পূর্বদিকে সঙ্গে α কোণ করে। প্রথমক্ষেত্রে, আপেক্ষিক বেগ পূর্বদিকে u এবং v এর লব্ধি

$\therefore\ \dfrac{u}{\sin(\alpha-45°)}=\dfrac{v}{\sin 45°}$, বা, $\dfrac{u}{v}=\sin\alpha-\cos\alpha\ \cdots$(i)

দ্বিতীয়ক্ষেত্রে, আপেক্ষিক বেগ পশ্চিমদিকে u এবং v এর লব্ধি

$$\frac{u}{\sin\{(180^\circ-\alpha)-45^\circ\}}=\frac{v}{\sin 45^\circ}\text{ ; বা, }\frac{u}{v}=\frac{\sin(\alpha+45^\circ)}{\sin 45^\circ}$$
$$=\sin\alpha+\cos\alpha\cdots\text{(ii)}$$

$\therefore$ (i) ও (ii) হইতে, $\sin\alpha-\cos\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha$

$2\cos\alpha=0$; বা, $\cos\alpha=0,\ \alpha=90^\circ$

প্রতিসাম্য হইতেই বুঝা যায় বায়ু উত্তর দিক্ হইতে দক্ষিণ মুখে প্রবাহিত হইতেছে।

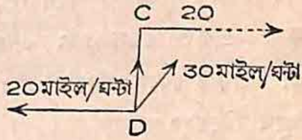
এখন, $\frac{u}{v}=\sin 90^\circ-\cos 90^\circ=1 \qquad \therefore\ u=v.$

উদা. 13. দুইটি কণা v এবং $2v$ বেগে বিপরীত মুখে একটি বৃত্তের পরিধিতে ভ্রমণ করে। কোন্ অবস্থানে তাহাদের আপেক্ষিক বেগ বৃহত্তম এবং কোন্ অবস্থানে তাহা ক্ষুদ্রতম, তখন ইহাদের মান কত?

যখন কণা দুইটি এক অবস্থানে আসে তখন আপেক্ষিক বেগ $2v+v=3v$ বৃহত্তম। যখন তাহারা বিপরীত অবস্থানে তখন আপেক্ষিক বেগ $2v-v=v$ ক্ষুদ্রতম।

উদা. 14. একটি ক্রুজার ঘণ্টায় 20 মাইল বেগে সোজা পূর্ব দিকে যাইতেছে। ইহার সোজা দক্ষিণ দিকে 10 মাইল দূরে একটি ডেস্ট্রয়ার আছে; তাহার বেগ ঘণ্টায় 30 মাইল। কোন্ দিকে গেলে ইহা ক্রুজারকে ধরিতে পারিবে এবং কত সময় পরে ইহা ঘটিবে?

যখন তাহারা একে অপর হইতে 10 মাইল দূরে তখন, মনে কর, C ক্রুজার এবং D ডেস্ট্রয়ার, D অবস্থান C হইতে 10 মাইল দক্ষিণে।



ক্রুজারকে ধরিতে হইলে ডেস্ট্রয়ারের আপেক্ষিক বেগের দিক্ হইবে DC।

মনে কর, ডেস্ট্রয়ারের প্রকৃত বেগ উত্তর দিকের সঙ্গে (DC-র সঙ্গে) θ কোণ করে। যেহেতু তাহার আপেক্ষিক বেগ, প্রকৃত বেগ 30 মাইল/ঘণ্টা এবং ক্রুজারের বিপরীত সমান বেগের (ঘণ্টায় 20 মাইল পশ্চিম দিকে) লব্ধি, অতএব

$$\frac{\sin\theta}{20}=\frac{\sin 90^\circ}{30}\text{ ; }\quad\therefore\ \sin\theta=\frac{20}{30}\sin 90^\circ=\frac{2}{3}.$$

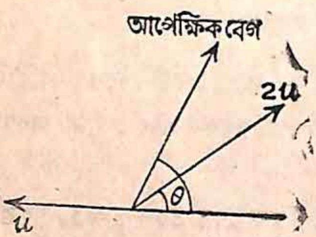
$\therefore$ আপেক্ষিক বেগ DC-এর দিকে $=\sqrt{30^2-20^2}=10\sqrt{5}$ মাইল/ঘণ্টা।

এখন, 10 মাইল যাইতে সময় লাগিবে $=\frac{10}{10\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ ঘণ্টা।

$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{5}}$ ঘণ্টা পরে ডেস্ট্রয়ারটি ক্রুজারকে ধরিতে পারিবে।

উদা. 15. একটি স্টীমার সোজা পূর্বদিকে ঘণ্টায় u মাইল বেগে যাইতেছে। দ্বিতীয় আর একটি স্টীমার পূর্বদিকের সঙ্গে উত্তরদিকে θ কোণ করিয়া ঘণ্টায় $2u$ মাইল বেগে যাইতেছে এবং প্রথম স্টীমারের একজন যাত্রীর নিকট মনে হয় ইহা উত্তর-পূর্বদিকে যাইতেছে। প্রমাণ কর যে $\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$.

দ্বিতীয় স্টীমারের আপেক্ষিক বেগ উত্তর-পূর্বদিকে। ইহা তাহার নিজের বেগ ও প্রথম স্টীমার যাত্রীর বিপরীত সমান বেগের লব্ধি। তাহার নিজের বেগ পূর্বদিকের উত্তরে θ কোণে, প্রথম স্টীমারের বিপরীত সমান বেগ = পশ্চিমদিকে u.



এখন, $\dfrac{\sin(45°-\theta)}{u}=\dfrac{\sin 135°}{2u}$.

$\therefore\ \sin\theta\cos 45°-\cos\theta\sin 45°=\frac{1}{2}\sin 135°$.

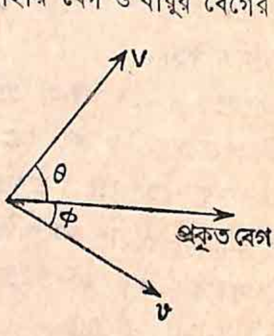
অর্থাৎ $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$

বর্গ করিয়া, $1-\sin 2\theta=\frac{1}{4}$.

বা, $\sin 2\theta=\frac{3}{4}\quad\therefore\ 2\theta=\sin^{-1}\frac{3}{4},\ \theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$

উদা. 16. একটি উড়োজাহাজের দিক্ বায়ু প্রবাহের দিকের সঙ্গে θ কোণ করে। যদি বায়ুর সাপেক্ষে উড়োজাহাজের বেগ $V(<v)$ হয়, দেখাও যে উড়োজাহাজের প্রকৃত বেগ $V\cos\theta+\sqrt{v^2-V^2\sin^2\theta}$ এবং উড়োজাহাজটি কোন্ দিকে চালাইতে হইবে?

উড়োজাহাজের প্রকৃত বেগ W, বায়ুসাপেক্ষে তাহার বেগ ও বায়ুর বেগের লব্ধি। মনে কর, প্রকৃত বেগ এবং v-এর মধ্যে কোণ ϕ. প্রকৃত বেগের দিকে এবং তাহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া



$W=V\cos\theta+v\cos\phi\cdots$(i)

$0=V\sin\theta-v\sin\phi\cdots$(ii)

$\therefore\ \sin\phi=\frac{V}{v}\sin\theta$

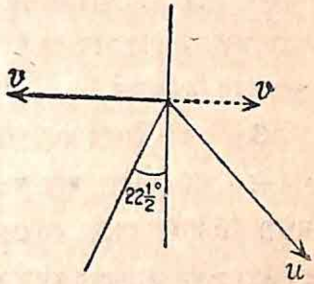
এখন, $W=V\cos\theta+v\sqrt{1-\frac{V^2}{v^2}\sin^2\theta}$

$=V\cos\theta+\sqrt{v^2-V^2\sin^2\theta}$

গন্তব্যস্থলের দিকের সঙ্গে $\sin^{-1}\left(\frac{V}{v}\sin\quad\right)$ কোণ করিয়া উড়োজাহাজটি চালাইতে হইবে।

উদা. 17. একটি জাহাজ সোজা পূর্বদিকে চলিতেছে এবং ইহা জানা আছে যে বায়ু উত্তর-পশ্চিমদিক্ হইতে প্রবাহিত হইতেছে এবং বায়ু উঃ উত্তর-পূর্ব (N.N.F.) দিক্ হইতে বহিতেছে মনে হয়। দেখাও যে জাহাজের বেগের মান বায়ুর বেগের সমান। [Banaras. 1940]

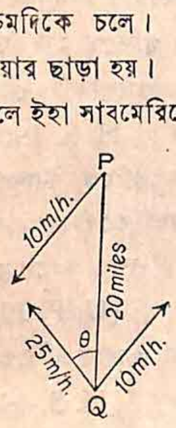
মনে কর, বায়ুর বেগ u এবং জাহাজের বেগ v। বায়ুর আপেক্ষিক বেগ তাহার প্রকৃত বেগ u এবং জাহাজের বেগের বিপরীত একটা বেগ অর্থাৎ পশ্চিমদিকে v-এর লব্ধি।



এখন, বায়ুর আপেক্ষিক বেগের দিক্ তাহার প্রকৃত বেগ u-এর সঙ্গে $(22\frac{1}{2}°+45°)$ অর্থাৎ $67\frac{1}{2}°$ কোণ করে এবং পশ্চিমমুখী বেগ v-এর সঙ্গে $67\frac{1}{2}°$ কোণ করে। অতএব আপেক্ষিক বেগের দিক্ তাহার উপাংশদ্বয় u এবং v-এর মধ্যবর্তী। আমরা জানি লব্ধির দিক্ উপাংশদ্বয়ের মধ্যবর্তী হইলে উপাংশদ্বয় সমান।

অতএব $u=v$. $\left[\because \dfrac{u}{\sin 67\frac{1}{2}°}=\dfrac{v}{\sin 67\frac{1}{2}°}\right]$

উদা. 18. একটি সাবমেরিন P ছাড়িয়া ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে দক্ষিণ-পশ্চিমদিকে চলে। একই সময়ে P হইতে 20 মাইল দক্ষিণে Q হইতে একটি ডেস্ট্রয়ার ছাড়া হয়। ডেস্ট্রয়ার যদি ঘণ্টায় 25 মাইল বেগে চলিতে পারে কোন্দিকে চলিলে ইহা সাবমেরিনের উপর গিয়া ধাক্কা দিতে পারিবে ?



সাবমেরিন এবং ডেস্ট্রয়ার উভয়কে উত্তর-পূর্বাভিমুখে ঘণ্টায় 10 মাইল বেগ দাও। তাহা হইলে সাবমেরিন স্থিরাবস্থায় থাকে। অতএব Q-এর আপেক্ষিক বেগ QP-এর দিকে (অর্থাৎ উত্তরাভিমুখে) ; এই আপেক্ষিক বেগ ডেস্ট্রয়ারের নিজের বেগের সহিত উত্তর-পূর্বাভিমুখে 10 মাইল/ঘণ্টা বেগের লব্ধি। ধর, চিত্রে প্রদর্শিত দিকে উত্তরের সহিত পশ্চিমদিকে θ কোণ করিয়া ডেস্ট্রয়ার চলে। তাহা হইলে

$$\frac{\sin\theta}{10}=\frac{\sin 45°}{25}\;; \quad \text{বা,}\quad \sin\theta=\frac{10}{25}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$\therefore$ ডেস্ট্রয়ার উত্তরের সহিত পশ্চিমদিকে $\sin^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ কোণে চলিতে হইবে।

প্রশ্নমালা—II

1. একটি কণা সেকেণ্ডে 5 ফুট বেগে উত্তরদিকে চলিতেছে; অপর একটি কণা সেকেণ্ডে 12 ফুট বেগে পূর্বদিকে চলিতেছে। যদি তাহারা একই সময়ে একই বিন্দু হইতে যাত্রা করে তাহা হইলে একের সাপেক্ষে অপরের আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় কর। এক মিনিট পরে তাহাদের পরস্পরের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

2. একজন লোক ঘণ্টায় 3 কিলোমিটার বেগে পূর্বদিকে যাইবার কালে তাহার মনে হয় বায়ু উত্তর দিক্ হইতে বহিতেছে। যখন সে তাহার বেগ দ্বিগুণ করে তখন তাহার মনে হয় ইহা উত্তর-পূর্ব দিক্ হইতে বহিতেছে। বায়ুর প্রকৃত দিক্ এবং বেগ নির্ণয় কর।

3. একটি স্টীমার ঘণ্টায় 1 মাইল বেগে উত্তরদিকে যাইবার কালে ইহার সোজা পূর্বদিকে 10 মাইল দূরে অপর একটি স্টীমার দেখিতে পায়; ইহা সোজা পশ্চিমদিকে ঘণ্টায় 16 মাইল বেগে যাইতেছে। কত সময় পরে তাহারা পরস্পরের নিকটতম হয় এবং তখন তাহাদের দূরত্ব কত? [Pat. U. 1943]

4. একটি বালক ছাতা লইয়া বৃষ্টির সমান বেগ লইয়া চলিতেছে। বৃষ্টি উল্লম্বভাবে পতিত হইতে থাকিলে বালকটি ছাতাটিকে কত কোণে নত রাখিলে সে বৃষ্টি হইতে রক্ষা পাইবে।

5. একটি লোক যখন সোজা পশ্চিমদিকে যায় তখন তাহার মনে হয় বায়ু উত্তর-পশ্চিম দিক হইতে বহিতেছে; কিন্তু যখন পূর্বদিকে একই গতিতে যায় তখন তাহার মনে হয় বায়ু উত্তর-পূর্বদিক হইতে বহিতেছে। বায়ু ও লোকটির বেগের তুলনা কর। [H. S. 1960]

6. কোন ব্যক্তি যখন ঘণ্টায় 3 মাইল বেগ লইয়া চলে তখন বৃষ্টিকে উল্লম্বভাবে পতিত হয় বলিয়া মনে হয়। কিন্তু যখন ঘণ্টায় 5 মাইল বেগ লইয়া চলে তখন বৃষ্টি তাহার নিকট উল্লম্বদিকের সহিত 30° কোণে আসিয়া পড়ে। তাহা হইলে বৃষ্টির প্রকৃত দিক এবং বেগের মান নির্ণয় কর। [U. P. 1937]

7. A এবং B দুইটি বিন্দু পরস্পর সমকোণে যথাক্রমে u এবং v বেগে চলিতেছে। A-র সাপেক্ষে B-র বেগ নির্ণয় কর। [H. S. 1961]

8. 130 ফুট এবং 110 ফুট দৈর্ঘ্য সম্পন্ন দুইটি ট্রেন বিপরীত দিক হইতে দুইটি সমান্তরাল রেখা বরাবর আসিল। প্রথম ট্রেনটির বেগ দ্বিতীয় ট্রেনটির বেগের দ্বিগুণ। ট্রেন দুইটির আরোহীগণ দেখিল 4 সেকেণ্ডে তাহারা পরস্পরকে অতিক্রম করিল। তাহা হইলে ট্রেন দুইটির বেগ নির্ণয় কর।

9. একটি বৃত্তের পরিধিতে দুইটি বিন্দু v এবং $2v$ বেগে বিপরীত দিকে চলিতেছে।

কোন্ কোন্ অবস্থানে তাহাদের আপেক্ষিক বেগ বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম এবং মানগুলি কত ? [H. S. 1962]

10. কোন বোমারু বিমান ঘণ্টায় 100 মাইল বেগে পূর্বদিকে কোন একটি নগর X-এর উপর দিয়ে চলিতেছে। 6 মিনিট পরে X-এর 40 মাইল দক্ষিণে কোন স্টেশন Y হইতে পশ্চাদ্-অনুধাবনগামী একটি বিমান উত্তর-পূর্বদিকে ধাবিত হইল। উভয়েই দিক পরিবর্তন না করিয়া চলিলে পশ্চাদ্‌গামী বিমানটি কত বেগে চলিলে বোমারু বিমানটিকে ধরিতে পারিবে।

11. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে পূর্বদিকে যাইতেছে। তাহার মনে হইল বায়ু সোজা উত্তর দিক হইতে আসিতেছে; কিন্তু যখন সে তাহার বেগ দ্বিগুণ করিল, তখন তাহার মনে হইল বায়ু উত্তর-পূর্বদিক হইতে আসিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগ এবং দিক নির্ণয় কর। [C. U. 1943]

12. একটি স্টীমার ঘণ্টায় u মাইল বেগে পূর্বাভিমুখে এবং পূর্বদিকের সহিত উত্তরাভিমুখে θ-কোণে নত দিকে আর একটি স্টীমার ঘণ্টায় $2u$ মাইল বেগে যাইতেছিল। প্রথম স্টীমারের একজন যাত্রীর মনে হইল দ্বিতীয় স্টীমারটি উত্তর-পূর্বদিকে যাইতেছে। প্রমাণ কর যে, $\theta = \sin^{-1}\frac{3}{4}$. [C. U. 1945, '49]

13. উত্তর-পূর্ব অভিমুখে ভ্রমণরত এক ব্যক্তির মনে হইল বায়ু উত্তর দিক হইতে আসিতেছে। কিন্তু ঐ ব্যক্তি যখন পূর্বের দ্বিগুণ বেগে চলে তখন তাহার মনে হয় বায়ু উত্তরদিকের সহিত পূর্ব দিকের $\tan^{-1}(\frac{1}{2})$ কোণে নত হইয়া আসিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

14. দুইটি রেলপথ সমকোণে নত। একটি ট্রেন কোন একটি লাইনে ঘণ্টায় 30 মাইল বেগ লইয়া সংযোগ স্থলে 7 P.M.-এ অতিক্রম করে এবং অপর লাইনে দ্বিতীয় একটি ট্রেন ঘণ্টায় 40 মাইল বেগ লইয়া সংযোগ স্থলে 12 P.M.তে অতিক্রম করে। তাহা হইলে কখন তাহাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব সর্বনিম্ন ছিল।

15. একটি নদীর স্রোত পশ্চিম দিক হইতে ঘণ্টায় 2 মাইল বেগে পূর্বদিকে বহিতেছে। একটি নৌকা স্রোতের সাপেক্ষে দক্ষিণাভিমুখে ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে যাইতেছে। নদীর সমান্তরাল পথে যদি একটি গাড়ী ঘণ্টায় 6 মাইল বেগে চলিতে থাকে, তাহা হইলে গাড়ীর সাপেক্ষে নৌকার গতিবেগ কিরূপ হইবে।

16. একটি ট্রেনের গতির অভিমুখের সহিত α-কোণে একটি পিস্তলের গুলি ছোঁড়া হইল। একটি কামরায় প্রবেশ করিয়া গুলিটি ইঞ্জিন হইতে সর্বাপেক্ষা দূরের কোণের মধ্য দিয়া ঢুকিয়া বিপরীত কোণ দিয়া বাহির হইয়া গেল। যদি ট্রেনের গতি

ঘণ্টায় u মাইল এবং a ও b (ফুটে) কামরাটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ হয়, তবে প্রমাণ কর যে ঐ কামরার মধ্য দিয়া নির্গত হইতে গুলিটির সময় লাগে $\frac{15(b \cos \alpha - a)}{22u}$ সেকেণ্ড।

17. দুইটি রাস্তা সংযোগস্থলে 60° কোণে নত; সংযোগস্থল হইতে যথাক্রমে 100 গজ এবং 200 গজ দূরে দুইটি লোক সমবেগে সংযোগ স্থলের দিকে গমন করিতেছে। তাহাদের মধ্যে যখন ন্যূনতম দূরত্ব, তখন তাহারা সংযোগস্থল হইতে কত দূরে অবস্থিত। [U. P. 1924]

18. ঘণ্টায় 30 কি.মি. বেগে উত্তরাভিমুখে গতিশীল একটি ট্রেনের আরোহীর মনে হইল বায়ু পূর্বদিকের সহিত উত্তরাভিমুখে 15° কোণে নত হইয়া আসিতেছে। একই সময় ঘণ্টায় $15(\sqrt{3}-1)$ কি.মি. বেগে পূর্ব অভিমুখে গতিশীল একটি মোটর গাড়ীর আরোহীর মনে হইল বায়ু উত্তরদিকের সহিত পূর্বাভিমুখে নত হইয়া আসিতেছে। বায়ুর প্রকৃত অভিমুখিতা নির্ণয় কর।

19. একই সময়ে একই স্থান হইতে দুইটি কণা পরস্পর α-কোণে নত দুইটি সরলরেখায় যাত্রা আরম্ভ করিল। একটি কণা, u সমবেগে এবং অপর কণাটি স্থির অবস্থা হইতে সমত্বরণ f-এ চলিতে থাকিলে দেখাও যে তাহাদের পরস্পরের সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ $\frac{u \cos \alpha}{f}$ সময় পরে ক্ষুদ্রতম হইবে এবং এই ক্ষুদ্রতম আপেক্ষিক বেগের মান $u \sin \alpha$.

20. কোন যুদ্ধ জাহাজ P পোর্ট হইতে উত্তরাভিমুখে ঘণ্টায় 20 মাইল বেগে যাত্রা শুরু করিল। P-এর পূর্বদিকে 50 মাইল দূরে Q বিন্দু হইতে একটি সাবমেরিন ঘণ্টায় $10\sqrt{6}$ মাইল বেগে রওনা হইয়া 25 মাইল দূরত্বে যুদ্ধ জাহাজটিকে পাইবে আশা করিয়া থাকিলে, তাহার দিকের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

সরলরেখায় গতি

(Motion in a Straight line)

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

মনে কর, একটি কণা $\overrightarrow{OX}$ রেখায় গতিশীল ; উহার t তম সময়ে অবস্থান P, যাহা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে দূরত্ব x. $t+\delta t$ তম সময়ে উহার অবস্থান, মনে কর, Q যাহা O বিন্দু হইতে $x+\delta x$ দূরে অবস্থিত। সুতরাং δt সময়ে ঐ কণার সরণ δx.

মনে কর t সময়ে উহার বেগ v এবং ত্বরণ f.

$$\therefore \quad v = \text{সরণের হার} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx}{dt} \quad \cdots \cdots \text{(i)}$$

মনে কর, $t+\delta t$ সময়ে বেগ $v+\delta v$; সুতরাং δt সময়ে উহার বেগের পরিবর্তন $=\delta v$.

$$\therefore \quad f = \text{বেগের পরিবর্তনের হার} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{dv}{dt} \quad \cdots \cdots \text{(ii)}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \cdots \cdots \text{(iii)}$$

আবার, $f = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx} \quad \cdots \cdots \text{(iv)}$

(a). (ii) হইতে, $\frac{dv}{dt} = f$.

t-এর সাপেক্ষে সমাকলন করিয়া, $v = ft + A$ [A = সমাকলন ধ্রুবক]

যখন $t=0$, তখন $v=u$, প্রাথমিক বেগ, $\therefore \; u = 0 + A$, বা, $A = u$.

সুতরাং $\boldsymbol{v = u + ft}$

(b). (iii)-এ $x = s$ বসাইয়া, $\frac{d^2s}{dt^2} = f$

t-এর সাপেক্ষে সমাকলন করিয়া, $\frac{ds}{dt} = ft + B$ [B = সমাকলন ধ্রুবক]

যখন $t=0$, $\frac{ds}{dt} = v = u$. সুতরাং $\frac{ds}{dt} = u + ft$

আবার সমাকলন করিয়া, $s = ut + \frac{1}{2} ft^2 + C$ [C = সমাকলন ধ্রুবক]

যখন, $t=0$, $s=0$. $\therefore$ $C=0$. সুতরাং $\boldsymbol{s = ut + \frac{1}{2}ft^2}$

(c). (iv) হইতে $v \cdot \frac{dv}{ds} = f$; বা, $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = f$.

s-এর সাপেক্ষে সমাকলন করিয়া, $\frac{1}{2}v^2=f.s+D$. [D = সমাকলন ধ্রুবক]

যখন $s=0$, $v=u$. $\therefore$ $\frac{1}{2}u^2=0+D$. বা, $D=\frac{1}{2}u^2$.

সুতরাং $\frac{1}{2}v^2=fs+\frac{1}{2}u^2$ বা, $v^2=u^2+2fs$.

(*d*). t-তম সেকেণ্ডে সরণ $=u+\frac{1}{2}f(2t-1)$.

(*e*). স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিলে $(u=0)$:

(i) $v=ft$. (ii) $s=\frac{1}{2}ft^2$, (iii) $v^2=2fs$.

(*f*). f যদি সম-মন্দন হয়, তাহা হইলে ত্বরণ $=-f$;

(i) $v=u-ft$. (ii) $s=ut-\frac{1}{2}ft^2$. (iii) $v^2=u^2-2fs$.

উদাহরণমালা—III

উদা. 1. u, f, t, v এবং s এইগুলিকে প্রচলিত অর্থে গ্রহণ করিয়া (দৈর্ঘ্য এবং সময়ের একক ফুট এবং সেকেণ্ড)

(i) দেওয়া আছে, $u=2$, $f=1$, $t=4$; v এবং s-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $u=10$, $f=-2$, $t=5$; হইলে, v এবং s-এর মান নির্ণয় কর।

(iii) ধর, $u=8$, $v=4$, $s=12$ দেওয়া আছে, f এবং t-এর মান কত হইবে ?

সমাধান :

(i) আমরা জানি $v=u+ft$ $\therefore$ $v=2+1\times4=6$ ফু./সে.

$s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র হইতে,

$s=2.4+\frac{1}{2}.1.4^2=8+\frac{1}{2}\times16=8+8=16$ ফুট।

(ii) $v=u+ft$ সূত্র হইতে, $v=10+(-2)5=10-10=0$

$s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র হইতে, $s=10\times5+\frac{1}{2}.(-2)5^2=50-25=25$ ফুট

(iii) $v^2=u^2+2fs$ সূত্র হইতে,

$4^2=8^2+2.f\times12$; $\therefore$ $24f=16-64=-48$

$\therefore$ $f=-2$ ফুট/সেকেণ্ড^2

$v=u+ft$ সূত্র হইতে $4=8-2t$

$\because$ $2t=8-4=4$, $t=2$ সেকেণ্ড।

উদা. 2. একটি বিন্দু স্থিরাবস্থা হইতে 4 সেন্টিমিটার-সেকেণ্ড একক ত্বরণ লইয়া যাত্রা করিলে কত সময় পরে উহার বেগ সেকেণ্ডে 60 সেন্টিমিটার হইবে ? এই সময়ে উহা কতদূর যাইবে ?

এখানে $u=0$, $f=4$ সে. মি./সে.^{2}, $v=60$ সে. মি./সে.

$\because \ u=0$; $\therefore \ v=ft$ সূত্র হইতে, $60=4t$; $\therefore \ t=15$ সেকেণ্ড

$v^2=2fs$ সূত্র হইতে,

$\therefore \ 60^2=2\times 4s,\ 8s=60\times 60$; $s=\frac{3600}{8}=450$ সে. মি.

উদা. 3. একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া 4 সেকেণ্ডে 40 ফুট পথ অতিক্রম করে। ইহা ত্বরণ নির্ণয় কর।

এখানে $u=0,\ s=40$ ফুট, $t=4$ সেকেণ্ড, f নির্ণয় করিতে হইবে,

$s=\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র হইতে, $40=\frac{1}{2}\times f\times 4^2$; $16f=80$

$\therefore \ f=5$ ফুট/সেকেণ্ড^2।

উদা. 4. একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণে যাত্রা করিয়া 10 সেকেণ্ডে 400 সেন্টিমিটার পথ অতিক্রম করে। ঐ সময় অন্তে উহার বেগ নির্ণয় কর।

এখানে $u=0,\ s=400$ সে.মি., $t=10$ সেকেণ্ড ;

প্রথমে, $s=\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র হইতে, $400=\frac{1}{2}f\times 10^2 \quad \therefore \ 800=100f$

$f=8$ সে. মি./সে^{2}

এখন, $v=ft$ সূত্র হইতে, $v=8\times 10=80$ সে. মি./সে.।

উদা. 5. একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণে যাত্রা করিয়া চতুর্থ সেকেণ্ডে 112 ফুট পথ অতিক্রম করে। উহার ত্বরণ নির্ণয় কর।

t-তম সেকেণ্ডে সরণ$=\frac{1}{2}f(2t-1)$ এখানে $u=0$;

$112=\frac{1}{2}f(2.4-1)$ বা, $7f=224$; $\therefore \ f=32$ ফু./সে.^{2}.

উদা. 6. একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণে যাত্রা করে। 3 সেকেণ্ড পরে যদি ইহার বেগ সেকেণ্ডে 24 ফুট হয়, তাহা হইলে 8 সেকেণ্ড পরে ইহার বেগ কত? 3 সেকেণ্ডে ইহা কত পথ যায়?

$v=ft$ সূত্র হইতে, $24=f\times 3 \quad \therefore \ f=8$ ফু./সে.^{2}

8 সেকেণ্ড পরে বেগ$=8\times 8=64$ ফু./সে.

3 সেকেণ্ড সরণ$=\frac{1}{2}\times 8\times 3^2=4\times 9=36$ ফুট।

উদা. 7. একটি রেলগাড়ি স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া সমত্বরণে 3 মিনিটে এক মাইল পথ অতিক্রম করে; তখন ইহার বেগ কত? দুই মিনিটে ইহা কত পথ অতিক্রম করিয়াছিল? [C. U. 1933]

এখানে $s=1$ মাইল$=1760\times 3$ ফুট, $t=3$ মি.$=3\times 60=180$ সে.

$s=\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র হইতে,

$1760\times 3=\frac{1}{2}f\times 180^2$; $\therefore \ f=\dfrac{1760\times 3\times 2}{180\times 180}=\dfrac{88}{270}$ ফু./সে.^{2}

3 মিনিট বা 180 সেকেণ্ডে অর্জিত বেগ $v=\frac{88}{270}\times 180=\frac{176}{3}$ ফু./সে.

s-এর সাপেক্ষে সমাকলন করিয়া, $\frac{1}{2}v^2=f.s+D.$ [D = সমাকলন ধ্রুবক]

যখন $s=0$, $v=u$. $\therefore$ $\frac{1}{2}u^2=0+D.$ বা, $D=\frac{1}{2}u^2.$

সুতরাং $\frac{1}{2}v^2=fs+\frac{1}{2}u^2$ বা, $\boldsymbol{v^2=u^2+2fs.}$

(*d*). t-তম সেকেণ্ডে সরণ $=u+\frac{1}{2}f(2t-1)$.

(*e*). স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিলে $(u=0)$:

(i) $v=ft.$ (ii) $s=\frac{1}{2}ft^2$, (iii) $v^2=2fs.$

(*f*). f যদি সম-মন্দন হয়, তাহা হইলে ত্বরণ $=-f$;

(i) $v=u-ft.$ (ii) $s=ut-\frac{1}{2}ft^2.$ (iii) $v^2=u^2-2fs.$

উদাহরণমালা—III

উদা. 1. u, f, t, v এবং s এইগুলিকে প্রচলিত অর্থে গ্রহণ করিয়া (দৈর্ঘ্য এবং সময়ের একক ফুট এবং সেকেণ্ড)

(i) দেওয়া আছে, $u=2$, $f=1$, $t=4$; v এবং s-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $u=10$, $f=-2$, $t=5$; হইলে, v এবং s-এর মান নির্ণয় কর।

(iii) ধর, $u=8$, $v=4$, $s=12$ দেওয়া আছে, f এবং t-এর মান কত হইবে ?

সমাধান :

(i) আমরা জানি $v=u+ft$ $\therefore$ $v=2+1\times4=6$ ফু./সে.

$s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র হইতে,

$s=2.4+\frac{1}{2}.1.4^2=8+\frac{1}{2}\times16=8+8=16$ ফুট।

(ii) $v=u+ft$ সূত্র হইতে, $v=10+(-2)5=10-10=0$

$s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র হইতে, $s=10\times5+\frac{1}{2}.(-2)5^2=50-25=25$ ফুট

(iii) $v^2=u^2+2fs$ সূত্র হইতে,

$4^2=8^2+2.f\times12$; $\therefore$ $24f=16-64=-48$

$\therefore$ $f=-2$ ফুট/সেকেণ্ড^2

$v=u+ft$ সূত্র হইতে $4=8-2t$

$\because$ $2t=8-4=4$, $t=2$ সেকেণ্ড।

উদা. 2. একটি বিন্দু স্থিরাবস্থা হইতে 4 সেন্টিমিটার-সেকেণ্ড একক ত্বরণ লইয়া যাত্রা করিলে কত সময় পরে উহার বেগ সেকেণ্ডে 60 সেন্টিমিটার হইবে ? এই সময়ে উহা কতদূর যাইবে ?

এখানে $u=0$, $f=4$ সে. মি./সে.^{2}, $v=60$ সে. মি./সে.

$\because \ u=0$; $\therefore \ v=ft$ সূত্র হইতে, $60=4t$; $\therefore \ t=15$ সেকেণ্ড

$v^2=2fs$ সূত্র হইতে,

$\therefore \ 60^2=2\times 4s, \ 8s=60\times 60$; $s=\frac{3600}{8}=450$ সে. মি.

উদা. 3. একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া 4 সেকেণ্ডে 40 ফুট পথ অতিক্রম করে। ইহা ত্বরণ নির্ণয় কর।

এখানে $u=0$, $s=40$ ফুট, $t=4$ সেকেণ্ড, f নির্ণয় করিতে হইবে,

$s=\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র হইতে, $40=\frac{1}{2}\times f\times 4^2$; $16f=80$

$\therefore \ f=5$ ফুট/সেকেণ্ড^2 ।

উদা. 4. একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণে যাত্রা করিয়া 10 সেকেণ্ডে 400 সেন্টিমিটার পথ অতিক্রম করে। ঐ সময় অন্তে উহার বেগ নির্ণয় কর।

এখানে $u=0$, $s=400$ সে.মি., $t=10$ সেকেণ্ড ;

প্রথমে, $s=\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র হইতে, $400=\frac{1}{2}f\times 10^2$ $\therefore \ 800=100f$

$f=8$ সে. মি./সে^{2}

এখন, $v=ft$ সূত্র হইতে, $v=8\times 10=80$ সে. মি./সে. ।

উদা. 5. একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণে যাত্রা করিয়া চতুর্থ সেকেণ্ডে 112 ফুট পথ অতিক্রম করে। উহার ত্বরণ নির্ণয় কর।

t-তম সেকেণ্ডে সরণ$=\frac{1}{2}f(2t-1)$ এখানে $u=0$;

$112=\frac{1}{2}f(2.4-1)$ বা, $7f=224$; $\therefore \ f=32$ ফু./সে.^{2}.

উদা. 6. একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণে যাত্রা করে। 3 সেকেণ্ড পরে যদি ইহার বেগ সেকেণ্ডে 24 ফুট হয়, তাহা হইলে 8 সেকেণ্ড পরে ইহার বেগ কত? 3 সেকেণ্ডে ইহা কত পথ যায়?

$v=ft$ সূত্র হইতে, $24=f\times 3$ $\therefore \ f=8$ ফু./সে.^{2}

8 সেকেণ্ড পরে বেগ$=8\times 8=64$ ফু./সে.

3 সেকেণ্ড সরণ$=\frac{1}{2}\times 8\times 3^2=4\times 9=36$ ফুট।

উদা. 7. একটি রেলগাড়ি স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া সমত্বরণে 3 মিনিটে এক মাইল পথ অতিক্রম করে; তখন ইহার বেগ কত? দুই মিনিটে ইহা কত পথ অতিক্রম করিয়াছিল? [C. U. 1933]

এখানে $s=1$ মাইল$=1760\times 3$ ফুট, $t=3$ মি.$=3\times 60=180$ সে.

$s=\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র হইতে,

$1760\times 3=\frac{1}{2}f\times 180^2$; $\therefore \ f=\dfrac{1760\times 3\times 2}{180\times 180}=\dfrac{88}{270}$ ফু./সে.^{2}

3 মিনিট বা 180 সেকেণ্ডে অর্জিত বেগ $v=\frac{88}{270}\times 180=\frac{176}{3}$ ফু./সে.

এই বেগ ঘণ্টায় 40 মাইল [$\frac{44}{3}$ ফু./সে.$=10$ মা./ঘ.]

2 মিনিটে বা 120 সেকেণ্ডে সরণ$=\frac{1}{2}f\times120^2$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{88}{270}\times120\times120=\frac{1760\times4}{3}\text{ ফুট}=\frac{4}{3\times3}=\frac{4}{9}\text{ মাইল।}$$

উদা. 8. একটি কণা 10 সেকেণ্ডে 650 ফুট পথ অতিক্রম করে এবং তখন উহার বেগ সেকেণ্ডে 80 ফুট, সম ত্বরণ হইলে প্রারম্ভিক বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

$s=650$ ফুট, $t=10$ সে., $v=80$ ফু./সে. $u=?$, $f=?$

$s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র হইতে, $650=u\times10+\frac{1}{2}f\times10^2$

বা, $10u+50f=650$; $u+5f=65\cdots\cdots$(i)

আবার $v=u+ft$ সূত্র হইতে, $80=u+10f\cdots\cdots$(ii)

সমীকরণ (ii) হইতে (i) বিয়োগ করিয়া, $5f=15$; $\therefore f=3$ ফু./সে.^{2}

প্রথম সমীকরণে f-এর মান বসাইয়া, $u+15=65$ $\therefore u=50$ ফু./সে.।

উদা. 9. কোনও প্রাচীরের 3 ইঞ্চি ভেদ করিয়া একটি গুলির বেগ প্রাচীরে প্রবেশের সময়ে যাহা ছিল তাহার অর্ধেক হইয়া গেল। উহা আর কত ইঞ্চি ভেদ করিবে? [C. U. 1943]

মনে কর, লক্ষ্যে প্রবেশ করিবার পূর্বে বেগ u, তাহা হইলে s যখন 3 ইঞ্চি বা $\frac{1}{4}$ ফুট তখন বেগ $\frac{u}{2}$. $v^2=u^2-2fs$ সূত্র হইতে,

$$\frac{u^2}{4}=u^2-2f\times\frac{1}{4}\text{ ; বা, }\frac{f}{2}=\frac{3}{4}u^2\quad\therefore f=\frac{3}{2}u^2$$

যদি আরও x ফুট অতিক্রম করিবার পর বেগ না থাকে, তাহা হইলে,

$$0=\left(\frac{u}{2}\right)^2-2fx=\frac{u^2}{4}-2\times\frac{3}{2}u^2x\quad\therefore 3x=\frac{1}{4}$$

$\therefore x=\frac{1}{12}$ ফুট$=1$ ইঞ্চি।

উদা. 10. একটি কণা কোনও প্রারম্ভিক বেগ লইয়া যাত্রা করে। 3 সেকেণ্ড সমত্বরণে চলিয়া উহা 81 ফুট অতিক্রম করে, তারপর বিনাত্বরণে 3 সেকেণ্ডে 72 ফুট যায়। প্রারম্ভিক বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর। [U. P. 1939]

ধর, প্রারম্ভিক বেগ u এবং ত্বরণ f

যেহেতু 3 সেকেণ্ড সময়ে সরণ 81 ফুট

$\therefore$ $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র হইতে, $81=3u+\frac{1}{2}f\times3^2$

বা, $3u+\frac{9}{2}f=81$; $u+\frac{3}{2}f=27\cdots\cdots$(i)

3 সেকেণ্ড পরে বেগ যদি v হয়, যেহেতু সমবেগ v লইয়া 3 সেকেণ্ড সরণ 72 ফুট।

$\therefore 72=v\times3$ $\therefore v=24$ ফু./সে,

এখন $v=u+ft$ সূত্র হইতে, $24=u+3f \quad \cdots \quad$ (ii)

সমীকরণ (ii) হইতে (i) বিয়োগ করিয়া, $\frac{3}{2}f=-3$; $\therefore \quad f=-2$ ফু./সে.^{2}

সমীকরণ (ii) তে f-এর মান বসাইয়া

$24=u+3(-2) \quad \therefore \quad u=24+6=30$ ফু./সে.।

উদা. 11. একটি কণা সেকেণ্ডে 60 ফুট বেগে যাত্রা করিয়া 2 ফুট/সে^{2} সমমন্দনে চলিতে থাকিলে দশম সেকেণ্ডে কতদূর যাইবে ? কত সময় পরে উহা থামিয়া যাইবে ? থামিবার পূর্বে কতদূর যাইবে ?

আমরা জানি, t-তম সেকেণ্ডে সরণ $=u+\frac{1}{2}f(2t-1)$

$\therefore$ দশম সেকেণ্ডে সরণ $=60-\frac{1}{2}\times 2(20-1) \qquad [f=-2]$

$=60-19=41$ ফুট।

যদি t সময় পরে কণাটি স্থিরাবস্থায় আসে, তাহা হইলে,

$0=60-2t \quad \therefore \quad t=30$ সেকেণ্ড

যদি স্থিরাবস্থায় আসিবার পূর্বে সরণ s হয়, তাহা হইলে,

$v^2=u^2-2fs$ সূত্র ব্যবহার করিয়া

$0=60^2-2.2s \quad \therefore \quad 4s=60\times 60$; $s=900$ ফুট।

উদা. 12. একটি কণা সরলপথে সমত্বরণে চলিয়া পঞ্চম সেকেণ্ডে 25 ফুট এবং সপ্তম সেকেণ্ডে 33 ফুট পথ যায়। প্রারম্ভিক বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

$25=u+\frac{9}{2}f \cdots\cdots$(i) সূত্র t-5 সেকেণ্ডে সরণ $=u+\frac{1}{2}f(2t-1)$

$33=u+\frac{13}{2}f \cdots\cdots$(ii)

সমীকরণ (ii) হইতে (i) বিয়োগ করিয়া, $8=2f \quad \therefore \quad f=4$ ফু./সে.^{2}

প্রথম সমীকরণে f এর মান বসাইয়া,

$25=u+\frac{9}{2}\times 4 \quad \therefore \quad u=25-18=7$ ফু./সে.।

উদা. 13. 220 গজ পথ অতিক্রম করিয়া একটি রেলগাড়ীর বেগ ঘণ্টায় 15 মাইল হইতে ঘণ্টায় 60 মাইলে পরিবর্তিত হয়। গাড়ীর ত্বরণ নির্ণয় কর।

[C. U. 1951]

এখানে $u=$ ঘণ্টায় 15 মাইল $=$ সেকেণ্ডে 22 ফুট,

$v=$ ঘণ্টায় 60 মাইল $=$ সেকেণ্ডে 88 ফুট,

$s=220$ গজ $=220\times 3$ ফুট $=660$ ফুট,

$\frac{15\times 1760\times 3}{60\times 60}=22$

$v^2=u^2+2fs$ সূত্র হইতে, $88^2=22^2+2.f.600$

$$\therefore \quad f=\frac{88^2-22^2}{2\times 660}=\frac{(88+22)(88-22)}{2\times 660}=\frac{110\times 66}{2\times 660}=\frac{11}{2}=5\tfrac{1}{2} \text{ ফু./সে.}^2$$

রেলগাড়ীর ত্বরণ $5\frac{1}{2}$ ফু./সে.^{2}.

উদা. 14. দুইটি কণা একই সময়ে A বিন্দু হইতে যাত্রা করে এবং একই দিকে AB সরলরেখায় চলে। প্রথম কণা সেকেণ্ডে 40 ফুট সমবেগে চলে ; দ্বিতীয় কণার প্রারম্ভিক বেগ সেকেণ্ডে 16 ফুট এবং সমত্বরণ 6 ফু./সে.^{2}। কত সময় পরে দুই কণা আবার একত্র হইবে ? [C. U. 1955]

ধর, t সময় পরে কণা দুইটি একত্র হয়। তাহা হইলে $40t=16t+\frac{1}{2}\times 6t^2$

ইহা হইতে $3t^2-24t=0$; বা, $3t(t-8)=0$; $t=0$. বা, $t=8$,

$\therefore$ কণা দুইটি 8 সেকেণ্ড পরে একত্র হয়।

উদা. 15. একটি গুলি সেকেণ্ডে 1600 ফুট বেগে লক্ষ্যভেদ করে। এক ইঞ্চি প্রবেশ করিয়া ইহার বেগ অর্ধেক কমিয়া যায়। বেগ যদি সমভাবে কমে তাহা হইলে আর কতদূর গিয়া উহা থামিয়া যাইবে ? [C. U. 1954]

$u=1600$ ফু./সে., $v=80$ ফু./সে., $s=1$ ইঞ্চি$=\frac{1}{12}$ ফুট

$v^2=u^2-2fs$ সূত্র হইতে, $800^2=1600^2-2f.\frac{1}{12}$

$\therefore \frac{1}{6}f=1600^2-800^2=2400\times 800$

যদি গুলি আরও x ফুট যায়, তাহা হইলে

$$0=800^2-2fx=800^2-12\times 2400\times 800x$$

$$\therefore \quad x=\frac{800}{2400\times 12} \text{ ফুট}=\frac{1}{3} \text{ ইঞ্চি}$$

গুলিটি আরও $\frac{1}{3}$ ইঞ্চি গিয়া থামিয়া যায়।

[মন্তব্য :—9নং অঙ্ক হইতে বুঝা যাইবে প্রারম্ভিক বেগের মানের উপর ইহা নির্ভর করে না।]

উদা. 16. সমত্বরণ বিশিষ্ট একটি কণা সরলপথে একাদশ ও পঞ্চদশ সেকেণ্ডে যথাক্রমে 720 ফুট ও 960 ফুট পথ অতিক্রম করে। 20 সেকেণ্ডে উহা কত পথ যায় ? [C. U. 1937]

আমরা জানি t-তম সেকেণ্ডে সরণ$=u+\frac{1}{2}f(2t-1)$

$$720=u+\tfrac{21}{2}f\cdots\cdots(i) \qquad 960=u+\tfrac{29}{2}f\cdots\cdots(ii)$$

সমীকরণ (ii) হইতে (i) বিয়োগ করিয়া, $240=4f \quad \therefore \quad f=60$ ফু./সে.^{2}

এখন (i) হইতে, $720=u+\frac{21}{2}\times 60$, $u=720-630=90$ ফু./সে.

20 সেকেণ্ডে সরণ$=90\times 20+\frac{1}{2}\times 60\times 20^2$

$$=1800+30\times 400=13800 \text{ ফুট।}$$

উদা. 17. 160 গজ পথ অতিক্রম করিয়া একটি রেলগাড়ির বেগ ঘণ্টায় 30 মাইল হইতে ঘণ্টায় 10 মাইলে পরিণত হয়। ইহার বেগ যদি সমভাবে কমে তাহা হইলে স্থিরাবস্থায় আসিবার আগে ইহা আর কতদূর যাইবে ?

এখানে $u=30$ মা./ঘ. $=44$ ফু./সে. $v=10$ মা./ঘ. $=\frac{44}{3}$ ফু./সে.

$s=160$ গজ $=160\times3=480$ ফুট ; $v^2=u^2-2fs$ সূত্র হইতে,

$(\frac{44}{3})^2=44^2-2f\times480 \quad \therefore \quad 2f\times480=44^2-(\frac{44}{3})^2=44^2\times\frac{8}{9}$

যদি রেল গাড়ী স্থিরাবস্থায় আসিবার পূর্বে আরও x ফুট যায় তাহা হইলে,

$$0=(\tfrac{44}{3})^2-2fx=\left(\frac{44}{3}\right)^2-\left(\frac{44}{3}\right)^2\frac{8x}{480}$$

$\therefore \quad x=60$ ফুট $=20$ গজ।

উদা. 18. A স্টেশন হইতে B স্টেশনে যাইতে একটি রেলগাড়ির 50 সেকেণ্ড সময় লাগে ; B স্টেশন হইতে C স্টেশনে যাইতেও 50 সেকেণ্ড সময় লাগে। A হইতে B-র দূরত্ব $\frac{1}{2}$ মাইল এবং B হইতে C-র দূরত্ব $\frac{3}{4}$ মাইল। যদি ত্বরণ সমভাবে হইয়া থাকে তাহা হইলে ইহার মান কত এবং A ও C-তে বেগ ঘণ্টায় কত মাইল নির্ণয় কর।

ধর A-তে বেগ u ; $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র ব্যবহার করিয়া

$\frac{1}{2}\times1760\times3=u\times50+\frac{1}{2}f.50^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$(i)

$\frac{3}{4}\times1760\times3=(u+50f).50+\frac{1}{2}f.50^2=50u+\frac{3}{2}f.50^2 \quad \cdots$(ii)

(ii) হইতে (i) বিয়োগ করিয়া, $\frac{1}{4}\times1760\times3=f.50^2$.

$$f=\frac{1760\times3}{4\times50\times50}=\frac{66}{125} \text{ ফু./সে.}^2$$

সমীকরণ (i)-এ f-এর মান বসাইয়া,

$$50u=880\times3-\frac{33}{125}\times50\times50$$

$$\therefore \quad u=\frac{880\times3}{50}-\frac{33}{125}\times50=\frac{264}{5}-\frac{66}{5}=\frac{198}{5} \text{ ফু./সে.}$$

$$=\frac{198\times60\times60}{5\times3\times1760}=27 \text{ মাইল/ঘণ্টা।}$$

A হইতে C-র দূরত্ব $=\frac{1}{2}$ মাইল $+\frac{3}{4}$ মাইল $=\frac{5}{4}$ মাইল $=\frac{5}{4}\times1760\times3$ ফুট

A হইতে C-তে যাইবার সময় $=(50+50)$ সেকেণ্ড $=100$ সে.

এখন, $v=u+ft$ সূত্র ব্যবহার করিয়া, যেহেতু

$$100 \text{ সে. পরে বেগ}=\frac{198}{5}+\frac{66}{125}\times100=\frac{198+264}{5}=\frac{462}{5} \text{ ফু./সে.}$$

$$=\frac{462\times60\times60}{5\times3\times1760}=63 \text{ মাইল/ঘণ্টা।}$$

অর্থাৎ C স্টেশনে বেগ ঘণ্টায় 63 মাইল।

উদা. 19. একটি রেলগাড়ি ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে চলিতেছিল। স্টীম বন্ধ করিয়া ব্রেক কষার পর ইহা $1\frac{1}{2}$ মিনিটে থামিয়া যায়। যদি মন্দন সম হয় তাহা হইলে ইহার মান নির্ণয় কর এবং গাড়ি থামিবার পূর্বে ইহা কতদূর যায় ?

$u=$ ঘণ্টায় 30 মাইল $=44$ ফু./সে. $v=0$, $t=\frac{3}{2}$ মি. $=\frac{3}{2}\times 60=90$ সে.।

মনে কর, নির্ণেয় মন্দন $=f$; $v=u-ft$ সূত্র হইতে,

$0=44-f.90$; $\therefore$ $f=\frac{44}{90}=\frac{22}{45}$ ফু./সে^{2}.

থামিবার পূর্বে যদি রেলগাড়ী x দূরত্ব অতিক্রম করে, তবে

$v^2=u^2-2fs$ সূত্র ব্যবহার করিয়া

$$0=44^2-2.\tfrac{22}{45}.x ; \qquad \therefore \quad x=\frac{44\times 44\times 45}{44}=1980 \text{ ফুট।}$$

[দূরত্ব নিম্ন উপায়েও নির্ণীত হইতে পারে :—

নির্ণেয় দূরত্ব $=\frac{1}{2}(u+v)t=\frac{1}{2}(44+0)\times 90=22\times 90=1980$ ফুট।]

উদা. 20. একটি কণা সমত্বরণে 3 সেকেণ্ড চলে এবং এই সময়ে ইহা 810 সেণ্টিমিটার পথ অতিক্রম করে। তারপর ত্বরণ থামিয়া যায় এবং পরবর্তী 3 সেকেণ্ডে ইহা 720 ফুট পথ যায়। ইহার প্রারম্ভিক বেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় কর।

ধর, প্রারম্ভিক বেগ u এবং ত্বরণ f ; $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র ব্যবহার করিয়া

$$810=3u+\tfrac{1}{2}f.3^2 \;; \quad \text{বা,} \quad 270=u+\tfrac{3}{2}f \qquad \ldots \qquad \text{(i)}$$

আবার, $v=u+ft$ সূত্র ব্যবহার করিয়া

$$3 \text{ সেকেণ্ড পরে বেগ} =u+3f \qquad \ldots \qquad \text{(ii)}$$

এখন এই 3 সেকেণ্ড পরে ত্বরণ থামিয়া গেল এবং পরবর্তী 3 সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত পথ 720 সে.মি.

$$\therefore \quad 720=(u+3f).3 \quad \text{বা,} \quad 240=u+3f \qquad \ldots \qquad \text{(iii)}$$

(iii) হইতে (i) বিয়োগ করিয়া $\frac{3}{2}f=-30$ $\qquad \therefore$ $f=-20$ সে.মি./সে^{2}.

এখন (iii) সমীকরণে f-এর মান বসাইয়া

$$240=u-60 \quad \therefore \quad u=300 \text{ সেমি./সে.}$$

উদা. 21. একটি রেলগাড়ি স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া $2\frac{1}{2}$ মিনিট সময়ে ঘণ্টায় 48 মাইল বেগ অর্জন করে। এই সময়ে গাড়িটি কত মাইল যায় ?

এখানে $u=0$, $v=48$ মাইল/ঘণ্টা, $t=2\frac{1}{2}$ মি. $=\frac{5}{2\times 60}=\frac{1}{24}$ ঘ. ; $f=?$

$v=ft$ সূত্র ব্যবহার করিয়া, $48=f\times\frac{1}{24}$ $\quad\therefore$ $f=48\times 24$ মাইল/ঘণ্টা^{2}.

এখন $s=\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র ব্যবহার করিয়া, $s=\frac{1}{2}(48\times24)\times(\frac{1}{24})^2=1$ মাইল

$\therefore$ ঐ সময় গাড়ী 1 মাইল পথ অতিক্রম করে।

[দ্রষ্টব্য : এখানে ঘণ্টা এবং মাইলকে যথাক্রমে সময় ও দৈর্ঘ্যের একক লওয়া হইয়াছে।]

উদা. 22. একটি কণা সমত্বরণে চলিয়া তাহার গতির শেষ সেকেণ্ডে সমগ্র পথের $\frac{9}{25}$ অংশ যায়। যদি ইহা স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া থাকে তাহা হইলে ইহা কত সময় চলিয়াছিল? যদি প্রথম সেকেণ্ডে 6 ইঞ্চি পথ অতিক্রম করে তাহা হইলে ইহা কত পথ গিয়াছিল ?

ধর, ইহা t সময়ে সমগ্র পথ s অতিক্রম করে।

এখানে $u=0$; $\frac{1}{2}f(2t-1)=\frac{9}{25}\cdot\frac{1}{2}ft^2$;

$\therefore\ 9t^2=25(2t-1)$ [$\because\ f\neq0$]

বা, $9t^2-50t+25=0$; বা, $(t-5)(9t-5)=0$

$\therefore\ t=5$ বা $\frac{5}{9}$ সেকেণ্ড, কিন্তু t এক সেকেণ্ডের অধিক বলিয়া $t=5$ সেকেণ্ড।

6 ইঞ্চি বা $\frac{1}{2}$ ফুট প্রথম সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত পথ $\therefore\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2}f.1^2$; $\therefore\ f=1$

এখন $s=\frac{1}{2}ft^2=\frac{1}{2}.1.5^2=12\frac{1}{2}$ ফুট।

উদা. 23. একটি রেলগাড়ি ঘণ্টায় 45 মাইল বেগে চলিতেছে এবং ইহার ব্রেক 4 ফু./সে^{2}. সমমন্দন ঘটায়। স্টেশনের কতদূরে থাকিয়া ব্রেক কষিলে ইহা স্টেশনে আসিয়া থামিতে পারে? যদি ইহার অর্ধেক দূরত্বে ব্রেক কষা হয় তাহা হইলে কি বেগে গাড়ি স্টেশন পার হইয়া যায়? [U. P. 1944]

ধর, স্টেশন হইতে x দূরত্বে থাকিতে ব্রেক কষা হয়।

এখানে $u=45$ মা./ঘ. $=66$ ফু./সে. [$\because$ 30 মা./ঘ. $=44$ ফু./সে.]

$f=-4$ ফু./সে^{2} ; $v^2=u^2+2fs$ সূত্র ব্যবহার করিয়া

$0=66^2-2.\ 4.\ x$; $\therefore\ x=\frac{66\times66}{8}=\frac{1089}{2}=544\frac{1}{2}$ ফুট।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, ধর, v বেগে গাড়ী স্টেশন অতিক্রম করে, তাহা হইলে

$$v^2=66^2-2.4.\ \frac{1089}{4}=2\times1089 \quad \therefore\ v=33\sqrt{2} \text{ ফু./সে.}$$

উদা. 24. একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করে এবং সমত্বরণ 18 ফুট/সে^{2}. লইয়া চলে। ইহা প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় ফুট যথাক্রমে কি সময়ে অতিক্রম করে?

ধর, 1 ফুট, 2 ফুট, 3 ফুট অতিক্রম করিবার সময় যথাক্রমে t_1, t_2 ও t_3.

এখানে $u=0$, $s=\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র ব্যবহার করিয়া

$1=9t_1^2 \qquad \therefore \quad t_1=\frac{1}{3}$ সেকেণ্ড

$2=9t_2^2 \qquad \therefore \quad t_2=\frac{\sqrt{2}}{3}$ সেকেণ্ড

$3=9t_3^2 \qquad \therefore \quad t_3=\frac{\sqrt{3}}{3}$ সেকেণ্ড

$\therefore$ প্রথম ফুট অতিক্রম করিবার সময় $=\frac{1}{3}$ সেকেণ্ড

দ্বিতীয় ফুট অতিক্রম করিবার সময় $=\frac{\sqrt{2}-1}{3}$ সেকেণ্ড

এবং তৃতীয় ফুট অতিক্রম করিবার সময় $=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}$ সেকেণ্ড।

উদা. 25. একটি বস্তু এক সরলরেখা ধরিয়া চলিয়া কোনও এক সেকেণ্ডে 10 ফুট পথ যায় এবং পরবর্তী 4 সেকেণ্ডে 60 ফুট যায়। ত্বরণ সম হইলে ইহার মান নির্ণয় কর। [U. P. '58]

আমরা প্রথম সেকেণ্ডে 10 ফুট অতিক্রম করা হইয়াছে ধরিতে পারি। তাহা হইলে 5 সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত পথ $10+60=70$ ফুট

$s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র ব্যবহার করিয়া,

$10=u.1+\frac{1}{2}f.1^2$; বা, $10=u+\frac{f}{2}$. ... (i)

$70=u.5+\frac{1}{2}f.5^2$; বা, $14=u+\frac{5}{2}f$. ... (ii)

(ii) হইতে (i) বিয়োগ করিয়া $4=2f$; $\therefore \quad f=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় ত্বরণ $=2$ ফু./সে^{2}.

✓**উদা. 26.** একটি মোটর গাড়ীর 220 গজ পথ অতিক্রম করিতে 15 সেকেণ্ড সময় লাগে, পরবর্তী 220 গজ যাইতে 10 সেকেণ্ড লাগে। ত্বরণ সম হইলে উহার মান নির্ণয় কর। এই গতির পর বেগ নির্ণয় কর। [U. P. '41]

ধর, প্রারম্ভিক বেগ u এবং ত্বরণ f.

220 গজ $=660$ ফুট; মোটর গাড়ী 15 সেকেণ্ডে 660 ফুট যায় এবং $(15+10)$ সেকেণ্ডে $(660+660)=1320$ ফুট যায়।

$\therefore \quad 660=15u+\frac{1}{2}f.15^2$. বা, $44=u+\frac{15}{2}f$ ...(i)

$1320=25u+\frac{1}{2}f.25^2$. বা, $264=5u+\frac{125}{2}f$. ...(ii)

(i) সমীকরণকে 5 দিয়া গুণ করিলে, $220=5u+\frac{75}{2}f$

(ii) হইতে বিয়োগ করিয়া, $25f=44 \quad \therefore f=\frac{44}{25}$ ফু./সে^{2}. এবং $u=\frac{154}{5}$ ফু./সে.

25 সেকেণ্ড পরে বেগ $=\frac{154}{5}+\frac{44}{25}\times 25=\frac{374}{5}$ ফু./সে.

উদা. 27. পর পর দুই সেকেণ্ডে একটি কণা $20\frac{1}{2}$ এবং $23\frac{1}{2}$ ফুট পথ যায় ; যদি ইহা সমত্বরণে চলিয়া থাকে তাহা হইলে প্রথম সেকেণ্ডের প্রারম্ভে ইহার বেগ নির্ণয় কর ; ইহার ত্বরণ কত ? স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া প্রথম সেকেণ্ড আরম্ভ হইবার পূর্বে ইহা কত পথ আসিয়াছিল ?

মনে কর প্রথম সেকেণ্ডের প্রারম্ভে বেগ u.

t-তম সেকেণ্ডে সরণ $=u+\frac{1}{2}f(2t-1)$ এই সূত্র ব্যবহার করিয়া

$$20\tfrac{1}{2}=\text{প্রথম সেকেণ্ডে সরণ}=u+\tfrac{1}{2}f \qquad \cdots\text{(i)}$$

$$23\tfrac{1}{2}=\text{দ্বিতীয় সেকেণ্ডে সরণ}=u+\tfrac{3}{2}f \qquad \cdots\text{(ii)}$$

এই দুই সমীকরণ সমাধান করিয়া $f=3$ এবং $u=19$.

$\therefore$ প্রথম সেকেণ্ডের প্রারম্ভে বেগ $=19$ ফু./সে.

স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া 19 ফু./সে. বেগ অর্জন করিবার পূর্বে s সরণ হইলে, $v^2=2fs$ সূত্র হইতে

$$19^2=2\times3s \quad \therefore \quad s=\frac{19^2}{6}=60\tfrac{1}{6} \text{ ফুট।}$$

✓ **উদা. 28.** একটি কণা প্রারম্ভিক বেগ u লইয়া যাত্রা করে এবং প্রদত্ত পথের প্রথমার্ধ ও শেষার্ধ যথাক্রমে f_1 এবং f_2 ত্বরণে অতিক্রম করে। দেখাও যে অন্তিম বেগ $\frac{1}{2}(f_1+f_2)$ সমত্বরণে সমস্ত পথ অতিক্রম করিলে যাহা হয় তাহারই সমান।

মনে কর, প্রথমার্ধ পথ অতিক্রম করার পর বেগ v_1 ও শেষার্ধ অতিক্রম করার পর বেগ v_2 এবং প্রদত্ত পথ s. তাহা হইলে,

$$v_1^2=u^2+2f_1(\tfrac{1}{2}s) \qquad \cdots\cdots \qquad \text{(i)}$$

$$\text{এবং } v_2^2=v_1^2+2f_2(\tfrac{1}{2}s)=u^2+2f_1(\tfrac{1}{2}s)+2f_2(\tfrac{1}{2}s)$$
$$=u^2+(f_1+f_2)s \qquad \cdots \qquad \text{(ii)}$$

এখন $\frac{1}{2}(f_1+f_2)$ সমত্বরণে সমস্ত পথ অতিক্রম করিলে যদি অন্তিম বেগ v হয়, তাহা হইলে, $v^2=u^2+2.\frac{1}{2}(f_1+f_2)s=u^2+(f_1+f_2)s \qquad \cdots \qquad \text{(iii)}$

$$\therefore \quad v_2=v.$$

উদা. 29. কোনও কণা সমত্বরণে চলিলে, প্রমাণ কর যে পর্যায়-ক্রমিক সেকেণ্ড সমূহে অতিক্রান্ত দূরত্বসমূহ সমান্তর শ্রেণীতে থাকে ; এই সমান্তর শ্রেণীর সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

t-তম সেকেণ্ডে সরণ $=u+\frac{1}{2}(2t-1)$

t-এর মান $1, 2, 3, 4, \cdots$ বসাইয়া প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ সেকেণ্ডে সরণ যথাক্রমে $\quad u+\frac{1}{2}f,\ u+\frac{3}{2}f,\ u+\frac{5}{2}f,\ u+\frac{7}{2}f, \cdots$

স্পষ্টতঃ ইহারা সমান্তর শ্রেণীতে আছে এবং ইহার সাধারণ অন্তর $=f$.

উদা. 30. একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করে এবং t_1 সময়ের জন্য সমত্বরণে চলে। তারপর ত্বরণ থামিয়া যায় এবং ইহা সমবেগে t_2 সময় চলিয়া a দূরত্ব অতিক্রম করে। ইহার পর ইহা সমমন্দনে চলে এবং t_3 সময় পরে থামিয়া যায়। প্রমাণ কর যে সমস্ত অতিক্রান্ত দূরত্ব $=a\left(1+\frac{t_1+t_3}{2t_2}\right)$.

মনে কর, স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া f সমত্বরণে সরণ s_1 এবং অর্জিত বেগ v তাহা হইলে

$$s_1=\tfrac{1}{2}ft_1{}^2, \quad v=ft_1, \quad a=vt_2=ft_1t_2$$

$$\therefore \quad f=\frac{a}{t_1t_2} \qquad \therefore \quad v=\frac{a}{t_1t_2}\times t_1=\frac{a}{t_2} \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

$$s_1=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{a}{t_1t_2}t_1{}^2=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{at_1}{t_2} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \text{(ii)}$$

যদি সম-মন্দন f' হয় এবং s_2 সরণ হয়, তাহা হইলে

$$0=v-f't_3=\frac{a}{t_2}-f't_3 \quad \therefore \quad f'=\frac{a}{t_2t_3} \qquad \cdots \qquad \text{(iii)}$$

যেহেতু s_2 সরণের পর বেগ শূন্য হয়

$$\therefore \quad 0=v^2-2f's_2=\frac{a^2}{t_2^2}-2.\frac{a}{t_2t_3}s_2 \quad \therefore \quad s_2=\frac{at_3}{2t_2} \qquad \cdots \qquad \text{(iv)}$$

সমগ্র সরণ $=s_1+a+s_2=\frac{1}{2}.\frac{at_1}{t_2}+a+\frac{1}{2}.\frac{at_3}{t_2}=a\left(1+\frac{t_1+t_3}{2t_2}\right)$.

উদা. 31. একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া এক সরলরেখায় চলে। ইহা a সমত্বরণে যায়, পরে ইহা b সমমন্দনে যায়। প্রথম হইতে আরম্ভ করিয়া t সময়ে s পথ চলিবার পর ইহা স্থিরাবস্থায় আসে,

প্রমাণ কর যে $t^2=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)s$. [C. U. 1945]

মনে কর, a সমত্বরণে t_1 সময়ে s_1 পথ এবং সমমন্দন t_2 সময়ে s_2 পথ যাইয়া স্থিরাবস্থায় আসে।

$$\therefore \quad t_1+t_2=t \text{ এবং } s_1+s_2=s.$$

$$at_1=v=bt_2\ ; \quad \therefore \quad \frac{t_1}{b}=\frac{t_2}{a}=\frac{t}{a+b}$$

$$s_1=\tfrac{1}{2}at_1{}^2=\tfrac{1}{2}a\frac{b^2t^2}{(a+b)^2}$$

$$s_2=\tfrac{1}{2}bt_2{}^2=\tfrac{1}{2}b\,\frac{t^2a^2}{(a+b)^2} \left[\ 0=v_1{}^2-2bs_2, \ \therefore \ s_2=\frac{b^2t_2{}^2}{2b}\right]$$

$$s=s_1+s_2=\tfrac{1}{2}\frac{t^2ab}{(a+b)^2}(a+b)=\tfrac{1}{2}\frac{ab}{(a+b)}t^2$$

$$\therefore\quad t^2=2s\left(\frac{a+b}{ab}\right)=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)s.$$

✓উদা. 32. যদি একটি কণা p, q এবং r-তম সেকেণ্ডে যথাক্রমে a, b এবং c পথ অতিক্রম করে, প্রমাণ কর যে, $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$.

প্রারম্ভিক বেগ u এবং ত্বরণ f হইলে, tতম সেকেণ্ড সরণ $=u+\frac{1}{2}f(2n-1)$ সূত্র হইতে,

$$a=u+\tfrac{1}{2}f(2p-1);\quad b=u+\tfrac{1}{2}f(2q-1);\quad c=u+\tfrac{1}{2}(2r-1)$$

$$a(q-r)=u(q-r)+\tfrac{1}{2}f(q-r)(2p-1)$$

$$b(r-p)=u(r-p)+\tfrac{1}{2}f(r-p)(2q-1)$$

$$c(p-q)=u(p-q)+\tfrac{1}{2}f(p-q)(2r-1)$$

$$\therefore\quad a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)$$

$$=0+f\{p(q-r)+q(r-p)+r(p-q)\}-\tfrac{1}{2}f\times 0=0.$$

✓উদা 33. একটি কণা f সমত্বরণে চলিয়া t সময়ে s দূরত্ব এবং পরবর্তী t' সময়ে s' দূরত্ব অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে, $f=2\left(\frac{s'}{t'}-\frac{s}{t}\right)\Big/\left(t+t'\right)$ [C. U. 1948]

$$s=ut+\tfrac{1}{2}ft^2\quad\therefore\quad\frac{s}{t}=u+\tfrac{1}{2}ft$$

$$s'=(u+ft)t'+\tfrac{1}{2}ft'^2\quad\therefore\quad\frac{s'}{t'}=u+ft+\tfrac{1}{2}ft'$$

এখন $\frac{s'}{t'}-\frac{s}{t}=\frac{1}{2}f(t+t')\quad\therefore\quad f=2\left(\frac{s'}{t'}-\frac{s}{t}\right)\Big/\left(t+t'\right).$

✓উদা. 34. একটি রেলগাড়ি s ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি স্টেশনের মধ্যে চলিতেছে। প্রথম ভাগে তাহার বেগ f_1 সমত্বরণে শূন্য হইতে v তে পরিণত হয়, তারপর ইহা কতকক্ষণ ধরিয়া সমবেগে চলে এবং পরিশেষে f_2 সমমন্দনে বেগ শূন্যে পরিণত হয়। প্রমাণ কর যে সমগ্র সময় $=\frac{s}{v}+\frac{1}{2}v\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)$ [Roorkee. '55]

ধর, t_1, t এবং t_2 সময়ে সরণ, যথাক্রমে s_1, x এবং s_2

$v=f_1t_1$, $s_1=\frac{1}{2}f_1t_1{}^2=\frac{1}{2}vt_1$ $\quad v^2=2f_1s_1\quad x=vt$

$0=v-f_2t_2$ অর্থাৎ $v=f_2t_2$, $s_2=\frac{1}{2}f_2t_2{}^2=\frac{1}{2}vt_2$, $v^2=2f_2s_2$

$$\therefore \quad \text{সমগ্র সময়} = t_1 + t + t_2 = \frac{2s_1}{v} + \frac{x}{v} + \frac{2s_2}{v}$$

$$= \frac{s_1 + x + s_2}{v} + \left(\frac{s_1}{v} + \frac{s_2}{v}\right) = \frac{s}{v} + \left(\frac{v^2}{2f_1 v} + \frac{v^2}{2f_2 v}\right)$$

$$= \frac{s}{v} + \tfrac{1}{2}v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right).$$

✓ **উদা. 35.** একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া সমত্বরণ f লইয়া চলে ; অতঃপর ইহা সমবেগে চলে এবং পরিশেষে সমমন্দন fএর দ্বারা স্থিরাবস্থায় আসে। যদি সমগ্র দূরত্ব s হয় এবং সমগ্র সময় t হয় দেখাও যে যত সময় ইহা সমবেগে চলে তাহার মান $\left(t^2 - \frac{4s}{f}\right)^{\frac{1}{2}}$.

ধর a, b, c তিন অবস্থার সরণ এবং t_1, t_2, t_3 সময়

t_1 সময় সমত্বরণ f লইয়া চলিবার পর

$v = ft_1$ আবার $0 = v - ft_3$, বা, $v = ft_3$; $\therefore \; t_1 = t_3$.

এখন $s = a + b + c = \frac{1}{2}ft_1^2 + vt_2 + \frac{1}{2}ft_3^2$

$= ft_1^2 + ft_1t_2 = ft_1(t_1 + t_2) \quad \cdots$ (i) [যেহেতু $t_1 = t_3$.]

$t = t_1 + t_2 + t_3 = 2t_1 + t_2 \qquad \therefore \; t_1 = \dfrac{t - t_2}{2} \qquad \cdots$ (ii)

(i) এবং (ii) হইতে $s = f.\dfrac{t - t_2}{2} \cdot \left(\dfrac{t - t_2}{2} + t_2\right)$

বা; $4s = f(t - t_2)(t + t_2)$ বা, $t^2 - t_2^2 = \dfrac{4s}{f}$

বা, $t_2 = \left(t^2 - \dfrac{4s}{f}\right)^{\frac{1}{2}}$.

✓ **উদা. 36.** দুইটি বিন্দু একই সময়ে একই বিন্দু হইতে যাত্রা করিয়া একই সরলরেখায় ভ্রমণ করে ; প্রথম কণা সমবেগ u লইয়া এবং দ্বিতীয় কণা সমত্বরণ f লইয়া চলে। দেখাও যে দ্বিতীয় কণা প্রথম কণাকে ধরিবার পূর্বে যে সময় অতিবাহিত হয় তন্মধ্যে কণা দুইটির বৃহত্তম ব্যবধান $\dfrac{u^2}{2f}$ এবং যাত্রার $\dfrac{u}{f}$ সময় পরে ইহা ঘটে।

যাত্রার t সময় পরে উভয়ের মধ্যে বৃহত্তম দূরত্ব x হইলে

যেহেতু যাত্রাস্থল হইতে প্রথম কণা ut দূরে এবং দ্বিতীয় কণা $\frac{1}{2}ft^2$ দূরে

$$\therefore \quad x = ut - \tfrac{1}{2}ft^2 \quad = -\tfrac{1}{2}f\left(t^2 - 2\frac{u}{f}t\right) = \frac{u^2}{2f} - \tfrac{1}{2}f\left(t - \frac{u}{f}\right)^2$$

যেহেতু $\left(t-\frac{u}{f}\right)^2$ এই বর্গরাশি ঋণাত্মক হইতে পারে না ইহার নিম্নতম মান যখন শূন্য তখন x বৃহত্তম।

$\therefore$ বৃহত্তম দূরত্ব $\frac{u^2}{2f}$ এবং যাত্রার $\frac{u}{f}$ সময় পরে ইহা বৃহত্তম।

✓**উদা. 37.** দুইটি কণা একই সরলরেখায় f এবং f' সমত্বরণ লইয়া চলে। যদি কোনও সময়ে যখন তাহারা সরলরেখাস্থ এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে a এবং a' দূরে থাকে তখন তাহাদের বেগ u এবং u' হয়। প্রমাণ কর যে তাহারা পরস্পরকে দুইবারের বেশি অতিক্রম করিতে পারে না এবং যদি তাহারা দুইবার এইরূপ করে তাহা হইলে এই দুই সময়ের মধ্যে ব্যবধান $\frac{2}{f-f'}\ [(u-u')^2-2(a-a')(f-f')]^{\frac{1}{2}}$

মনে কর, যাত্রার t সময় পরে স্থির বিন্দু হইতে x দূরত্বে একটি কণা অপরকে অতিক্রম করে, তাহা হইলে

$x-a=ut+\frac{1}{2}ft^2\cdots$(i) এবং $x-a'=u't+\frac{1}{2}f't^2\cdots$(ii)

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া

$$a'-a=(u-u')t+\tfrac{1}{2}(f-f')t^2$$

বা, $\frac{1}{2}(f-f')t^2+(u-u')t+(a-a')=0$

এই দ্বিঘাত সমীকরণে t-এর মান দুইটির বেশি হইতে পারে না, অতএব ইহারা দুইবারের অধিক একে অন্যকে অতিক্রম করিতে পারে না।

ধর, এই সমীকরণের দুইটি মূল t_1 এবং t_2, তাহা হইলে

$$t_1+t_2=-\frac{2(u-u')}{f-f'},\ t_1t_2=\frac{2(a-a')}{f-f'}$$

এই দুইবার অতিক্রম করার সময়ের অন্তর $=t_2-t_1=\{(t_2+t_1)^2-4t_2t_1\}^{\frac{1}{2}}$

$$=\frac{2}{f-f'}\{(u-u')^2-2(a-a')(f-f')\}^{\frac{1}{2}}$$

✓**উদা. 38.** যদি সমত্বরণে চলিয়া একটি কণা পর্যায়ক্রমে t_1, t_2, t_3 সময়ে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে তাহা হইলে $\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}=\frac{3}{t_1+t_2+t_3}$.

ধর, প্রত্যেক সমান দূরত্ব x এবং প্রথম x দূরত্ব যাইবার প্রারম্ভিক বেগ u.

$x=ut_1+\frac{1}{2}ft_1{}^2\cdots\cdots$(i) ; t_1 সময় পরে বেগ $u+ft_1$

দ্বিতীয় x অতিক্রম করিবার প্রারম্ভিক বেগ $u+ft_1$

$\therefore\quad x=(u+ft_1)t_2+\frac{1}{2}ft_2{}^2=ut_2+\frac{1}{2}f(t_2+2t_1)t_2\cdots\cdots$(ii)

তৃতীয় x অতিক্রম করিবার প্রারম্ভিক বেগ $u+f(t_1+t_2)$

$\therefore\quad x=\{u+f(t_1+t_2)\}t_3+\frac{1}{2}ft_3{}^2=ut_3+\frac{1}{2}f(t_3+2t_2+2t_1)t_3 \cdots$ (iii)

যোগ করিয়া, $3x=u(t_1+t_2+t_3)+\frac{1}{2}f(t_1+t_2+t_3)^2$

$$\therefore\quad \frac{3x}{t_1+t_2+t_3}=u+\frac{1}{2}f(t_1+t_2+t_3) \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

আবার, $\dfrac{x}{t_1}=u+\frac{1}{2}ft_1$; $\dfrac{x}{t_2}=u+\frac{1}{2}f(t_2+2t_1)$

$$\frac{x}{t_3}=u+\frac{1}{2}f(t_3+2t_2+2t_1)$$

$$\therefore\quad \frac{x}{t_1}-\frac{x}{t_2}+\frac{x}{t_3}=u+\frac{1}{2}f(t_1+t_2+t_3) \quad \cdots \quad \cdots \text{(v)}$$

(iv) ও (v) হইতে, $\dfrac{1}{t_1}-\dfrac{1}{t_2}+\dfrac{1}{t_3}=\dfrac{3}{t_1+t_2+t_3}$.

উদা. 39. একটি দৌড় প্রতিযোগিতায়, দুইটি গাড়ী একই সময়ে u_1 এবং u_2 বেগে যাত্রা করে এবং সমান্তরাল সরলরেখায় যথাক্রমে f_1 এবং f_2 সমত্বরণে চলে। যদি তাহারা গন্তব্যস্থলে একই সময়ে পৌঁছে, দেখাও যে অতিক্রান্তপথ

$$\frac{2(u_1-u_2)(u_1f_2-u_2f_1)}{(f_1-f_2)^2}.$$

ধর, গন্তব্যস্থল যাত্রাস্থল হইতে d দূরে এবং t সময় পরে তাহারা পৌঁছে।

$d=u_1t+\frac{1}{2}f_1t^2$ এবং $d=u_2t+\frac{1}{2}f_2t^2$; $u_1t+\frac{1}{2}f_1t^2=u_2t+\frac{1}{2}f_2t^2$;

$(u_1-u_2)t+\frac{1}{2}(f_1-f_2)t^2=0$

$$\therefore\quad t=-\frac{2(u_1-u_2)}{f_1-f_2} \qquad [\because\ t\neq 0]$$

$$\therefore\quad d=-2u_1\frac{(u_1-u_2)}{f_1-f_2}+\tfrac{1}{2}f_1.\frac{4(u_1-u_2)^2}{(f_1-f_2)^2}$$

$$=\frac{2(u_1-u_2)(u_1f_1-u_2f_1-u_1f_1+u_1f_2)}{(f_1-f_2)^2}$$

$$=\frac{2(u_1-u_2)(u_1f_2-u_2f_1)}{(f_1-f_2)^2}$$

উদা. 40. একজন পাহারাওয়ালা x ফুট দূরে এক চোর দেখিয়া তাহাকে ধরিবার জন্য u বেগে যাত্রা করিয়া α ত্বরণে ছুটে ; চোর স্থিরাবস্থা হইতে β ত্বরণে দৌড়ায়। প্রমাণ কর যে যদি $\alpha\geqslant\beta$ অথবা $\alpha<\beta<\alpha+\dfrac{u^2}{2x}$, তাহা হইলে পাহারাওয়ালা চোরকে ধরিতে পারিবে।

মনে কর, পাহারাওয়ালা চোরকে যাত্রার t সময় পরে s দূরত্বে গিয়া ধরে। তাহা হইলে, $s=ut+\frac{1}{2}\alpha t^2$ এবং $s-x=\frac{1}{2}\beta t^2$

$\therefore \quad x=ut+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)t^2$; বা, $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)t^2+ut-x=0$

$$\therefore \quad t=\frac{-u\pm\sqrt{u^2+2(\alpha-\beta)x}}{\alpha-\beta}$$

$u^2+2x(\alpha-\beta)\geqslant 0$ যেহেতু x ধনাত্মক $\therefore \alpha\geqslant\beta$.

কিন্তু যদি $\alpha<\beta$ হয়, $u^2>2x(\beta-\alpha)$ অথবা $\frac{u^2}{2x}+\alpha>\beta$

তাহা হইলে $\alpha<\beta<\frac{u^2}{2x}+\alpha$

[**দ্রষ্টব্য :** প্রথম ক্ষেত্রে t-এর একটি মান ধনাত্মক ; দ্বিতীয় ক্ষেত্রে t-এর উভয় মান ধনাত্মক, ইহাদের মধ্যে যে মান ছোট তাহাই ধরিবার সময়।]

উদা. 41. একটি কণা সমত্বরণে এক সরলরেখা ধরিয়া চলে। যদি t_1, t_2, t_3 সময়ে সরলরেখাস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কণার দূরত্ব x_1, x_2, x_3 হয়, প্রমাণ কর যে ত্বরণ$=2\left\{\frac{(x_2-x_3)t_1+(x_3-x_1)t_2+(x_1-x_2)t_3}{(t_2-t_3)(t_3-t_1)(t_1-t_2)}\right\}$ [U. P. 1946]

ধর, স্থিরবিন্দুতে বেগ u এবং কণার সমত্বরণ f.

তাহা হইলে $x_1=ut_1+\frac{1}{2}ft_1^2$, $x_2=ut_2+\frac{1}{2}ft_2^2$ এবং $x_3=ut_3+\frac{1}{2}ft_3^2$.

$$x_1-x_2=u(t_1-t_2)+\tfrac{1}{2}f(t_1^2-t_2^2) \quad \cdots \quad \text{(i)}$$
$$x_2-x_3=u(t_2-t_3)+\tfrac{1}{2}f(t_2^2-t_3^2) \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$
$$x_3-x_1=u(t_3-t_1)+\tfrac{1}{2}f(t_3^2-t_1^2) \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

(i), (ii) এবং (iii)-কে যথাক্রমে t_3, t_1 এবং t_2 দিয়া গুণ করিয়া যোগ করিলে,

$$(x_1-x_2)t_3+(x_2-x_3)t_1+(x_3-x_1)t_2$$
$$=u\{t_3(t_1-t_2)+t_1(t_2-t_3)+t_2(t_3-t_1)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}f\{t_3(t_1^2-t_2^2)+t_1(t_2^2-t_3^2)+t_2(t_3^2-t_1^2)\}$$
$$=u\times 0+\tfrac{1}{2}f(t_1-t_2)(t_2-t_3)(t_3-t_1)^*$$

$$\therefore \quad f=2\left\{\frac{(x_2-x_3)t_1+(x_3-x_1)t_2+(x_1-x_2)t_3}{(t_2-t_3)(t_3-t_1)(t_1-t_2)}\right\}$$

[* বীজগণিতের সূত্র : $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$
$=(b-c)(c-a)(a-b)$]

উদা. 42. একটি কণা এক সরলরেখায় সমত্বরণে চলিয়া পর্যায়ক্রমে তিনটি বিন্দু A, B এবং C-র ভিতর দিয়া যায়। A হইতে B তে যাইবার সময় t_1 এবং B হইতে

C যাইতে t_2 সময় লাগে ; AB$=a$, BC$=b$. প্রমাণ কর যে কণাটির ত্বরণ $\dfrac{2(bt_1-at_2)}{t_1t_2(t_1+t_2)}$. [H. S. 1960]

ধর, A বিন্দুতে বেগ u তাহা হইলে

$$a=ut_1+\tfrac{1}{2}ft_1{}^2 \quad \cdots \quad \cdots \text{(i)}$$
$$b=(u+ft_1)t_2+\tfrac{1}{2}ft_2{}^2 \quad \cdots \quad \cdots \text{(ii)}$$

(i) হইতে, $at_2=ut_1t_2+\frac{1}{2}ft_1{}^2t_2$

(ii) হইতে, $bt_1=(u+ft_1)t_2t_1+\frac{1}{2}ft_2{}^2t_1$

বিয়োগ করিয়া, $bt_1-at_2=\frac{1}{2}ft_1{}^2t_2+\frac{1}{2}ft_1t_2{}^2=\frac{1}{2}ft_1t_2(t_1+t_2)$

$$\therefore \quad f=\frac{2(bt_1-at_2)}{t_1t_2(t_1+t_2)}.$$

উদা. 43. খনিতে একটি খাঁচা অবতরণের প্রথম অংশ f সমত্বরণে এবং অবশিষ্ট অংশ $2f$ সমমন্দনে চলে। যদি h খনির গভীরতা এবং t অবতরণ কাল হয়, প্রমাণ কর $h=\frac{1}{3}ft^2$.

মনে কর, খাঁচা f সমত্বরণে h_1 দূরত্ব t_1 সময়ে নামে এবং $2f$ সমমন্দনে h_2 দূরত্ব t_2 সময়ে নামে ; যদি t_1 সময় পরে বেগ v হয় তাহা হইলে

$v=ft_1=2ft_2$ $\qquad \therefore \quad t_1=2t_2$

এবং $t=t_1+t_2=3t_2$ $\qquad \therefore \quad t_2=\frac{1}{3}t$ এবং $t_1=\frac{2}{3}t$

আবার $h_1=\frac{1}{2}ft_1{}^2$ $\qquad$ এবং $h_2=vt_2-\frac{1}{2}(2f)t_2{}^2$

$$=2ft_2{}^2-ft_2{}^2=ft_2{}^2$$

$$\therefore \quad h=h_1+h_2=f(\tfrac{1}{2}t_1{}^2+t_2{}^2).$$
$$=f(\tfrac{1}{2}\times\tfrac{4}{9}t^2+\tfrac{1}{9}t^2)=f.\tfrac{3}{9}t^2=\tfrac{1}{3}ft^2.$$

প্রশ্নমালা—III

1. একটি কণা সেকেণ্ডে 100 সেমি. বেগে যাত্রা করে। ইহা -2 সেমি./সে.^{2} সমমন্দনে চলিলে কতদূর গিয়া এবং কত সময় পরে স্থিরাবস্থায় আসিবে ?

2. একটি কণা সমত্বরণে চলিতেছে। যাত্রার পর পঞ্চম সেকেণ্ডে এবং সপ্তম সেকেণ্ডে ইহা যথাক্রমে 250 সেমি. এবং 330 সেমি. পথ অতিক্রম করে, ইহার প্রারম্ভিক বেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় কর।

3. একটি কণা সমত্বরণে চলিয়া যাত্রা করার পর চতুর্থ সেকেণ্ডে 19 ফুট এবং ষষ্ঠ সেকেণ্ডে 27 ফুট পথ অতিক্রম করে। দশম সেকেণ্ডে ইহা কত পথ অতিক্রম করে ?

4. একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণে যাত্রা করে এবং দশম সেকেণ্ডে 133 ফুট পথ যায়। ত্বরণ নির্ণয় কর।

5. একটি রেলগাড়ির বেগ 150 গজ পথ যাইতে ঘণ্টায় 40 মাইল হইতে ঘণ্টায় 10 মাইলে পরিণত হয়। মন্দন সম হইলে স্থিরাবস্থায় আসিবার পূর্বে ইহা আর কতদূর যাইবে ?

6. একটি বল নততলের নিম্নদিকে সমত্বরণে অগ্রসর হইয়া মাটিতে সমান দূরত্বের তিনটি খুঁটিকে অতিক্রম করিল। যদি খুঁটি তিনটিতে বেগ যথাক্রমে x, y ও z হয়, তবে প্রমাণ কর x^2, y^2 ও z^2 A. P.-তে আছে।

7. একটি বিন্দু প্রারম্ভিক বেগ ও সমত্বরণে এক রেখায় চলিয়া t-তম সেকেণ্ডে x ফুট এবং $(t+n)$-তম সেকেণ্ডে y-ফুট অতিক্রম করে। দেখাও যে ত্বরণ$=\dfrac{y-x}{n}$ ফুট/সেকেণ্ড^2. [H. S. 1960]

8. একটি বন্দুকের গুলি একটি চাঁদমারির (Target) 3 ইঞ্চি ভেদ করিবার পর উহার বেগ পূর্বের বেগের অর্ধেক হয়, তাহা হইলে ইহা আর কতটা ভেদ করিতে পারিবে ? [C. U. 1943]

9. একটি বিন্দু একটি সরলরেখায় সমত্বরণে ভ্রমণ করিয়া যথাক্রমে A, B, C বিন্দু দিয়া যায়। A হইতে B-তে যাইতে t_1 এবং B হইতে C-তে যাইতে t_2 সময় লাগে। AB$=a$ এবং BC$=b$ হইলে, প্রমাণ কর যে, বিন্দুটির ত্বরণ $=\dfrac{2(bt_1-at_2)}{t_1t_2(t_1+t_2)}$। [H. S. 1960]

10. একাট বস্তুকণা প্রাথমিক বেগ লইয়া সমত্বরণে 3 সেকেণ্ড সময়ে 81 ফুট পথ অতিক্রম করিল। ইহার পর ত্বরণ অপসারণ করা হইলে পরবর্তী 3 সেকেণ্ড সময়ে 72 ফুট পথ অতিক্রম করিলে বস্তুকণার প্রাথমিক বেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় কর।

11. সরলরেখায় সমত্বরণে চলিয়া একটি বিন্দু 8 সেকেণ্ডে 112 ফুট এবং পরবর্তী 6 সেকেণ্ডে 126 ফুট পথ অতিক্রম করে। ইহার ত্বরণ এবং পরবর্তী 162 ফুট অতিক্রম করিবার সময় নির্ণয় কর। [H. S. 1961]

12. একটি কণা একটি পথ অতিক্রমকালে প্রথমার্ধ ও শেষার্ধ যথাক্রমে f এবং f' ত্বরণ লইয়া অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে সমস্ত পথ $\frac{1}{2}(f+f')$ ত্বরণ লইয়া অতিক্রম করিলেও উভয়ক্ষেত্রে একই অন্তিম বেগ হয়।

13. একটি রেলগাড়ি A স্টেশন হইতে c দূরত্বে B স্টেশনে পৌঁছিবার জন্য স্থিরাবস্থা হইতে রওনা হইল। প্রথম t সময় সমত্বরণে, পরবর্তী t সময় সমবেগে এবং পরে বেগ সমভাবে মন্দীভূত হইয়া t' সময়ে B-তে আসিয়া থামিল। প্রথম অবস্থার ত্বরণ বাহির কর। [H. S. 1961]

14. বোম্বাই মেল হাওড়া স্টেশন হইতে রওনা হইয়া বর্ধমান স্টেশনে প্রথমে

থামিল। প্রথমে সমহারে বেগ বর্ধিত করিয়া সর্বোচ্চ বেগ V হইল এবং সমহারে বেগ হ্রাস করিয়া থামিল। যদি স্টেশন দুইটির মধ্যে দূরত্ব x হয়, তাহা হইলে দেখাও যে বর্ধমানে পৌঁছাইতে সময় লাগে $\frac{2x}{V}$.

15. একটি সরলরেখায় গতিশীল বিন্দুর সমত্বরণ $-m$ ফুট/সেকেণ্ড^2 এবং প্রারম্ভিক বেগ mn ফুট/সেকেণ্ড। দেখাও যে প্রথম $(n-k)$ সেকেণ্ডে যে স্থানে যে বেগে ছিল, $(n+k)$ সেকেণ্ড পরে সেইস্থানে সেই একই বেগে ফিরিয়া আসিবে।
[H. S. 1962]

16. একটি ট্রেন সমত্বরণে A ও B দুইটি স্টেশনে যথাক্রমে u ও v বেগে অতিক্রম করিল। তাহা হইলে গতিপথের অর্ধ-সময়ে যে বেগ তাহা কি অর্ধদূরত্বের সময় যে বেগ তাহার সমান, বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর ?

17. একটি সরলপথে স্থিরাবস্থা হইতে স্থিরাবস্থায় পরিভ্রমণ শেষ করিতে একটি রেলগাড়ির T সময় লাগে। প্রথম $\frac{2T}{n}$ সময় সমত্বরণে চলিয়া V বেগ লাভ করে। তৎপরে $\frac{(n-3)T}{n}$ সময় এই সমবেগ V-তে চলে; শেষ $\frac{T}{n}$ সময় সমমন্দনে চলে। প্রমাণ কর যে গড়বেগ $\frac{(2n-3)V}{2n}$. [H. S. 1962]

18. প্রারম্ভিক বেগ u এবং সমত্বরণ f হইলে যদি কোন কণা p-তম, q-তম ও r-তম সেকেণ্ডে যথাক্রমে a, b, c পথ অতিক্রম করে, তবে প্রমাণ কর যে, $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$. [C. U. 1962]

19. একটি বিন্দু এক সরলরেখায় পর পর তিন সেকেণ্ডে যথাক্রমে 7, 9, 11 ফুট অতিক্রম করে। ইহা সমত্বরণ হইতে পারে কি ? যদি হয়, তাহা হইলে ত্বরণের মান বহির কর। [H. S. 1963]

20. একটি ট্রেন পর পর 2 মাইল দূরত্ব বিশিষ্ট দুইটি স্টেশনে পর পর থামে। স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া একটি স্টেশন হইতে অপরটিতে যাইতে 4 মিনিট সময় নেয়। মাইল ও মিনিট যথাক্রমে দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক হইলে এবং ট্রেনটি প্রথমে সমত্বরণ x ও পরে সমমন্দন y-এ চলিলে প্রমাণ কর যে $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$.
[C. U. 1934]

21. একটি দ্রুতগামী রেলগাড়ীর আধ মাইল যাইতে ঘণ্টায় 60 মাইল বেগ হইতে ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে পরিবর্তিত হইল। কত সময় পূর্বে ব্রেক প্রয়োগ করা হইয়াছিল এবং আরও কত সময় পরে ইহা স্থিরাবস্থায় আসিবে? [H. S. 1963]

22. একই সরলরেখায় d ফুট দূরত্বে একটি স্টেশন হইতে স্থিরাবস্থায় যাত্রা করিয়া একটি ট্রেন অপর একটি স্টেশন গিয়া থামে। ট্রেনটি যাত্রাপথের প্রথম অংশ a ফুট/সেকেণ্ড^2 সমত্বরণে এবং অপর অংশ b ফুট/সেকেণ্ড^2 সমমন্দনে চলিলে প্রমাণ কর উহার সম্পূর্ণ পথটি অতিক্রম করিতে সময় লাগে $\sqrt{\dfrac{2(a+b)d}{ab}}$ সেকেণ্ড।

[C. U. 1945]

23. কোন প্রতিযোগিতায় দুইটি গাড়ী একই দিকে একই সময়ে দুইটি সমান্তরাল পথে গমন করিয়া একই সময়ে উভয়েই পৌছাইল। তাহা হইলে প্রমাণ কর নির্দিষ্ট দূরত্ব হইল $\dfrac{2(u_1-u_2)(u_1f_2-u_2f_1)}{(f_1-f_2)^2}$, যেখানে u_1 এবং u_2 গাড়ী দুইটির প্রাথমিক বেগ এবং উহার ত্বরণ যথাক্রমে f_1 এবং f_2.

24. যদি ক্রমিক তিনটি অবকাশ t_1, t_2 ও t_3-তে সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল একটি কণার গড়বেগ যথাক্রমে v_1, v_2 ও v_3 হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{v_1-v_2}{v_2-v_3}=\frac{t_1+t_2}{t_2+t_3}.$$

25. একটি ট্রেনের বেগ প্রথমে 0 হইতে সমহার f_1-এ বৃদ্ধি পাইয়া v হইল; অতঃপর কিছু সময় উহা সমবেগে চলিল এবং শেষে সমাহার f_2-এ হ্রাস পাইয়া উহার বেগ 0 হইল। সম্পূর্ণ পথের দৈর্ঘ্য x হইলে প্রমাণ কর যে উহার ঐ পথ অতিক্রম করিতে মোট সময় লাগিয়াছিল $\dfrac{x}{v}+\dfrac{v}{2}\left(\dfrac{1}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}\right)$.

26. একটি পথকে n-সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করা হইল এবং প্রত্যেক অংশের শেষে গতিশীল কণার ত্বরণ $\dfrac{f}{n}$ বৃদ্ধি পায়। প্রমাণ কর যে, সমগ্র পথটি (s) অতিক্রম করার পর কণাটির গতিবেগ হয় $\sqrt{fs\left(3-\dfrac{1}{n}\right)}$.

27. x ফুট দূরত্বে একটি চোরকে দেখিয়া একটি কন্‌স্টেবল u বেগে এবং α সমত্বরণসহ চোরটিকে ধরিবার জন্য ছুটিল, আর তখন চোরটি স্থির অবস্থা হইতে β সমত্বরণে দৌড় আরম্ভ করিল। প্রমাণ কর যে, কন্‌স্টেবলটি চোরটিকে ধরিতে পারিবে যদি, $\alpha \geqslant \beta$ অথবা $\alpha<\beta<\alpha+\dfrac{u^2}{2x}$ হয়।

28. দুইটি বস্তুকণা একই সরলরেখায় যথাক্রমে f এবং f' ত্বরণ লইয়া চলে। যদি কোন সময়ে নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে যথাক্রমে u এবং u' হয়। তাহা হইলে প্রমাণ

কর যে তাহারা দুইবারের অধিক মিলিত হইতে পারে না। যদি ইহা সম্ভব হয় তাহা হইলে সময়ের ব্যবধান হইবে $\frac{2}{f-f'}\sqrt{\{(u-u')^2-2(a-a')(f-f')\}}$.

[C. U. 1938]

29. একটি কণা একটি সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল। যদি যাত্রার t_1, t_2 ও t_3 সময় পরে সরলরেখাটির একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে কণাটির দূরত্ব যথাক্রমে x_1, x_2 ও x_3 হয়, তবে প্রমাণ কর যে, কণাটির ত্বরণ=

$$2\left\{\frac{(x_2-x_3)t_1+(x_3-x_1)t_2+(x_1-x_2)t_3}{(t_2-t_3)(t_3-t_1)(t_1-t_2)}\right\}$$

30. পর পর দুইটি অবকাশ t_1 ও t_2 সেকেণ্ডে সমত্বরণে গতিশীল একটি কণা যথাক্রমে s_1 ও s_2 পথ অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে কণাটির ত্বরণ, $2(s_2t_1-s_1t_2)/t_1t_2(t_1+t_2)$.

৪ অভিকর্ষজ ত্বরণসহ উল্লম্বগতি

(Vertical motion undergravity)

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী :

A. স্থিরাবস্থা হইতে অভিকর্ষ ত্বরণ হেতু গতি :

কোন বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে পড়িতে থাকিলে $u=0,\ f=g$; যদি t সময় পরে বেগ v হয় এবং নিম্নদিকে সরণ h হয়, তাহা হইলে

$$v=gt,\ h=\tfrac{1}{2}gt^2,\ v^2=2gh \quad \text{বা,} \quad v=\sqrt{2gh}.$$

(i) $\sqrt{2gh}$ কে h-উচ্চতা হইতে পতনজ বেগ বলে।

(ii) h-উচ্চতা হইতে মাটিতে পৌঁছিতে t সময় লাগিলে

$$h=\tfrac{1}{2}gt^2 \text{ হইতে, } t=\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

t-তম সেকেণ্ডে পতিত দূরত্ব $=\frac{1}{2}g(2t-1)$

B. প্রারম্ভিক u-বেগ দিয়া কোন বস্তুকে নিম্নাভিমুখে নিক্ষেপ করিলে :

(i) $v=u+gt$. (ii) $h=ut+\frac{1}{2}gt^2$, (iii) $v^2=u^2+2gh$.

C. প্রারম্ভিক u-বেগ দিয়া কোন বস্তুকে উর্ধ্বমুখে ছুড়িলে :

(i) $v=u-gt$, (ii) $h=ut-\frac{1}{2}gt^2$, (iii) $v^2=u^2-2gh$.

(iv) চরম উচ্চতায় পৌঁছিবার সময় $(T)=\frac{u}{g}$.

(v) চরম উচ্চতা $(H)=\frac{u^2}{2g}$. (vi) উত্থিতিকাল $=\frac{2u}{g}$.

(vii) উত্থান কাল $=$ পতন কাল $=\frac{u}{g}$.

উদাহরণমালা—IV

[আমরা সাধারণত সি.জি.এস্. প্রণালীতে $g=930$ সে.মি./সে.^{2} এবং এফ.পি.এস্. প্রণালীতে $g=32$ ফুট/সে.^{2} ধরিব]

উদা. 1. একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে পড়িতেছে,

(i) 5 সেকেণ্ড পরে ইহার বেগ নির্ণয় কর।

(ii) 5 সেকেণ্ডে পতিত দূরত্ব নির্ণয় কর।

(iii) 64 ফুট পতিত হইতে কত সময় লাগে।

(iv) $\frac{1}{10}$ সেকেণ্ড পরে সেণ্টিমিটার সেকেণ্ড একক বেগ নির্ণয় কর।

(v) 2 সেকেণ্ডে পতিত দূরত্ব সেণ্টিমিটারে নির্ণয় কর।

(vi) 490 মিটার পড়িতে কত সময় লাগে ?

(vii) 144 ফুট পতনজনিত বেগ নির্ণয় কর।

(viii) 144 ফুট পড়িতে কত সময় লাগে ?

(ix) 250 সেমি. পতনজনিত বেগ নির্ণয় কর।

(x) 250 সেমি. পড়িতে কত সময় লাগে ?

(xi) পঞ্চম সেকেণ্ডে কত ফুট পথ পড়ে ?

(xii) অষ্টম সেকেণ্ডে কত মিটার দূরত্ব পতিত হয় ?

সমাধান ঃ (i) $v=gt=32\times5=160$ ফু./সে.।

(ii) $h=\frac{1}{2}gt^2=16\times5^2=16\times25=400$ ফুট

(iii) $h=\frac{1}{2}gt^2$ সূত্র হইতে, $64=16t^2$, $t^2=4$ $\therefore$ $t=2$ সেকেণ্ড

(iv) $v=gt=980\times\frac{1}{10}=98$ সেমি./সে.

(v) $h=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\times980\times2^2=1960$ সেমি.

(vi) $h=\frac{1}{2}gt^2$ সূত্র হইতে, এখানে $h=490$ মি. $=49000$ সেমি.।

$49000=\frac{1}{2}\times980t^2$ $\therefore$ $490t^2=49000$, $t^2=100$, $\therefore$ $t^2=10$ সে.

(vii) $v^2=2gh=64\times144$ $\therefore$ $v=8\times12=96$ ফু./সে.

(viii) $s=\frac{1}{2}gt^2$ সূত্র হইতে, $144=16t^2$, $t^2=9$ $\therefore$ $t=3$ সেকেণ্ড।

(ix) $v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times980\times250}=\sqrt{49\times10000}=700$ সেমি./সে.

(x) $h=\frac{1}{2}gt^2$ সূত্র হইতে, $250=490t^2$, $t^2=\frac{25}{49}$ $\therefore$ $t=\frac{5}{7}$ সেকেণ্ড।

(xi) t-তম সেকেণ্ডে পতিত দূরত্ব $=\frac{1}{2}g(2t-1)$

$\therefore$ পঞ্চম সেকেণ্ডে পতিত দূরত্ব $=16\times9=144$ ফুট।

(xii) অষ্টম সেকেণ্ডে পতিত দূরত্ব $=490\times15$ সেমি. $=73{\cdot}5$ মিটার।

উদা. 2. কুতুবমিনারের উচ্চতা 238 ফুট, উহার চূড়া হইতে একটি বল ফেলিলে কত সময়ে পরে উহা মাটিতে পৌঁছিবে ?

$h=\frac{1}{2}gt^2$ সূত্র ব্যবহার করিয়া

$$238=16t^2,\ t^2=\frac{238}{16};\ t=\frac{\sqrt{238}}{4}=\frac{15{\cdot}43}{4} \text{ সেকেণ্ড}$$

$$=3{\cdot}86 \text{ সেকেণ্ড (আসন্নমান)।}$$

উদা. 3. স্থিরাবস্থা হইতে পতন কালে একটি নিম্নগামী বস্তু পতনকালের শেষ এক সেকেণ্ডে 224 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে। ইহা কত উঁচু হইতে পড়ে ?

ধর, বস্তুটি h উচ্চতা হইতে পড়িয়াছিল।

224 ফুট = t-তম সেকেণ্ডে পতিত দূরত্ব।

$\therefore \quad 224=\frac{1}{2}g(2t-1)=16(2t-1)$; বা, $14=2t-1$

$\therefore \quad 2t=15,\ t=\frac{15}{2}$ সেকেণ্ড।

এখন $h=\frac{1}{2}gt^2=16\times(\frac{15}{2})^2=16\times\frac{225}{4}=4\times225=900$ ফুট।

উদা. 4. একটি মিনারের শীর্ষ দেশ হইতে একটি বল ছাড়িয়া দেওয়া হইল। পতনকালের সর্বশেষ সেকেণ্ডে ইহা সমগ্র উচ্চতার $\frac{16}{25}$ অংশ পড়ে, মিনারের উচ্চতা নির্ণয় কর।

মনে কর, মিনারের উচ্চতা h এবং বস্তুটি t সেকেণ্ডে ভূমিতে পৌঁছে। তাহা হইলে $h=\frac{1}{2}gt^2=16t^2$.

এখন $\frac{16}{25}h=t$-তম সেকেণ্ডে পতিত দূরত্ব।

$\therefore \quad \frac{16}{25}\times16t^2=\frac{1}{2}g(2t-1)=16(2t-1)$.

$16t^2=25(2t-1)$; বা, $16t^2-50t+25=0$

$(2t-5)(8t-5)=0$; $\therefore \quad t=\frac{5}{2}$ অথবা $\frac{5}{8}$

যেহেতু সময় এক সেকেণ্ড অপেক্ষা বেশি, অতএব $t=\frac{5}{2}$ সেকেণ্ড

এখন $h=16t^2=16\left(\frac{5}{2}\right)^2=16\times\frac{25}{4}=100$ ফুট।

উদা. 5. একটি ঢিল সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগে উল্লম্বভাবে উপর দিকে ছোড়া হইল।

(i) চরম উচ্চতা নির্ণয় কর।

(ii) চরম উচ্চতালাভের সময় নির্ণয় কর।

(iii) কখন উহা 96 ফুট উঁচুতে থাকিবে ?

(iv) উত্থিতিকাল নিরূপণ কর।

(v) প্রক্ষেপের 2 সেকেণ্ড পরে বেগ নিরূপণ কর।

(vi) প্রক্ষেপের 3 সেকেণ্ড পরে বেগ নিরূপণ কর।

সমাধান :

(i) চরম উচ্চতা $(H)=\frac{u^2}{2g}=\frac{80\times80}{64}=100$ ফুট।

(ii) চরম উচ্চতায় পৌঁছিবার সময় $(T)=\frac{u}{g}=\frac{80}{32}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড

(iii) $h=ut-\frac{1}{2}gt^2$ সূত্র হইতে,

$96=80t-16t^2$; বা, $t^2-5t+6=0$, বা, $(t-3)(t-2)=0$

$\therefore \quad t=2$ সেকেণ্ড এবং $t=3$ সেকেণ্ড

ইহা প্রক্ষেপের 2 সেকেণ্ড পরে একবার এবং 3 সেকেণ্ড পরে আবার 96 ফুট উচ্চতায় আসে।

(iv) উত্থিতিকাল $=\frac{2u}{g}=\frac{2\times 80}{32}=5$ সেকেণ্ড

(v) $v=u-gt$ সূত্র হইতে,

2 সেকেণ্ড পরে বেগ $v=80-32\times 2=80-64=16$ ফু./সে.

(vi) 3 সেকেণ্ড পরে বেগ $v=80-32\times 3=80-96=-16$ ফু./সে.

অর্থাৎ বেগ নিম্নাভিমুখে 16 ফু./সে.

উদা. 6. সেকেণ্ডে 200 ফুট বেগে উল্লম্ব ঊর্ধ্বদিকে প্রক্ষিপ্ত একটি বস্তু কি চরম উচ্চতা লাভ করে? কত সময় পরে উহা প্রক্ষেপ স্থানে ফিরিয়া আসে?

চরম উচ্চতা $(H)=\frac{u^2}{2g}=\frac{200\times 200}{2\times 32}=625$ ফুট ;

উৎক্ষেপস্থলে ফিরিয়া আসিবার সময় (অর্থাৎ উত্থিতি কাল)

$$=\frac{2u}{g}=\frac{2\times 200}{32}=12\tfrac{1}{2} \text{ সেকেণ্ড ;}$$

উদা. 7. সেকেণ্ডে 96 ফুট বেগে একটি ঢিল উল্লম্ব ঊর্ধ্বদিকে প্রক্ষিপ্ত হইল। ইহা কি উচ্চতা লাভ করে? প্রক্ষেপের 4 সেকেণ্ড পরে ইহার বেগ নির্ণয় কর। তখন ইহা কত উঁচুতে?

চরম উচ্চতা $=\frac{u^2}{2g}=\frac{96\times 96}{2\times 32}=144$ ফুট

4 সেকেণ্ড পরে বেগ ; $v=u-gt=96-32\times 4=96-128=-32$ ফুট/সে.

$\therefore$ বেগ নিম্নাভিমুখে সেকেণ্ডে 32 ফুট।

4 সেকেণ্ডে লব্ধ উচ্চতা $=ut-\frac{1}{2}gt^2=96\times 4-16\times 4^2$

$$=384-256=128 \text{ ফুট।}$$

উদা. 8. যদি একটি বস্তু সেকেণ্ডে 104 ফুট বেগে উৎক্ষিপ্ত হয়, 3 সেকেণ্ড পরে উহার বেগ কত? কত সময় পরে বেগের মান প্রাথমিক বেগের সমান হইবে?

3 সেকেণ্ড পরে বেগ $v=u-gt=104-32\times 3=104-96=8$ ফু./সে.

এখানে অন্তিম বেগ $v=-u$; $-u=u-gt \quad \therefore \quad -104=104-32t$

অর্থাৎ $32t=208$; $t=\frac{208}{32}=6\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড।

উদা. 9. একটি কণা উপরদিকে ছুঁড়িয়া দেওয়া হইল। যদি উহা 144 ফুট চরম উচ্চতা লাভ করে তাহা হইলে প্রক্ষেপের কত সময় পরে উহা 80 ফুট উচ্চতা লাভ করে?

[C. U. 1957]

ধর, প্রক্ষেপ বেগ u.

চরম উচ্চতাতে অন্তিম বেগ 0 $\quad \therefore \quad 0=u^2-2gH$ (H চরম উচ্চতা)

$u^2=2\times 32\times 144 \quad \therefore \quad u=8\times 12=96$ ফু./সে.

এখন $h=ut-\frac{1}{2}gt^2$ সূত্র ব্যবহার করিয়া

$80=96t-16t^2$ অর্থাৎ $5=6t-t^2$ বা, $t^2-6t+5=0$

বা, $(t-5)(t-1)=0 \quad \therefore \quad t=1$ সেকেণ্ড এবং $t=5$ সেকেণ্ড।

প্রথমে 1 সেকেণ্ড পরে এবং পরে ফিরিবার সময় নিক্ষেপের 5 সেকেণ্ড পরে আবার ইহা 80 ফুট উচ্চতায় আসে।

✓**উদা. 10.** একটি বহুতল প্রাসাদের নিম্নতলের উচ্চতা 20 ফুট। প্রাসাদের শীর্ষ হইতে একটি প্রস্তরখণ্ড ছাড়িয়া দেওয়া হয় ; দেখা গেল ইহা $\frac{1}{4}$ সেকেণ্ড সময়ে নিম্নতল অতিক্রম করে। প্রাসাদের উচ্চতা নিরূপণ কর।

ধর, প্রস্তর খণ্ডটি যখন সর্বনিম্নতলে আসিয়া পৌঁছে তখন তাহার বেগ u ; তাহা হইলে ইহা u প্রারম্ভিক বেগ লইয়া $\frac{1}{4}$ সেকেণ্ড সময়ে 20 ফুট অতিক্রম করে।

$$\therefore \quad 20=u.\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}g(\tfrac{1}{4})^2=\frac{u}{4}+16\times\frac{1}{16}=\frac{u}{4}+1$$

$$\frac{u}{4}=19 \quad \therefore \quad u=76 \text{ ফু./সে.}$$

এই বেগ লাভ করার পূর্বে যদি প্রস্তর খণ্ডটি h দূরত্ব পতিত হয় তাহা হইলে $76^2=2gh$ অর্থাৎ $76\times 76=64h \quad \therefore \quad h=\frac{76\times 76}{64}=\frac{361}{4}=90\frac{1}{4}$ ফুট

সুতরাং প্রাসাদের উচ্চতা$=90\frac{1}{4}+20=110\frac{1}{4}$ ফুট।

✓**উদা. 11.** 300 ফুট উঁচু এক মিনারের চূড়া হইতে সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগে একটি ঢিল উৎক্ষিপ্ত করা হইল। কত সময় পরে উহা ভূমিতে পৌঁছিবে।

যখন প্রস্তরখণ্ড ভূমিতে পৌঁছে তখন সরণ $h=-300$ ফুট।

এখানে $u=80$ ফু./সে.।

যদি t সময় প্রয়োজন হয়, তাহা হইলে $-300=80t-\frac{1}{2}gt^2$

বা, $16t^2-80t-300=0$

বা, $4t^2-20t-75=0$; বা, $(2t-15)(2t+5)=0$

$\therefore \quad t=7\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড [t-এর অপর মান $-\frac{5}{2}$ সেকেণ্ড হইতে পারে না]

✓**উদা. 12.** 144 ফুট উঁচু মিনারের চূড়া হইতে একটি বল ফেলা হইল। 256 ফুট উচ্চতা লাভ করিতে পারে এমন বেগে একই সময়ে মিনারের পাদদেশ হইতে একই উল্লম্বরেখায় আর একটি বল উপর দিকে প্রক্ষিপ্ত হইল। কখন এবং কোথায় তাহারা মিলিত হইবে ?

ধর, t সময় পরে প্রথম বলটি x ফুট পড়িবার পর দুইটি বল একত্র হয়। অপর বলের প্রক্ষেপ বেগ u হইলে, $0=u^2-2gh$ হইতে

$$u^2=2\times32\times256 \quad \therefore \quad u=8\times16=128 \text{ ফু./সে.}$$

এখন, $x=\frac{1}{2}gt^2=16t^2 \quad \cdots$(i) এবং $144-x=128t-16t^2 \quad \cdots$(ii)

(i) এবং (ii) হইতে $128t=144 \quad \therefore \quad t=\frac{144}{128}=\frac{9}{8}$ সেকেণ্ড।

$$x=16\times\left(\frac{9}{8}\right)^2=16\times\frac{81}{64}=20\tfrac{1}{4} \text{ ফুট।}$$

$$h-x=144-20\tfrac{1}{4}=123\tfrac{3}{4} \text{ ফুট।}$$

মিনারের পাদদেশ হইতে $123\frac{3}{4}$ ফুট উঁচুতে বল দুইটি একত্র হয়।

উদা. 13. যে বল 5 সেকেণ্ড পরে প্রক্ষেপস্থলে ফিরিয়া আসে, তাহার প্রক্ষেপ-বেগ নির্ণয় কর।

মনে কর, u প্রক্ষেপ বেগ। যখন প্রক্ষেপ বিন্দুতে ফিরিয়া আসে তখন সরণ শূন্য

$h=ut-\frac{1}{2}gt^2$ সূত্র হইতে, $0=u.5-16.5^2$; $\therefore \quad u=80$ ফু./সে.

✓ **উদা. 14.** একটি বল প্রক্ষিপ্ত হইবার 6 সেকেণ্ড পরে প্রক্ষেপস্থলে ফিরিয়া আসে। ইহার চরম উচ্চতা নির্ণয় কর। প্রক্ষেপের 2 সেকেণ্ড পরে ইহা চরম উচ্চতার কত নীচে ছিল?

মনে কর, u প্রক্ষেপ বেগ।

$6=\frac{2u}{32}$, যেহেতু উত্থিতিকাল$=\frac{2u}{g}$. $\quad \therefore \quad u=96$ ফু./সে.

চরম উচ্চতা $(H)=\frac{u^2}{2g}=\frac{96\times96}{2\times32}=144$ ফুট

2 সেকেণ্ড লব্ধ উচ্চতা$=96\times2-16.2^2 \qquad [\, h=ut-\frac{1}{2}gt^2 \,]$

$=192-64=128$ ফুট।

চরম উচ্চতা হইতে ইহার দূরত্ব$=144-128=16$ ফুট নীচে।

উদা. 15. ঊর্ধ্বদিকে প্রক্ষিপ্ত একটি ঢিলকে P বিন্দু অতিক্রম করিয়া উপরদিকে উঠিতে দেখা গেল এবং ইহার 3 সেকেণ্ড পরে উহাকে এই বিন্দু অতিক্রম করিয়া নীচের দিকে নামিতে দেখা গেল। P বিন্দুতে ঢিলের ঊর্ধদিকের বেগ নির্ণয় কর।

মনে কর, ঊর্ধ্বাভিমুখে যাইবার সময় P বিন্দুতে বেগ u ; নিম্নাভিমুখে যাইবার সময় যখন আবার P বিন্দুতে আসে তখন সরণ শূন্য

$h=ut-\frac{1}{2}gt^2$ সূত্র ব্যবহার করিয়া

$0=u.3-16.3^2$; $3u=16\times9$; $\quad \therefore \quad u=48$ ফু./সে.

উদা. 16. 100 ফুট চরম উচ্চতা লাভ করিতে পারে এমন বেগে একটি ঢিল উপর দিকে ছুঁড়িয়া দেওয়া হইল। দুই সেকেণ্ড পরে এই একই বেগে আর একটি ঢিল প্রক্ষিপ্ত হইল। কখন এবং কোথায় তাহারা পরস্পরের সম্মুখীন হইবে ?

মনে কর, প্রক্ষেপ বেগ u, এখানে চরম উচ্চতা $H=100$ ফুট

$0=u^2-2gH \quad \therefore \quad u^2=2\times 32\times 100, \quad u=80$ ফু./সে.

ধর, দ্বিতীয় প্রস্তর খণ্ড প্রক্ষেপের t সেকেণ্ড পরে উভয়ে h উচ্চতায় মিলিত হয়, তাহা হইলে

$$80t-\tfrac{1}{2}gt^2=h=80(t+2)-\tfrac{1}{2}g(t+2)^2$$

বা, $80t-16t^2=80(t+2)-16(t+2)^2$

বা, $5t-t^2=5(t+2)-(t+2)^2$

বা, $5t-t^2=5t+10-t^2-4t-4$

বা, $4t=6$; $\quad \therefore \quad t=1\tfrac{1}{2}$ সেকেণ্ড

এখন $h=80\times\tfrac{3}{2}-16\times(\tfrac{3}{2})^2=120-36=84$ ফুট।

উদা. 17. 400 ফুট উঁচু এক পাহাড়ের পাদদেশ হইতে একটি প্রস্তর খণ্ড উল্লম্ব ঊর্ধ্ব দিকে এমন বেগে প্রক্ষিপ্ত হইল যেন ইহা পাহাড়ের চূড়ায় পৌঁছে। এক সেকেণ্ড পরে আর এক প্রস্তর খণ্ড চূড়া হইতে ছাড়িয়া দেওয়া হইল। কখন এবং কোথায় ইহারা মিলিত হইবে ?

প্রথম প্রস্তর খণ্ডের প্রক্ষেপ বেগ u হইলে, $0=u^2-2g.400$

$\therefore \quad u=\sqrt{64\times 400}=160$ ফু./সে.

মনে কর, প্রক্ষেপের t সেকেণ্ড পরে প্রথম প্রস্তর খণ্ড দ্বিতীয় প্রস্তর খণ্ডের সহিত মিলিত হয়। তাহা হইলে প্রথম প্রস্তর খণ্ডের উত্থিত দূরত্ব + দ্বিতীয় প্রস্তর খণ্ডের পতিত দূরত্ব $=400$ ফুট।

$\therefore \quad 160t-16t^2+16(t-1)^2=400$

বা, $160t-16t^2+16(t^2-2t+1)=400$

বা, $160t-32t+16=400.$

বা, $128t=384 \quad \therefore \quad t=3$ সেকেণ্ড।

দ্বিতীয় প্রস্তর খণ্ডের পতিত দূরত্ব $=\tfrac{1}{2}g(t-1)^2=16\times 2^2=64$ ফুট

$\therefore$ মিলন স্থান শীর্ষদেশ হইতে 64 ফুট নীচে এবং পাদদেশ হইতে $400-64=336$ ফুট উচ্চে।

উদা. 18. একটি ঢিল কূপে ছাড়িয়া দিবার $5\frac{5}{14}$ সেকেণ্ড পরে জলে পড়ার শব্দ শোনা গেল। শব্দের বেগ সেকেণ্ডে 1120 ফুট হইলে কূপের গভীরতা নির্ণয় কর।

ধর, কূপের গভীরতা h এবং প্রস্তর খণ্ড t সময়ে কূপের তলায় পৌঁছে। তাহা হইলে শব্দ $(5\frac{5}{14}-t)$ সেকেণ্ডে h দূরত্ব অতিক্রম করে।

$$\therefore \quad 16t^2 = h = \left(\frac{75}{14}-t\right).1120 ;$$

বা, $t^2=\left(\frac{75}{14}-t\right).70$; বা, $t^2+70t-5\times 75=0$

বা, $t^2+75t-5t-5\times 75=0$

বা, $t(t+75)-5(t+75)=0$; বা, $(t-5)(t+75)=0$

$\therefore \quad t=5$ সেকেণ্ড। ($t=-75$ ঋণাত্মক হইতে পারে না)

এখন $h=16\times 5^2=400$ ফুট।

উদা. 19. একটি বেলুন সেকেণ্ডে 32 ফুট বেগে উপরদিকে উঠিতেছে। বেলুন হইতে একটা ঢিল ছাড়িয়া দেওয়া হইল এবং উহা 17 সেকেণ্ডে মাটিতে আসিয়া পৌঁছিল। ঢিল ছাড়িবার সময় বেলুন কত উঁচুতে ছিল?

মনে কর, বেলুন h উচ্চতায় ছিল। 17 সেকেণ্ড সময়ে ঢিলের সরণ হইয়াছে $-h$ ফুট; ঢিলের বেগ=বেলুনের বেগের সমান, অতএব 32 ফু./সে. উপরদিকে। (সরণ h এবং ত্বরণ g নীচের দিকে বলিয়া তাহারা ঋণাত্মক।)

$\therefore \quad -h=32\times 17-\frac{1}{2}g.17^2=32\times 17-16\times 17\times 17$

বা, $h=17\times 16(17-2)=17\times 16\times 15=4080$ ফুট।

উদা. 20. একটি বেলুন যখন 400 ফুট উপরে তখন তাহা হইতে একটি ঢিল ফেলা হইল এবং ইহা 6 সেকেণ্ডে মাটিতে পৌঁছিল। কত বেগে বেলুনটি উঠিতেছিল?

মনে কর, বেলুন u বেগে উঠিতেছিল, তাহা হইলে ঢিলের প্রারম্ভিক বেগ$=u$, $t=6$ সেকেণ্ড, $s=-400$ ফুট

$f=-g$ এখন $s=ut+\frac{1}{2}gt^2$ সূত্র সহায়ে

$-400=6u-\frac{1}{2}g\times 6^2=6u-16\times 6\times 6$

বা, $6u=576-400=176$; $\therefore \quad u=\frac{88}{3}=29\frac{1}{3}$ ফু./সে.

উদা. 21. সেকেণ্ডে 32 ফুট বেগে ঊর্ধ্বগামী একটি বেলুন হইতে একটি প্রস্তরখণ্ড ছাড়িয়া দেওয়া হইল। প্রস্তরখণ্ডটি ভূমিতে আসিয়া পৌঁছিতে 10 সেকেণ্ড সময় নেয়। প্রস্তরখণ্ডটি ভূমি হইতে কত সর্বোচ্চ উচ্চতা লাভ করে? যখন প্রস্তরখণ্ডটি ছাড়া হয়, তখন বেলুন কত ঊর্ধ্বে ছিল?

মনে কর, ঢিল ছাড়িবার সময়ে বেলুন h উচ্চতায় ছিল

$u=32$ ফু./সে., $t=10$ সে. $\therefore\ -h=32\times10-16\times10^2$

বা, $h=1600-320=1280$ ফুট।

ধর, ঢিল ছাড়িবার স্থল হইতে ইহা H চরম উচ্চতায় উঠিয়াছিল, তাহা হইলে

$$H=\frac{u^2}{2g}=\frac{32\times32}{2\times32}=16 \text{ ফুট}$$

$\therefore$ ভূমি হইতে চরম উচ্চতা $=1280+16=1296$ ফুট।

উদা. 22. স্থিরাবস্থা হইতে একটি বেলুন 4 ফুট-সেকেণ্ড একক সমত্বরণে উপরদিকে উঠিতেছে। 16 সেকেণ্ড পরে বেলুন হইতে একটি ঢিল ছাড়িয়া দেওয়া হইল। কত সময় পরে ঢিলটি ভূমিতে পৌছিবে ?

$s=\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র ব্যবহার করিয়া, 16 সেকেণ্ডে বেলুনের

লব্ধ উচ্চতা $=\frac{1}{2}\times4\times16^2=2\times256=512$ ফুট

এবং তখন বেগ $=4\times16=64$ ফু./সে.

ঢিল ছাড়িবার t সেকেণ্ড পরে যদি ইহা ভূমিতে পৌছে ; যেহেতু $u=64$ ফু./সে.,

h (সরণ) $=-512$ ফুট, $f=-g=-32$ ফু./সে.^{2}

$\therefore\ -512=64t-16t^2$; বা, $t^2-4t-32=0$

বা, $(t-8)(t+4)=0$

$\therefore\ t=8$ বা -4 ; কিন্তু t ঋণাত্মক হইতে পারে না ; $\therefore\ t=8$ সেকেণ্ড।

উদা. 23. উর্ধ্বগামী একটি কণা একটি বিন্দুতে পৌছিতে 3 সেকেণ্ড সময় লাগে, যাত্রার 5 সেকেণ্ড পরে পুনরায় ঐ বিন্দুতে আসে। চরম উচ্চতা এবং প্রারম্ভিক বেগ নির্ণয় কর।

ধর বিন্দুটি উচ্চতা h ফুট, $h=ut-\frac{1}{2}gt^2$ সূত্র সহায়ে

$h=3u-16\times3^2$ আবার $h=5u-16\times5^2$

$\therefore\ 5u-16\times25=3u-16\times9$; বা, $2u=16\times16$

$\therefore\ u=128$ ফু./সে.

চরম উচ্চতা $(H)=\dfrac{u^2}{2g}=\dfrac{128\times128}{64}=256$ ফুট।

উদা. 24. দুইটি প্রস্তরখণ্ড পৃথক উচ্চতা হইতে ছাড়িয়া দেওয়া হইল এবং তাহারা একই সময়ে ভূতলে আসিয়া পৌছে। প্রথম প্রস্তর খণ্ড 144 ফুট উচ্চতা হইতে এবং দ্বিতীয় প্রস্তরখণ্ড 121 ফুট উচ্চতা হইতে পড়ে। ছাড়িয়া দিবার সময়ের পার্থক্য নির্ণয় কর।

মনে কর, ছাড়িবার t_1 এবং t_2 সেকেণ্ড পরে প্রস্তরখণ্ড ভূমিতে পৌঁছে। তাহা হইলে

$144=\frac{1}{2}gt_1^2=16t_1^2 \quad \therefore \quad t_1^2=9$; বা, $t_1=1$ সেকেণ্ড

এবং $121=16t_2^2$ বা, $t_2^2=\frac{121}{16} \quad \therefore \quad t_2=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$ সেকেণ্ড

দুই সময়ের ব্যবধান $=3-2\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ সেকেণ্ড।

উদা. 25. সেকেণ্ডে 4 ফুট সমবেগে ঊর্ধ্বগামী একটি বেলুন হইতে একটি প্রস্তরখণ্ড ছাড়িয়া দেওয়া হয় এবং ইহা 6 সেকেণ্ডে ভূমিতে পৌঁছে। বেলুনের বেগ নির্ণয় কর; কত উচ্চতা হইতে প্রস্তরখণ্ড ছাড়িয়া দেওয়া হইয়াছিল?

মনে কর, বেলুনের সম বেগ u এবং h উচ্চতা হইতে ঢিল ছাড়া হইয়াছে; তাহা হইলে ঢিলের প্রারম্ভিক বেগ u

$h=4u$ এবং $-4u=u\times6-16\times6^2$; বা, $10u=96\times6$

$\therefore \quad u=9{\cdot}6\times6=57{\cdot}6=$ ফু./সে. $\quad h=4\times57{\cdot}6=230{\cdot}4$ ফুট।

উদা. 26. উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বদিকে একটি গুলি ছোড়া হইল, 2 সেকেণ্ড সময়ে একটি মিনারের শীর্ষে পৌঁছে এবং ইহার 5 সেকেণ্ড পরে ভূতলে ফিরিয়া আসে। মিনারের উচ্চতা মিটারে নির্ণয় কর।

ধর, মিনারের উচ্চতা h মিটার $=100.h$ সে. মি.

$h=ut-\frac{1}{2}gt^2$ সূত্র ব্যবহার করিয়া

$100h=u\times2-\frac{1}{2}\times980\times2^2$; বা, $100h=2u-490\times4\cdots$(i)

যেহেতু উত্থিতিকাল $=2+5=7$ সেকেণ্ড

$\therefore \quad 0=7u-\frac{1}{2}\times980\times7^2 \qquad \therefore \quad u=490\times7$ সেমি./সে.

(i) সমীকরণে u-এর মান স্থাপন করিয়া

$100h=2\times490\times7-490\times4=4900$

$\therefore \quad h=49$ মিটার।

উদা. 27. উল্লম্বভাবে উপর দিকে ছুঁড়িয়া দিলে একটি ঢিল এক সেকেণ্ড সময়ে 14·7 মিটার উঠে। উত্থিতিকাল নির্ণয় কর।

আমরা জানি $h=ut-\frac{1}{2}gt^2$ এখানে $h=14{\cdot}7$ মি. $=1470$ সেমি.

$t=1$ সেকেণ্ড; g-এর মান 930 সেমি./সে.^{2} ধরিয়া

$1470=u.1-490.1^2 \quad \therefore \quad u=1460+490=1960$ সেমি./সে.

উত্থিতি কাল $=\frac{2u}{g}=\frac{2\times1960}{980}=4$ সেকেণ্ড। $\left[\,0=ut-\frac{1}{2}gt^2\,\right]$

উদা. 28. উল্লম্ব উর্ধ্বদিকে প্রক্ষিপ্ত একটি কণা t_1 সেকেণ্ড পরে h উচ্চতায় পৌঁছে। যদি ইহা আরও t_2 সেকেণ্ড পরে ভূমিতে আসিয়া পড়ে, প্রমাণ কর যে $h=\frac{1}{2}gt_1t_2$ এবং চরম উচ্চতা $=\frac{g}{8}(t_1+t_2)^2$

ধর, প্রক্ষেপ বেগ u ; এখানে $h=ut_1-\frac{1}{2}gt_1^2$ ... (i)

যেহেতু উত্থিতিকাল $=t_1+t_2$

$$\therefore \quad 0=u(t_1+t_2)-\tfrac{1}{2}g(t_1+t_2)^2 \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

$$\therefore \quad u=\tfrac{1}{2}g(t_1-t_2)$$

প্রথমে সমীকরণে u-এর মান স্থাপন করিয়া

$$h=\tfrac{1}{2}g(t_1+t_2)t_1-\tfrac{1}{2}gt_1{}^2=\tfrac{1}{2}gt_1t_2$$

চরম উচ্চতা $(\mathrm{H})=\dfrac{u^2}{2g}=\dfrac{1}{4}\,\dfrac{g^2(t_1+t_2)^2}{2g}=\dfrac{g}{8}(t_1+t_2)^2$

উদা. 29. একটি উল্লম্ব মিনারের শীর্ষ হইতে যখন একটি ঢিল x ফুট পতিত হয় সেই সময় শীর্ষদেশের y ফুট নিচের একটি বিন্দু হইতে আর একটি ঢিল ছাড়িয়া দেওয়া হইল। যদি উভয়ে স্থিরাবস্থা হইতে পড়ে এবং একই সময়ে ভূমিতে পৌঁছে, দেখাও যে মিনারের উচ্চতা $\dfrac{(x+y)^2}{4x}$ ফুট।

x ফুট পড়িবার পর প্রথম ঢিলের বেগ $\sqrt{2gx}$.

মনে কর, মিনারের উচ্চতা h ফুট। তাহা হইলে ভূমিতে পৌঁছিবার পূর্বে একই সময় t-তে ঢিল $\sqrt{2gx}$ প্রারম্ভিক বেগ লইয়া $h-x$ দূরত্ব অতিক্রম করিবে এবং দ্বিতীয় ঢিল স্থিরাবস্থা হইতে $h-y$ দূরত্ব অতিক্রম করিবে

অতএব $\quad h-x=\sqrt{2gx}\,t+\frac{1}{2}gt^2 \qquad \cdots$(i)

$$h-y=\tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \cdots\text{(ii)}$$

বিয়োগ করিয়া $\quad y-x=\sqrt{2gx}.t \qquad \therefore \quad t=\dfrac{y-x}{\sqrt{2gx}}$

এখন (ii) হইতে, $\quad h=y+\frac{1}{2}g\dfrac{(y-x)^2}{2gx}=\dfrac{4xy+(y-x)^2}{4x}=\dfrac{(x+y)^2}{4x}.$

উদা. 30. সেকেণ্ডে u ফুট বেগে একটি কণা উল্লম্ব উর্ধ্বদিকে প্রক্ষিপ্ত হইল এবং ইহার t সেকেণ্ড পরে আর একটি কণা একই বিন্দু হইতে একই প্রারম্ভিক বেগে

উৎক্ষিপ্ত হয়। প্রমাণ কর যে কণা দুইটি প্রথম কণা প্রক্ষেপের $\left(\frac{t}{2}+\frac{u}{g}\right)$ সেকেণ্ড পরে মিলিত হইবে। [H. S. 1960]

মনে কর, প্রথম কণা নিক্ষেপের T সেকেণ্ড পরে উভয়ে মিলিত হয়। তাহা হইলে দ্বিতীয় কণা $(T-t)$ সেকেণ্ডে একই উচ্চতা h এ-তে থাকে।

$$\therefore \quad uT-\tfrac{1}{2}gT^2=h=u(T-t)-\tfrac{1}{2}g(T-t)^2$$
$$=uT-ut-\tfrac{1}{2}g(T^2-2Tt+t^2)$$

বা, $ut+\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}g.2Tt$

বা, $u+\frac{1}{2}gt=gT \qquad \therefore \quad T=\left(\frac{u}{g}+\frac{t}{2}\right)$ সেকেণ্ড।

উদা. 31. একটি লিফ্‌ট f ফু./সে^{2}. ত্বরণে উঠিতেছে। লিফ্‌টে স্থিত একজন লোক লিফ্‌ট সম্পর্কে v আপেক্ষিক বেগে একটি বল উপরদিকে ছুড়িয়া দিল এবং t সেকেণ্ড পরে উহা ধরিয়া ফেলে ; দেখাও যে, $f+g=\frac{2v}{t}$.

মনে কর, বল ছুড়িবার সময় লিফ্‌টের বেগ u, তাহা হইলে বলের প্রকৃত বেগ $u+v$. যেহেতু গোলক এবং লিফ্‌ট t সেকেণ্ডে সমান উল্লম্ব দূরত্ব লাভ করে,

$$\therefore \quad ut+\tfrac{1}{2}ft^2=(u+v)t-\tfrac{1}{2}gt^2\,; \qquad \text{বা,}\quad \tfrac{1}{2}(f+g)t^2=vt.$$

$$\therefore \quad f+g=\frac{2v}{t}.$$

প্রশ্নমালা—IV

1. একটি প্রস্তর খণ্ডকে এরূপ বেগে উল্লম্বদিকে ঊর্ধ্বাভিমুখে উৎক্ষেপ করা হইল যাহাতে উহার চরম উচ্চতা 50 ফুট হয়। প্রস্তর খণ্ডটি যখন ঊর্ধ্বাভিমুখে অর্ধপথে, তখন উহার বেগ নির্ণয় কর।

2. উল্লম্বদিকে ঊর্ধ্বাভিমুখে একটি বল ছোঁড়া হইল। প্রমাণ কর যে চরম উচ্চতায় ও অর্ধ-উচ্চতায় বলটির পৌঁছিতে যে সময় লাগিবে তাহাদের অনুপাত $3+2\sqrt{2}:1$.

3. একটি কূপের ভিতর একটি প্রস্তর খণ্ড স্থির অবস্থা হইতে ফেলা হইল। প্রস্তর খণ্ডটির জলে আঘাতের শব্দ $2\frac{33}{56}$ সেকেণ্ড পরে শোনা গেল। শব্দের বেগ সেকেণ্ডে 1120 ফুট হইলে কূপটির গভীরতা নির্ণয় কর। [C. U. 1932]

4. একটি মিনার হইতে অবাধে পতনশীল একটি কণা শেষ সেকেণ্ডে মোট দূরত্বের $\frac{9}{25}$ অংশ অতিক্রম করিল। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় কর। [C. U. 1966]

5. সেকেণ্ডে 100 ফুট বেগে একটি বস্তুকে সোজা উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হইল। ইহার এক সেকেণ্ড পরে সেকেণ্ডে 89 ফুট বেগে অপর একটি বস্তুকে সোজা উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হইল। কত সময়ে উভয় বস্তু মাটি হইতে সমান দূরত্বে থাকিবে এবং এই দূরত্ব নির্ণয় কর। [H. S. 1963]

6. একটি উল্লম্ব মিনারের শীর্ষ হইতে এক ব্যক্তি সেকেণ্ডে 96·6 ফুট বেগে একটি বস্তুকে সোজা উপরের দিকে নিক্ষেপ করিল এবং 4 সেকেণ্ড পরে আর একটি বস্তুকে স্থিরাবস্থায় ফেলিয়া দিল। উভয়বস্তু একত্রে ভূমি স্পর্শ করিলে, মিনারের শীর্ষের উচ্চতা এবং দ্বিতীয় বস্তুটির পতনকাল নির্ণয় কর।
[দেওয়া আছে $g=32\cdot2$ ফুট/সেকেণ্ড^2.] [C. U. 1937]

7. একটি মিনারের শীর্ষ হইতে সেকেণ্ডে 48 ফুট বেগে একটি ঢিল সোজা উপরের দিকে প্রক্ষিপ্ত হইল। দুই সেকেণ্ড পরে একই স্থান হইতে আর একটি ঢিল ছাড়িয়া দেওয়া হইল এবং উভয়ে একই সময়ে ভূমিতে পৌঁছিল। মিনারের উচ্চতা নির্ণয় কর। [H. S. 1964]

8. একটি বলকে সেকেণ্ডে 128 ফুট বেগে উল্লম্বদিকে ঊর্ধ্বাভিমুখে ছোঁড়া হইল এবং ঐ স্থান হইতে 2 সেকেণ্ড পরে একই বেগে আর একটি বলকে সোজা উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হইল। বল দুইটি কখন ও কোথায় মিলিত হইবে ?

9. একটি বস্তুকে সোজা উপরের দিকে u ফুট/সে. বেগে নিক্ষেপ করা হইল। ইহার t সেকেণ্ড পরে একই স্থান হইতে একই বেগে অপর আর একটি বস্তু উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হইল। প্রমাণ কর যে, প্রথম বস্তুর নিক্ষেপ সময়ের $\left(\frac{t}{2}+\frac{u}{g}\right)$ সেকেণ্ড পরে বস্তু দুইটির মিলন হইবে। [H. S. 1960]

10. একটি উল্লম্ব মিনারের শীর্ষ হইতে পতনশীল একটি প্রস্তর খণ্ড যখন x ফুট নামিয়াছে তখন মিনারের শীর্ষ হইতে y-ফুট নিচে একটি স্থান হইতে আর একটি প্রস্তর খণ্ডকে ছাড়া হইল। প্রস্তর খণ্ড দুইটিকে স্থিরাবস্থা হইতে ছাড়া হইলে এবং একই সঙ্গে ভূমিতে পৌঁছাইলে, প্রমাণ কর যে, মিনারটির উচ্চতা $\frac{(x+y)^2}{4x}$ ফুট।
[C. U. 1935 ; H. S. 1971]

11. একটি প্রস্তর খণ্ড একটি উচ্চস্থান A হইতে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হইল। যখন প্রস্তরটি A হইতে h নীচে আসে তখন তাহার বেগ A হইতে h উচ্চতায় বেগের দ্বিগুণ। দেখাও যে A হইতে চরম উচ্চতা $\frac{5}{3}h$. [H. S 1961]

12. একটি কণা খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হইল এবং t সেকেণ্ড পরে

একই বেগে অপর একটি কণা উপর দিকে নিক্ষেপ করা হইল। প্রমাণ কর যখন তাহারা মিলিত হয়, তখন তাহাদের প্রত্যেকের বেগ $\frac{1}{2}gt$. [H. S. 1962]

13. A ও B দুইটি বস্তু ; উহাদের একই সময়ে যথাক্রমে সেকেণ্ডে 25 ফুট এবং সেকেণ্ডে 200 ফুট বেগে, Aকে 300 ফুট উচ্চ একটি মিনারের শীর্ষ হইতে এবং B-কে উহার ভূমি হইতে ছোঁড়া হইল। কোথায় তাহারা মিলিত হইবে এবং ঐ সময়ে তাহাদের বেগের দিক নির্ণয় কর। $(g=32)$। [B. H. U. 1932]

14. উল্লম্বদিকে উৎক্ষিপ্ত একটি কণা t সেকেণ্ড পরে h উচ্চতায় পৌঁছে। যদি আরও t' সেকেণ্ড পরে ইহা পুনরায় ভূমিতে আসিয়া পড়ে, প্রমাণ কর যে, $h=\frac{1}{2}gtt'$.
[C. U. 1963 ; H. S. 1965, '69]

15. একটি প্রস্তর খণ্ডকে একটি h গভীর শূন্যখাদে স্থিরাবস্থা হইতে ফেলা হইল এবং খাদটির তলায় প্রস্তর খণ্ডের আঘাতের শব্দ t সেকেণ্ড পরে শোনা গেল। প্রমাণ কর যে, শব্দের গতি সেকেণ্ডে v হইলে $2h\left(1+\frac{gt}{v}\right)=gt^2$, যেখানে h-এর তুলনায় v-এর মান এত বড় যে, $\left(\frac{h}{v}\right)^2$-কে অগ্রাহ্য করা যায়। [C. U. 1933 ; '67]

16. সেকেণ্ডে 40 ফুট বেগে নীচের দিকে প্রক্ষিপ্ত হইয়া কোন নির্দিষ্ট সেকেণ্ডে একটি বস্তু 216 ফুট অতিক্রম করে। পূর্ববর্তী সেকেণ্ডে উহা কত পথ অতিক্রম করিয়াছিল? [H. S. 1966]

17. ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে সোজা উপরের দিকে ধাবমান এক বেলুন হইতে একটি বস্তু ছাড়িয়া দেওয়া হইল এবং 5 সেকেণ্ড পরে ইহা মাটিতে পড়িল। কত উচ্চতায় বেলুন হইতে বস্তুটি ছাড়িয়া দেওয়া হইয়াছিল? ($g=32$ ফুট/সেকেণ্ড^2.)
[H. S. 1968]

18. উল্লম্বরেখায় ঊর্ধ্বাভিমুখে একটি বস্তুকে ছুঁড়িয়া দেওয়ায় t_1, t_2, ও t_3 সময়ে উহার অবস্থানের উচ্চতা যথাক্রমে x, y, z ; প্রমাণ কর যে,

g-এর মান $2\left[\frac{x_1(t_2-t_3)+x_2(t_3-t_1)+x_3(t_1-t_2)}{(t_2-t_3)(t_3-t_1)(t_1-t_2)}\right]$. [C. H. 1967]

———

৫ নিউটনের গতিসূত্র

(Newton's Laws of Motion)

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

(i) যদি বস্তুর ভর m এবং বেগ v হয়, ভরবেগ $= mv$.

(ii) P বল, m ভর এবং f ত্বরণ হইলে $P = mf$, $W = mg$.

1 পাউণ্ড ভার = 32 পাউণ্ডাল। (g পাউণ্ডাল)

1 গ্রাম ভার = 980 ডাইন (g ডাইন)।

দ্রষ্টব্য ঃ $P = mf$ সূত্র ব্যবহার করিবার সময় স্মরণ রাখিতে হইবে—এফ. পি. এস. পদ্ধতিতে m পাউণ্ড, f ফুট./সেকেণ্ড^2 হইলে P পাউণ্ডাল ; সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে m গ্রাম, f সেমি./সে^{2}. হইলে P ডাইন। $P = mf$ সূত্র ব্যবহার করিবার কালে যথাযথ একক ব্যবহার না করিলে ভুল হইবে।

উদাহরণমালা—V

উদা. 1. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে ভরগুলির দ্বারা উৎপন্ন ভরবেগ নির্ণয় কর ঃ—

(i) 4 আউন্স ভর **1** সেকেণ্ড পড়িবার পরে।

(ii) **1** হন্দর ভর **1** সেকেণ্ড পড়িবার পরে।

(iii) **1** কিলোগ্রাম ভর $\frac{1}{2}$ মিনিট পড়িবার পরে।

(iv) 5 পাউণ্ড ভর **100** ফুট নীচে পড়িবার পরে।

(v) 2 আউন্স ভর 400 গজ নীচে পড়িবার পরে।

(vi) 2 মিলিগ্রাম ভর **10** মিটার নীচে পড়িবার পরে।

সমাধান ঃ

(i) 1 সেকেণ্ড সময় পড়িবার পর বেগ $v = g.\ 1 = 32$ ফু./সে.

$m = 4$ আউন্স $= \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ পাউণ্ড

$\therefore$ ভরবেগ $= mv = \frac{1}{4} \times 32 = 8$ পাউণ্ড. ফুট/সেকেণ্ড

(ii) $\frac{1}{2}$ মিনিট বা 30 সেকেণ্ড সময় পড়িবার পর বেগ $= g \times 30$

$= 32 \times 30 = 960$ ফু./সে.

$m = 1$ হন্দর $= 28 \times 4 = 112$ পাউণ্ড

$\therefore$ ভরবেগ $= mv = 112 \times 960 = 107520$ পাউণ্ড. ফুট/সেকেণ্ড।

(iii) $\frac{1}{10}$ সেকেণ্ড সময় পতনজ বেগ $= g \times \frac{1}{10} = 980 \times \frac{1}{10} = 98$ সেমি./সে.

$m = 1$ কিগ্রা $= 1000$ গ্রাম

∴ ভরবেগ $= 1000 \times 98 = 98000$ গ্রাম. সেমি./সেকেণ্ড।

(iv) 100 ফুট পতনজ বেগ $= \sqrt{2gh} = \sqrt{64 \times 100} = 80$ ফু./সে.

∴ ভরবেগ $= mv = 5 \times 80 = 400$ পাউণ্ড. ফুট/সেকেণ্ড।

(v) 400 গজ বা 400×3 ফুট পতনজ বেগ $= \sqrt{2 \times 32 \times 400 \times 3}$

$= 20 \times 8\sqrt{3}$ ফু./সে.

$m = 2$ আউন্স $= \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ পাউণ্ড

∴ ভরবেগ $= mv = \frac{1}{8} \times (20 \times 8\sqrt{3}) = 20\sqrt{3}$ পাউণ্ড. ফুট/সেকেণ্ড।

(vi) 10 মিটার বা 1000 সেন্টিমিটার পতনজ বেগ $= \sqrt{2gh}$

$= \sqrt{2 \times 980 \times 1000} = 1400$ সেমি./সে.

$m = 2$ মি. গ্রা. $= \frac{2}{1000}$ গ্রাম

∴ ভরবেগ $= mv = \frac{2}{1000} \times 1400 = 2{\cdot}8$ গ্রাম. সেমি./সেকেণ্ড।

উদা. 2. 10 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে 10 ফু./সে.^{2} ত্বরণ লইয়া যাত্রা করিলে 6 সেকেণ্ডে কত ভরবেগ উৎপন্ন হইবে ?

স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া 6 সেকেণ্ডে অর্জিত বেগ

$= ft = 10 \times 6 = 60$ ফু./সে.

∴ ভরবেগ $= mv = 10 \times 60 = 600$ পাউণ্ড. ফুট/সেকেণ্ড।

উদা. 3. এক টন ভরের একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে 6 ইঞ্চি/সে.^{2} ত্বরণ লইয়া যাত্রা করিলে 16 ফুট যাওয়ার পর কত ভরবেগ অর্জন করিবে ?

$m = 1$ টন $= 2240$ পাউণ্ড ; $f = 6$ ইঞ্চি/সে.$^2 = \frac{1}{2}$ ফুট/সে.^{2}

16 ফুট সরণ হেতু অর্জিত বেগ $= \sqrt{2fs} = \sqrt{2 \times \frac{1}{2} \times 16} = 4$ ফু./সে.

∴ ভরবেগ $= mv = 2240 \times 4 = 8960$ পাউণ্ড. ফুট/সেকেণ্ড।

✓**উদা. 4.** সেকেণ্ডে 300 ফুট বেগবিশিষ্ট 20 পাউণ্ড ভরের একটি কামানের গোলার ভরবেগকে সেকেণ্ড 700 ফুট বেগবিশিষ্ট 4 আউন্স ভরের গুলির ভরবেগের সহিত তুলনা কর।

কামানের গোলার ভরবেগ $= 20 \times 300 = 6000$ পাউণ্ড. ফুট/সেকেণ্ড।

গুলির ভরবেগ $= \frac{1}{4} \times 700 = 175$ পাউণ্ড. ফুট/সেকেণ্ড [$m = 4$ আউন্স $= \frac{1}{4}$ পা.]

$\frac{\text{কামানের গোলার ভরবেগ}}{\text{গুলির ভরবেগ}} = \frac{6000}{175} = \frac{240}{7}.$

উদা. 5. 28 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুর 2 সেকেণ্ড পড়িবার পর যে ভরবেগ উৎপন্ন হয় তাহার সহিত 12 পাউণ্ড ভরের একটি কামানের গোলা সেকেণ্ডে 1000 ফুট বেগে ছুটলে যে ভরবেগ হয় তাহার তুলনা কর।

2 সেকেণ্ড পড়ার পর অর্জিত বেগ $= gt = 32 \times 2 = 64$ ফু./সে.

$$\frac{\text{বস্তুর ভরবেগ}}{\text{কামানের গোলার ভরবেগ}} = \frac{28 \times 64}{12 \times 1000} = \frac{56}{375}.$$

উদা. 6. 16 পাউণ্ড ভরের বস্তুর উপর ক্রিয়া করিলে যে-বল 10 ফুট-সেকেণ্ড একক ত্বরণ উৎপন্ন করে সেই বলের মান (i) পাউণ্ডালে এবং (ii) পাউণ্ডভারে নির্ণয় কর।

$P = mf = 16 \times 10 = 160$ পাউণ্ডাল $= \frac{160}{32} = 5$ পাউণ্ড ভার।

উদা. 7. 16 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুর উপর বল প্রয়োগের ফলে উহা স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া 5 সেকেণ্ড পরে সেকেণ্ডে 20 ফুট বেগ অর্জন করে। বলের মান নির্ণয় কর।

$v = u + ft$ সূত্র হইতে, যেহেতু $u = 0$, $v = 20$, $t = 5$

$\therefore \quad 20 = f\,5$ অর্থাৎ $f = 4$ ফু./সে^{2}

এখন $P = mf = 16 \times 4 = 64$ পাউণ্ডাল $= \frac{64}{32} = 2$ পাউণ্ড ভার।

উদা. 8. (i) 10 পাউণ্ডাল বল 2 পাউণ্ড ভরের উপর ক্রিয়া করিলে কি ত্বরণ উৎপাদিত হয়?

(ii) 10 পাউণ্ডের ভরের সমান একটি বল 20 পাউণ্ড ভরের উপর ক্রিয়া করিলে কি বল উৎপাদিত হয়?

(i) এখানে $P = 10$ পাউণ্ডাল, $m = 2$ পাউণ্ড; $f = ?$

এখন $10 = 2f \qquad f = 5$ ফু./সে^{2}.

(ii) $P = 10$ পা. ভার $= 10 \times 32$ পাউণ্ডাল, $m = 20$ পাউণ্ড, $f = ?$

$10 \times 32 = 20f; \quad \therefore \quad f = \frac{10 \times 32}{32} = 16$ ফু./সে^{2}.

উদা. 9. 25 পাউণ্ডাল বল 10 পাউণ্ড ভরের বস্তুর উপর ক্রিয়া করিলে বস্তুটি 30 সেকেণ্ডে কত দূর যাইবে?

$P = mf$ সূত্র হইতে, $25 = 10f \quad \therefore \quad f = 2{\cdot}5$ ফু./সে^{2}.

এখন $s = \frac{1}{2}ft^2 = \frac{1}{2} \times \frac{25}{10} \times 30^2 = \frac{1}{2} \times \frac{25}{10} \times 30 \times 30 = 1125$ ফুট

$\therefore$ 30 সেকেণ্ডে সরণ $= 1125$ ফুট।

উদা. 10. একটি বল এক কিলোগ্রাম ভরের উপর 10 সেকেণ্ড ক্রিয়া করিয়া উহাতে প্রতি সেকেণ্ডে 2 মিটার বেগ উৎপাদন করে। বলের মান নির্ণয় কর।

10 সেকেণ্ডে অর্জিত বেগ = সেকেণ্ডে 2 মিটার = সেকেণ্ডে 200 সেন্টিমিটার

যদি ত্বরণ f হয় তাহা হইলে $200 = f \times 10 \quad \therefore \quad f = 20$ সেমি./সে^{2}.

এখন $m = 1$ কিলোগ্রাম $= 1000$ গ্রাম

$\therefore \quad P = mf = 1000 \times 20 = 20{,}000$ ডাইন

$= \dfrac{20000}{980}$ গ্রামভার $= 20{\cdot}4$ গ্রাম ভার (আসন্ন মান)।

উদা. 11. 2 আউন্স ভরের সমান বল 2 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুর উপর প্রযুক্ত হইলে বস্তুটি স্থিরাবস্থা হইতে 64 ফুট যাইতে কত সময় লাগে ?

এখানে $P = 2$ আউন্স ভার $= \frac{2}{16}$ পা. ভার $= \frac{2}{16} \times 32$ পাউণ্ডাল $= 4$ পাউণ্ডাল,

$m = 2$ পাউণ্ড $\quad \therefore \quad 4 = 2f \,; \quad \therefore \quad f = 2$ ফু./সে^{2}.

এখন, $s = \frac{1}{2} ft^2$ সূত্র হইতে, $64 = \frac{1}{2} \times 2 \times t^2 \,;$ বা, $t^2 = 64$

$\therefore \quad t = 8$ সেকেণ্ড।

উদা. 12. 10 হন্দর ভরের উপর 10 সেকেণ্ড সময় ক্রিয়া করিয়া একটি বল ঘণ্টায় 6 মাইল বেগ উৎপাদন করে। বলের মান নির্ণয় কর।

10 সেকেণ্ডে উৎপাদিত বেগ = ঘণ্টায় 6 মাইল $= \frac{44}{5}$ ফু./সে.

$\therefore \quad \dfrac{44}{5} = f \times 10 \,; \quad$ বা, $f = \dfrac{44}{50}$ ফু./সে^{2}।

এখন $m = 10$ হন্দর $= 1120$ পাউণ্ড

$\therefore \quad P = 1120 \times \frac{44}{50} = 985{\cdot}6$ পাউণ্ডাল।

উদা. 13. 10 গ্রাম ভরের সমান বল 81 গ্রাম ভরের বস্তুর উপর প্রযুক্ত হইয়া 2 সেকেণ্ড সময় ক্রিয়া করিলে কত বেগ উৎপাদিত হয় ? বস্তুটি এই সময়ে কতদূর যায় ? দুই সেকেণ্ড পরে যদি বলের ক্রিয়া বন্ধ হয় তাহা হইলে পরবর্তী মিনিটে বস্তুটি কতদূর যাইবে ? [$g = 981$ সেমি./সে^{2}.]

এখানে $P = 10$ গ্রাম ভার $= 9810$ ডাইন, $m = 81$ গ্রাম, $f = ?$

$P = mf$ সূত্র হইতে, $9810 = 81f$

$\therefore \quad f = \dfrac{9810}{81} = \dfrac{1090}{9}$ সেমি./সে^{2}

এখন, 2 সেকেণ্ডে অর্জিত বেগ $v = ft = \dfrac{1090}{9} \times 2 = \dfrac{2180}{9} = 242\frac{2}{9}$ সেমি./সে.

2 সেকেণ্ডে সরণ $= \frac{1}{2} ft^2 = \frac{1}{2} \times \dfrac{1090}{9} \times 2^2 = \dfrac{2180}{9} = 242\frac{2}{9}$ সে. মি.

2 সেকেণ্ডে অর্জিত বেগ $242\frac{2}{3}$ সেমি./সে. ; বলের ক্রিয়া না থাকিলে এই সমবেগে বস্তুটি চলিবে।

∴ 1 মিনিট বা 60 সেকেণ্ডে সরণ $= 242\frac{2}{3} \times 60 = 14533\frac{1}{3}$ সেমি.।

উদা. 14. একটি রেলগাড়ির ভর 100 টন ; এঞ্জিন ইহাকে $2\frac{1}{2}$ টন ভরের সমান বলে টানিতে থাকিলে কত পথ অতিক্রম করার পর ইহার বেগ ঘণ্টায় 60 মাইল হইবে?

এখানে প্রযুক্ত বল $P = 2\frac{1}{2}$ টনের ভার $= \frac{5}{2} \times 2240 \times 32$ পাউণ্ডাল

ভর $m = 100$ টন $= 100 \times 2240$ পাউণ্ড।

এখন $P = mf$ সমীকরণ হইতে

$\frac{5}{2} \times 2240 \times 32 = 100 \times 2240 f \quad \therefore \quad f = \dfrac{5 \times 32}{2 \times 100} = \frac{4}{5}$ ফু./সে^{2}.

মনে কর, s ফুট পথ অতিক্রম করিয়া বেগ $v =$ ঘণ্টায় 60 মাইল $=$ সেকেণ্ডে 88 ফুট।

$v^2 = 2fs$ সূত্র হইতে, $88^2 = 2 \times \frac{4}{5} s$

$\therefore \quad s = \dfrac{88 \times 88 \times 5}{8} = 440 \times 11$ ফুট $= \frac{11}{12}$ মাইল।

[**দ্রষ্টব্য** :—এই প্রশ্নে গাড়ী চলিবার সময় বিপরীত দিকে ঘর্ষণ ও অন্যান্য বাধা ধরা হয় নাই।]

✓**উদা. 15.** 100 টন ভরের একটি রেলগাড়ি ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে যাইতেছিল। ব্রেক কষিয়া ইহার উপর বল প্রয়োগ করিবার ফলে ইহা 10 সেকেণ্ডে স্থিরাবস্থায় আসে। এই সময়ে গাড়িটি কত পথ অতিক্রম করে? বলের মান নির্ণয় কর।
[C. U. 1940]

এখানে $m = 100$ টন $= 100 \times 2240$ পাউণ্ড,

ঘণ্টায় 60 মাইল বেগ $=$ সেকেণ্ডে 88 ফুট বেগ।

যেহেতু সেকেণ্ডে 88 ফুট বেগ 10 সেকেণ্ডে শূন্য হইয়া পড়ে $v = u - ft$ সূত্র ব্যবহার করিয়া

$0 = 88 - f \times 10 \quad \therefore \quad f = \frac{88}{10}$ ফু./সে^{2}.

যদি রেলগাড়ি স্থির অবস্থায় আসিবার পূর্বে x ফুট যায়, তাহা হইলে

($v^2 = u^2 - 2fs$ সূত্র ব্যবহার করিয়া) $0 = 88^2 - 2 \times \frac{88}{10} x$

$\therefore \quad x = \dfrac{880}{2} = 440$ ফুট

এখন $P = 100 \times 2240 \times \dfrac{88}{10}$ পাউণ্ডাল $= \dfrac{100 \times 88}{10 \times 32}$ টন ভার

$= \dfrac{880}{32} = 27\frac{1}{2}$ টন ভার।

উদা. 16. স্টীম বন্ধ করিয়া দিলে 440 ফুট পথ অতিক্রম করিয়া একটি রেল গাড়ির বেগ ঘণ্টায় 30 মাইল হইতে ঘণ্টায় 15 মাইলে পরিণত হয়। যদি গাড়ির ভর 80 টন হয় তাহা হইলে গাড়ির উপর কি বাধা ক্রিয়া করিতেছিল? স্থিরাবস্থায় আসিবার পূর্বে গাড়ি আর কতদূর যাইবে?

ঘণ্টায় 30 মাইল বেগ = সেকেণ্ডে 44 ফুট;

ঘণ্টায় 15 মাইল বেগ = সেকেণ্ডে 22 ফুট।

$u=44$ ফু./সে., $v=22$ ফু./সে., $s=440$ ফুট,

মনে কর, সমমন্দন f. তাহা হইলে $v^2=u^2-2fs$ সমীকরণ হইতে,

$22^2=44^2-2f.440$; বা, $2f.440=44^2-22^2=(44+22)(44-22)$

$$\therefore \quad f=\frac{66\times 22}{2\times 440}=\tfrac{33}{20} \text{ ফু./সে.}^2$$

এখন $m=80$ টন $=80\times 2240$ পাউণ্ড

বাধা $P=mf=80\times 2240\times \frac{33}{20}$ পাউণ্ডাল $=\dfrac{80\times 2240\times 33}{20\times 32}$ পা. ভার

$$=\frac{80\times 33}{32\times 20} \text{ টন ভার} = 4\tfrac{1}{8} \text{ টন ভার।}$$

আরও x ফুট অতিক্রম করিয়া যদি গাড়ি থামিয়া যায় অর্থাৎ $v=0$ হয় তাহা হইলে $v^2=u^2-2fx$ সূত্র ব্যবহার করিয়া $0=22^2-2\times\frac{33}{20}x$

$$\therefore \quad x=\frac{22\times 22\times 20}{2\times 33}=\frac{440}{3}=146\tfrac{1}{3} \text{ ফুট।}$$

উদা. 17. এঞ্জিনবাদে একটি রেলগাড়ির ভর 435 টন। স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া ইহা 7 মিনিটে ঘণ্টায় 40 মাইল বেগ অর্জন করে। প্রতি টনে 15 পাউণ্ড ভরের সমান বাধা ক্রিয়া করিলে গাড়ির ও এঞ্জিনের মধ্যে টান নির্ণয় কর।

[C. U. 1935, 1950 (Comp.)]

7 মিনিট অর্থাৎ 7×60 সেকেণ্ডে অর্জিত বেগ = ঘণ্টায় 40 মাইল অর্থাৎ সেকেণ্ডে $\frac{44}{3}\times 4$ ফুট। $\therefore$ $v=ft$ সূত্রের সাহায্যে

$$\frac{44\times 4}{3}=f\times 420 \text{ ; বা, } f=\frac{44\times 4}{3\times 420} \text{ ফু./সে}^2.$$

মনে কর এঞ্জিন এবং গাড়ীর মধ্যে ক্রিয়াশীল গড় বল P পাউণ্ডাল

বাধা $=435\times 15$ পা. ভার $=435\times 15\times 32$ পাউণ্ডাল

গাড়ির ভর $m=435$ টন $=435\times 2240$ পাউণ্ড

এখন $P-435\times 15\times 32=435\times 2240\times \dfrac{44}{3\times 105}$

$$\therefore\quad P=435\times32\times5\left(3+\frac{44\times14}{3\times105}\right) \text{ পাউণ্ডাল}$$

$$=435\times5\left(3+\frac{88}{45}\right)=\frac{435}{9}\times223=10778\tfrac{1}{3} \text{ পাউণ্ড ভার।}$$

দ্রষ্টব্য :—এখানে গাড়ীর গতির দিকে ক্রিয়মাণ লব্ধিবল ($P-$বাধা).

উদা. 18. একটি 4 পাউণ্ড ভরের বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে 200 ফুট পতিত হয়। তৎপর ইহা কাদার ভিতর প্রবেশ করিয়া থামিয়া গেল। কাদার গড় বাধা নির্ণয় কর। [U. P. 1940]

200 ফুট পতনজ বেগ = $\sqrt{2\times32\times200}$

2 ফুট সরণের পর বেগ শূন্যতে পরিণত হয়, ধর f মন্দন

$\therefore\quad 0=u^2-2fs$ হইতে

$$0=2\times32\times200-2f.2 \qquad \therefore\quad f=3200 \text{ ফু./সে}^2.$$

ধর, কাদার গড় বাধা P, কাদার ভিতর দিয়া চলিবার কালে বস্তুটির উপর ক্রিয়মাণ বল ঊর্ধ্বাভিমুখে বাধা P এবং নিম্নাভিমুখে ভার $4g$.

$\therefore\quad P-4\times32=4\times3200$;

বা, $P=4(32+3200)$ পাউণ্ডাল $=4\times101=404$ পাউণ্ড ভার।

উদা. 19. 100 পাউণ্ড ভরের একটি গোলা সেকেণ্ডে 1600 ফুট বেগে একটি লক্ষ্য ভেদ করে। লক্ষ্যের ভিতর প্রবেশ করিবার সময় যদি ইহা 12000 টন ভরের সমান বাধা পায় তাহা হইলে লক্ষ্যের ভিতর ইহা কতদূর প্রবেশ করিবে?

[C. U. 1933]

মনে কর, লক্ষ্য ভেদ করিবার কালে f সমমন্দন ক্রিয়া করে। এখানে ক্রিয়মাণ বল লক্ষ্যের বাধা $=12000$ টন ভার $=12000\times2240\times32$ পাউণ্ডাল

$\therefore\quad 12000\times2240\times32=100f$; $\therefore\quad f=120\times2240\times32$ ফু./সে^{2}.

ধর লক্ষ্যের ভিতরে x ফুট প্রবেশ করিবার পর গুলি স্থিরাবস্থায় আসে

তাহা হইলে $v^2=u^2-2fs$ সূত্র ব্যবহার করিয়া

$$0=1600^2-2\times120\times2240\times32x$$

$$\therefore\quad x=\frac{1600\times1600}{2\times120\times2240\times32}=\frac{50}{336} \text{ ফুট}=\frac{50\times12}{336}=1\tfrac{11}{14} \text{ ইঞ্চি।}$$

দ্রষ্টব্য :—এখানে গুলির ভার গতির লম্বাভিমুখে বলিয়া গতিতে ইহার কোন ক্রিয়া নাই।

উদা. 20. 980 ডাইন বল 5 গ্রাম ভরের একটি বস্তুর উপর ঊর্ধ্বাভিমুখে প্রযুক্ত হইলে বস্তুটির ত্বরণ কত হইবে?

মনে কর ত্বরণ f, এখানে লব্ধিবল নিম্নাভিমুখে $(5\times980-980)$ ডাইন, $m=5$ গ্রাম
$P=mf$ সূত্রে হইতে $4\times980=5f$.

ইহা হইতে $f=\frac{4\times980}{5}=784$ সেমি/সে.^{2} (লম্বাভিমুখে)

উদা. 21. একজন 12 স্টোন ভারের লোক লিফ্‌টে করিয়া 8 ফু./সে.^{2} ত্বরণে নামিতেছে; লিফ্‌টের উপর কি পরিমাণ চাপ পড়িবে? লোকটি যদি এই ত্বরণে উপরদিকে উঠে তাহা হইলেই বা চাপ কত হইবে? [1 স্টোন=14 পাউণ্ড]
[C. U. 1943]

প্রথম ক্ষেত্রে, মনে কর, চাপ R_1, লোকটির ত্বরণ f নিম্নাভিমুখে, অতএব লব্ধিবল নিম্নাভিমুখে। লোকটির উপর দুইটি বল ক্রিয়া করিতেছে; তাহার ভার নীচের দিকে এবং লিফ্‌টের প্রতিক্রিয়া R_1 ঊর্ধ্বাভিমুখে।

$$\therefore\quad 12\times14\times32-R_1=12\times14f=12\times14\times8$$

$$\therefore\quad R_1=12\times14(32-8)=12\times14\times24 \text{ পাউণ্ডাল}$$

$$=\frac{12\times14\times24}{32}=9\times14 \text{ পাউণ্ড ভার}=9 \text{ স্টোন ভার}$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, যখন লিফ্‌টে লোকটি f ত্বরণে উঠিতেছে তখন চাপ মনে কর R_2

এখানে $R_2-12\times14\times32=12\times14\times8$

$$\therefore\quad R_2=12\times14(32+8)=12\times14\times40 \text{ পাউণ্ডাল}$$

$$=\frac{12\times14\times40}{32\times14} \text{ স্টোন ভার}=15 \text{ স্টোন ভার।}$$

উদা. 22. 4 আউন্স ভরের গুলি সেকেণ্ডে 1200 ফুট বেগে ছুটিতেছে। কি পরিমাণ বল ইহাকে 1 সেকেণ্ড সময়ে থামাইয়া দিতে পারে। [Patna U. 1944]

মনে কর P সম বল, যদি মন্দন f হয় তাহা হইলে

$v^2=u^2-2fs$ সূত্র ব্যবহার করিয়া $0=1200-g\times1$; $\therefore f=1200$ ফু./সে.^{2}

এখন $P=\frac{4}{16}\times1200=300$ পাউণ্ডাল।

উদা. 23. 200 গ্রাম ভরের একটি বস্তুর উপর ঊর্ধ্বাভিমুখে 240 গ্রাম ভার বল প্রয়োগ করিলে ইহা কি ত্বরণে উঠিবে? ইহাকে 50 মিটার উঠাইতে কি সময় লাগিবে? [$g=980$ সে মি./সে^{2}]

ঊর্ধ্বাভিমুখে লব্ধি বল $=240g-200g=40g$

$$\therefore\quad 40g=200f\ ;\ \text{বা, } f=\frac{40}{200}g=\frac{1}{5}\times980=196 \text{ সেমি./সে.}^2$$

$s=\frac{1}{2}ft$ সূত্র ব্যবহার করিয়া $50\times100=\frac{1}{2}\times196\times t^2$

বা, $t^2=\frac{100\times100}{196}$ $\therefore$ $t=\frac{100}{14}=7\frac{1}{7}$ সেকেণ্ড।

উদা. 24. কূপ হইতে এক বালতি জল 4 ফুট/সে^{2}. সমত্বরণে উঠান হইতেছে। জল ভরতি বালতির ভার 20 পাউণ্ড হইলে দড়িতে কি বল প্রয়োগ করা হইয়াছে?

মনে কর, প্রযুক্ত বল P পাউণ্ডাল।

বালতির উপর ঊর্ধ্বাভিমুখী বল P এবং নিম্নাভিমুখী বল জলসহ বালতির ভার $20g$ পাউণ্ডাল। অতএব লব্ধিবল ঊর্ধ্বাভিমুখে $P-20g$

এখন $P-20g=20\times4$ $\therefore$ $P=20\times4+20\times32=80+640$ পাউণ্ডাল

$=\dfrac{720}{32}$ পা. ভার $=22\frac{1}{2}$ পা. ভার।

✓**উদা. 25.** একটি বস্তুর ভর 2 পাউণ্ড ; ইহা সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগে পড়িতেছে। কি বল প্রয়োগ করিলে ইহা (i) 2 সেকেণ্ড সময়ে থামিয়া যাইবে? (ii) 4 ফুট গিয়া থামিয়া যাইবে?

(i) সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগ 2 সেকেণ্ড সময়ে শূন্যে পরিণত হয়।

$v=u-ft$ সূত্র ব্যবহার করিয়া $0=80-f.2$ $\therefore$ $f=40$ ফু./সে^{2}.

যদি P বল ক্রিয়া করে তাহা হইলে $P-2\times32=2\times40$

যদি $P=2\times72=144$ পাউণ্ডাল $=\dfrac{144}{32}=4\frac{1}{2}$ পা. ভার।

(ii) সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগ 4 ফুট অতিক্রম করিয়া শূন্যে পরিণত হয়

$v^2=u^2-2fs$ সূত্র ব্যবহার করিয়া $0=40^2-2f.4$

$\therefore$ $f=\dfrac{80\times80}{8}=800$ ফু./সে^{2}.

যদি F বল ক্রিয়া করে তাহা হইলে $F-2\times32=2\times800$

$\therefore$ $F=2\times832$ পাউণ্ডাল $=\dfrac{2\times832}{39}=52$ পা. ভার।

✓**উদা. 26.** একটি 4 পাউণ্ড গোলা একটি কামানের মুখ হইতে 1200 ফু./সে. বেগে নির্গত হয়। যদি গোলা কামানের নলের ভিতর 5 ফুট পথ অতিক্রম করে, তাহা হইলে গোলার উপর বারুদের গ্যাসের গড় চাপ টন ভারে নির্ণয় কর।

[Pre. Engg. 1966]

মনে কর, গড় বল P এবং f ত্বরণ। যেহেতু গোলা স্থিরাবস্থা হইতে 5 ফুট সরণের পর 1200 ফু./সে. বেগ অর্জন করে

$\therefore$ $v^2=2fs$ সূত্র ব্যবহার করিয়া $1200^2=2f.5$

$\therefore$ $f=\dfrac{1200\times1200}{10}=(1200\times120)$ ফু./সে^{2}.

এখন $P=4\times1200\times120$ পাউণ্ডাল $=\frac{4\times1200\times120}{32}$ পা. ভার

$$=\frac{480\times1200}{32\times2240} \text{ টন ভার}=\frac{225}{28}=8\tfrac{1}{28} \text{ টন ভার।}$$

উদা. 27. m ভরের একটি গোলা v সেমি./সে. বেগে কামান হইতে ছোড়া হয়; কামানের নলের দৈর্ঘ্য s সেন্টিমিটার। দেখাও যে যতক্ষণ নলের ভিতর গোলা চলে ততক্ষণ গোলার উপর গড় বল $\frac{mv^2}{2s}$ ডাইন।

মনে কর গড় বল P এবং ত্বরণ f.

যেহেতু গোলা স্থিরাবস্থা হইতে s সেন্টিমিটার সরণের পর v বেগ অর্জন করে,

$\therefore\ v^2=2fs$ এবং $f=\frac{v^2}{2s}$. এখন $P=mf=\frac{mv^2}{2s}$ ডাইন।

উদা. 28. বালিসহ একটি বেলুন f ত্বরণে উঠিতেছে। প্রমাণ কর যে, ত্বরণ দ্বিগুণ করিতে হইলে ভরের $\frac{f}{2f+g}$ অংশ পরিমাণ বালি ফেলিয়া দিতে হইবে। ধরা হইয়াছে, বেলুনের উপর বায়ুর উর্ধ্বমুখীচাপ অপরিবর্তিত থাকে এবং বাতাসের বাধার কোন ক্রিয়া নাই।

মনে কর বেলুনের ভার W এবং যে পরিমাণ বালি ফেলিয়া দেওয়া হইয়াছে তাহার ভার x, ধর P উর্ধ্বাভিমুখী চাপ

প্রথমে $P-W=\frac{W}{g}\times f\ \cdots$(i) পরে $P-(W-x)=\frac{W-x}{g}\times2f\ \cdots$(ii)

(ii) হইতে (i) বিয়োগ করিয়া, $x=\frac{f}{g}\times(W-2x)$

$$\text{বা, } \left(\frac{g}{f}+2\right)\times x=W \qquad \therefore\ \frac{x}{W}=\frac{f}{2f+g}$$

উদা. 29. একটি রেলগাড়ি স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া 100তে 1 নতিবিশিষ্ট নততলে 1 মাইল পথ নীচের দিকে নামে। যদি প্রতি টনে 8 পাউণ্ড ভরের সমান বাধা ক্রিয়া করে তাহা হইলে গাড়িটি নততলের পাদদেশে অনুভূমিক সমতলে কতদূর নীত হইবে? [U. P. 1941]

ধর, গাড়ির ভর m টন ; তল বরাবর নিম্নাভিমুখে ভারের বিশ্লেষিতাংশ $2240\,mg\,\frac{1}{100}$ এবং বিপরীত দিকে বাধা $8mg$ পাউণ্ডাল

$\therefore\ 2240\,mg\,\frac{1}{100}-8mg=2240mf$

$$\therefore\ f=\frac{g}{100}-\frac{8g}{2240}=\frac{36}{175} \text{ ফু./সে.}^2$$

1 মাইল বা 1760 × 3 ফুট সরণের পর অর্জিত বেগ v হইলে

$$v^2=2\times\frac{36}{175}\times1760\times3$$

অনুভূমিক তলে যখন গাড়ী চলে তখন ক্রিয়মাণ বল প্রতি টনে 8 পা. ভার বাধা (গতির বিপরীত দিকে)। এখন মন্দন যদি f' হয়

$$8mg=m\times2240f'\ ;\quad \therefore\ f'=\frac{8\times32}{2240}=\frac{4}{35}\text{ ফু./সে.}^2$$

এখন x ফুট চলিয়া যদি গাড়ী থামিয়া যায় তাহা হইলে,

$$0=\frac{2\times36}{175}\times1760\times3-2\times\frac{4}{35}\times x$$

$$\therefore\quad x=\frac{36\times1760\times3\times35}{175\times4}\text{ ফুট}=\frac{9}{5}\text{ মাইল।}$$

উদা. 30. একটি এঞ্জিন 300 টন ভারের একটি রেলগাড়িকে 150-এ 1 নতিবিশিষ্ট নততলে টানিয়া তুলিতেছে। যদি বাধা সম হয় এবং ইহা গাড়ির ভারের $\frac{1}{40}$ হয় এবং গাড়ির ত্বরণ 3 ফু./সে^{2}. হয়, তাহা হইলে এঞ্জিনের টান নির্ণয় কর।

মনে কর P এঞ্জিনের টান। গাড়ীর উপর এঞ্জিনের টান তল বরাবর উপর দিকে এবং গাড়ীর ভারের বিশ্লেষিতাংশ ও বাধা নীচের দিকে ক্রিয়া করিতেছে।

$$\therefore\quad P-300\times2240g\times\tfrac{1}{150}-\tfrac{1}{40}(30\times2240g)=300\times2240\times3$$

$$\therefore\quad P=300\times2240\times\left(3+\frac{9}{150}+\frac{9}{40}\right)\text{ পাউণ্ডাল}$$

$$=\frac{300}{32}\left(3+\frac{1}{150}+\frac{1}{40}\right)\text{ টন ভার}=37\tfrac{5}{8}\text{ টন ভার।}$$

উদা. 31. ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে ধাবমান একটি রেলগাড়ি 280তে 1 নতিবিশিষ্ট এক নততলের পাদদেশে আসিয়া পৌঁছে। ঘর্ষণ প্রভৃতির জন্য রোধ প্রতিটনে 8 পাউণ্ড ভার হইলে থামিবার পূর্বে গাড়ি তল বরাবর উপরদিকে কতদূর যাইবে?

যখন নততলে গাড়িটি চলে তখন গতির বিপরীত দিকে বিশ্লেষিতাংশ এবং বাধা ক্রিয়মাণ। মনে কর গাড়ীর মন্দন f এবং ভর m টন, তাহা হইলে

$$2240mg\times\tfrac{1}{280}+8mg=m\times2240f.$$

$$\therefore\quad f=\frac{g}{280}+\frac{8g}{2240}=\frac{2g}{280}=\frac{64}{280}=\frac{8}{35}\text{ ফু./সে}^2.$$

ঘণ্টায় 15 মাইল বেগ = সেকেণ্ডে 22 ফুট বেগ

মনে কর x ফুট সরণের পর সেকেণ্ডে 22 ফুট বেগ শূন্যে পরিণত হয়

তাহা হইলে $0=22^2-2\times\frac{8}{35}x$

$$\therefore\quad x=\frac{22\times22\times35}{16}\text{ ফুট}=1058\tfrac{3}{4}\text{ ফুট।}$$

প্রশ্নমালা—V

1. সেকেণ্ডে 1000 ফুট বেগে ধাবমান 4 আউন্স ভরের একটি গুলির ভরবেগ নির্ণয় কর।

2. (i) 2 পাউণ্ড ভরের বস্তু 2 সেকেণ্ড পড়িবার পর কত ভরবেগ অর্জন করে? (ii) 200 গ্রাম ভরের বস্তু 10 মিটার পড়িবার পর কত ভরবেগ অর্জন করে?

3. মসৃণ সমতলের উপর 10 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু রাখিয়া উহার উপর অনুভূমিক দিকে 4 পাউণ্ড ভারের সমান বলপ্রয়োগ করা হইল। ইহা 10 সেকেণ্ডে কতদূর যাইবে?

4. 300 টন ভরের একটি রেলগাড়ি ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে চলিতেছে। স্টীম বন্ধ করিয়া দিলে ব্রেকের দ্বারা ইহা 50 গজ পথ যাওয়ার পর থামে। বল সম হইলে তাহার মান নির্ণয় কর।

5. 10 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে 10 ফুট পতিত হয়; তারপর ইহা বালির ভিতর 1 ফুট প্রবেশ করিয়া স্থিরাবস্থায় আসে। বালির বাধা নির্ণয় কর।

6. বিনা বাধায় অভিকর্ষ ক্রিয়ায় 3 পাউণ্ড-ভার একটি বস্তু 4 সেকেণ্ড পড়িতেছিল। কোন্ উর্ধ্বাভিমুখী বল প্রয়োগে উহা 64 ফুট চলিলে স্থিরাবস্থায় আসিবে? [H. S. 1960]

7. একটি রেলগাড়ির ভর 80 টন; এঞ্জিন ইহাকে 2 টন ভরের সমান বলের দ্বারা টানিতেছে। কত সময়ে গাড়ি ঘণ্টায় 45 মাইল বেগ অর্জন করিবে?

8. 3 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুর উপর বল প্রয়োগের ফলে উহা স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া 5 সেকেণ্ড পরে 10 ফুট / সেকেণ্ড বেগ অর্জন করে। বলের মান নির্ণয় কর। যদি 5 সেকেণ্ড পরে এই বলটির ক্রিয়া বন্ধ হয়, যে বাধা ক্রিয়া করিয়া ইহা 10 সেকেণ্ডে স্থিরাবস্থায় আনিবে তাহার মান নির্ণয় কর। [H. S. 1962]

9. এঞ্জিন বাদ দিয়া একটি রেলগাড়ির ভর 400 টন; অনুভূমিক সমতলে স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া ইহা 10 মিনিটে ঘণ্টায় 30 মাইল বেগ অর্জন করে। যদি প্রতিটনে 15 পাউণ্ড ভারের সমান বাধা ক্রিয়া করে এবং এঞ্জিন সমভাবে গাড়িটি টানে তাহা হইলে গাড়ির উপর এঞ্জিনের টান নির্ণয় কর।

10. 2 আউন্স ভরের একটি বস্তু সেকেণ্ডে 1280 ফুট বেগে চলিবার সময় 1600 পাউণ্ড ভারের একটি বাধার সম্মুখীন হয়। বস্তুটি কতদূরে এবং কত সময়ে স্থিরাবস্থায় আসিবে? [H. S. 1962]

11. 100 টন ভারের একটি রেলগাড়িকে 100 তে 1 নতিবিশিষ্ট এক নততলে

টানিয়া উঠান হইতেছে। যদি রোধ প্রতি টনে 8 পাউণ্ড ভার হয় এবং এঞ্জিন সমভাবে 2 টন ভার বলে টানে তাহা হইলে গাড়ির ত্বরণ নির্ণয় কর।

12. 4 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে 200 ফুট পতিত হয় এবং অতঃপর কাদার ভিতর 2 ফুট প্রবেশ করিয়া স্থিরাবস্থায় আসে কাদার গড় ঘাত নির্ণয় কর। [U. P. 1940]

13. 100 টন ওজনের একটি ট্রেন ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে একটি সরলরেখায় চলিতেছে এবং একটি নির্দিষ্ট বল প্রয়োগে 10 সেকেণ্ডে উহাকে স্থিরাবস্থায় আনা হইল। বল প্রয়োগের পর ট্রেনটি স্থিরাবস্থায় আসিতে কত পথ অতিক্রম করিয়াছিল এবং বলের মান কত ছিল নির্ণয় কর? [C. U. 1940]

14. 4 পাউণ্ড ভরের একটি গুলিকে কতবেগে ছুঁড়িলে ইহা 10 ইঞ্চি পুরু একটি দেওয়ালকে ঠিক ভেদ করিতে পারে। দেওয়ালের গড় বাধা 42 টন ভার।
[U. P. 1933]

15. 100 তে 1 নতিবিশিষ্ট একটি নততলে একটি ট্রেন স্থিরাবস্থা হইতে 1 মাইল নীচের দিকে নামিল। নততলের রোধ প্রতি টনে 8 পাউণ্ড হইলে, নততলের পাদদেশে অনুভূমিক তলে ট্রেনটি আর কতদূর যাইবে? [U. P. 1941]

16. একটি দড়ি দ্বারা W ভারের একটি বস্তুকে স্থিরাবস্থা হইতে h উচ্চতায় স্থিরাবস্থায় তোলা হইল। দড়িটি যে সর্বাধিক টান সহ্য করিতে পারে তাহার মান হইল nW. প্রমাণ কর যে, ক্ষুদ্রতম সময়ে বস্তুটিকে উচ্চতায় তোলা যাইবে তাহার মান হইল $\left\{\dfrac{2nh}{(n-1)g}\right\}^{\frac{1}{2}}$.

17. m-ভরের একটি কণার উপর মূলবিন্দু অভিমুখে $m\left(x+\dfrac{a^4}{x^2}\right)$ পরিমাপের একটি বল প্রযুক্ত হইল। কণাটি মূল বিন্দু হইতে a দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দু হইতে যাত্রা শুরু করিল, প্রমাণ কর যে মূলবিন্দুতে পৌঁছাইতে উহার সময় লাগিবে $\dfrac{\pi}{4}$.

18. x অক্ষে গতিশীল m-ভরের একটি কণার উপর একটি আকর্ষণ বল প্রযুক্ত হইল। আকর্ষণ বলটির পরিমাণ, $\dfrac{2mk^2a^2}{x^2}$ যখন $x \geqslant a$ এবং $\dfrac{2mk^2x}{a^2}$ যখন $x < a$. কণাটি স্থিরাবস্থায় মূলবিন্দু হইতে $2a$ দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দু হইতে যাত্রা করিলে, প্রমাণ কর যে মূলবিন্দুতে পৌঁছাইবার মুহূর্তে উহার বেগ হইবে $2k\sqrt{a}$.

৬ প্রাস

(Projectiles)

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী : u=প্রক্ষেপ বেগ, α=প্রক্ষেপ কোণ,

(i) t সময় পরে উহার অনুভূমিক দিকে সরণ $(x)=u\cos\alpha.t$ এবং উল্লম্ব দিকে সরণ $(y)=u\sin\alpha.t-\frac{1}{2}gt^2$.

(ii) সর্বোচ্চ উচ্চতা (H)-এ পৌঁছিতে সময় T_1 হইলে,

$$T_1=\frac{u\sin\alpha}{g} \text{ এবং } H=\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

(iii) উড্ডীনকাল=T এবং পাল্লা=R হইলে,

$$T=\frac{2u\sin\alpha}{g} \text{ এবং } R=\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}.$$

(iv) h উচ্চতায় বেগ v হইলে এবং অনুভূমিক তলের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করিলে, v-বেগের অনুভূমিক উপাংশ$=u\cos\alpha$.

এবং উল্লম্ব দিকে উপাংশ$=\sqrt{u^2\sin^2\alpha-2gh}$

$$v=\sqrt{u^2-2gh} \text{ এবং } \tan\theta=\frac{\sqrt{u^2\sin^2\alpha-2gh}}{u\cos\alpha}.$$

(v) বায়ুহীন শূন্যে প্রাসের গতিপথ অধিবৃত্তাকার। যদি কোন বস্তুকে O হইতে u বেগে অনুভূমিকের সহিত α কোণে প্রক্ষিপ্ত করা হয় এবং t সময় পরে উহার অবস্থান $P(x, y)$ হয়, তাহা হইলে, প্রাসের গতিপথের সমীকরণ হইবে,

$$y=x\tan\alpha-\frac{g}{2u^2\cos^2\alpha}.x^2$$

উদাহরণমালা—VI

উদা. 1. একটি বস্তুকে 64 ফুট উচ্চ মিনারের চূড়া হইতে সেকেণ্ডে 72 ফুট বেগে অনুভূমিক দিকে প্রক্ষেপ করা হইলে, (i) ইহার ভূতলে পৌঁছিতে কত সময় লাগে ? (ii) ইহা মিনারের পাদদেশ হইতে কতদূরে ভূতলে পড়িবে ? (iii) ভূতলে পড়িবার সময় ইহার বেগ নির্ণয় কর।

(i) উল্লম্বদিকে প্রারম্ভিক বেগ 0 (শূন্য) ; বস্তু যখন ভূতলে আসে তখন তাহার উল্লম্বদিকে সরণ 64 ফুট,

উল্লম্বদিকে গতি বিবেচনা করিয়া

$$64=\frac{1}{2}gt^2=16t^2\ ; \quad \therefore\ t^2=4,\ t=2 \text{ সেকেণ্ড}$$

(ii) যখন বস্তু ভূমিতে আসে তখন মিনারের পাদদেশ হইতে ইহার দূরত্ব

$=2$ সেকেণ্ড অনুভূমিক দিকে সরণ

$=2\times64=128$ ফুট।

(iii) ভূতলে পড়িবার কালে অনুভূমিক বেগ $=72$ ফু./সে.

উল্লম্ব বেগ $=gt=32\times2=64$ ফু./সে.

$\therefore$ ভূতলে পৌঁছিবার কালে বেগ $=\sqrt{72^2+64^2}=8\sqrt{9^2+8^2}$

$=8\sqrt{145}=8\times12{\cdot}04=96{\cdot}32$ ফু./সে.

উদা. 2. একটি গুলি 16 ফুট উঁচু হইতে অনুভূমিক দিকে ছোঁড়া হইল এবং ইহা 500 ফুট অনুভূমিক দূরত্বে গিয়া ভূতলে পতিত হইল। ইহার প্রারম্ভিক বেগ নির্ণয় কর।

মনে কর, মাটিতে পৌঁছিতে t সেকেণ্ড সময় লাগে এবং প্রারম্ভিক বেগ u ; উল্লম্বদিকে গতি বিবেচনা করিয়া

$$16=\tfrac{1}{2}gt^2=16t^2,\quad t^2=1\ ;\quad \therefore\quad t=1 \text{ সেকেণ্ড}$$

এখন অনুভূমিক গতি আলোচনা করিয়া, $500=u\times1$; $\therefore$ $u=500$ ফু./সে.

উদা. 3. একটি বস্তু সেকেণ্ডে 200 ফুট বেগে অনুভূমিক তলের সহিত α কোণ করিয়া প্রক্ষিপ্ত হইল। যদি $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ হয় ; তাহা হইলে (i) বস্তুটি কত উচ্চতা লাভ করিতে পারে, (ii) উত্থিতিকাল এবং অনুভূমিক তলে প্রক্ষেপ সীমা নির্ণয় কর ; (iii) 200 ফুট উচ্চতায় বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

প্রারম্ভিক অনুভূমিক বেগ $=200\cos\alpha=200\times\frac{4}{5}=160$ ফু./সে.

$[\because\ \sin\alpha=\frac{3}{5}\ ;\ \therefore\ \cos\alpha=\frac{4}{5}]$

প্রারম্ভিক উল্লম্ববেগ $=200\sin\alpha=200\times\frac{3}{5}=120$ ফু./সে.

(i) মনে কর H চরম উচ্চতা ; যেহেতু চরম উচ্চতায় উল্লম্ব দিকে বেগ শূন্য,

$\therefore$ $0=120^2-2\times32.H$; $H=\dfrac{120\times120}{64}=225$ ফুট.

(ii) মনে কর t উত্থিতকাল, যেহেতু t সময়ে উল্লম্বদিকে সরণ শূন্য,

$\therefore$ $0=120t-\frac{1}{2}.32\,t^2$; ইহা হইতে $t=7\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড।

(iii) মনে কর 200 ফুট উচ্চতায় বেগ v এবং বেগ অনুভূমিকের সঙ্গে θ কোণ করে তাহা হইলে, $v\cos\theta=160$ ফু./সে.

$v\sin\theta=\sqrt{120^2-2\times32\times200}=8\sqrt{15^2-200}$

$=8\times5=40$ ফু./সে.

বর্গ করিয়া যোগ করিলে, $v^2=160^2+40^2$

$\therefore \quad v=40\sqrt{4^2+1}=40\sqrt{17}=40\times 4{\cdot}123=164{\cdot}92$ ফু./সে.

ভাগ করিয়া, $\tan\theta=\frac{40}{160}=\frac{1}{4}$. $\theta=\tan^{-1}\frac{1}{4}$.

উদা. 4. একটি বালক উল্লম্বদিকে ঢিল ছুঁড়িয়া 50 ফুট উচ্চতায় উঠাইতে পারে। একটি ঢিল ছুঁড়িয়া সে অনুভূমিকদিকে সর্বাধিক কতদূরে নিতে পারিবে?

আমরা জানি, u উর্ধ্বদিকে প্রক্ষেপ বেগ হইলে চরম উচ্চতা

$$H=\frac{u^2}{2g}\,;\quad \therefore\ 50=\frac{u^2}{2\times 32}\,;\quad \text{বা,}\quad u^2=100\times 32$$

এখন অনুভূমিক তলে বৃহত্তম প্রক্ষেপ সীমা $=\frac{u^2}{g}=\frac{100\times 32}{32}=100$ ফুট।

উদা. 5. সেকেণ্ডে 256 ফুট বেগে অনুভূমিক দিকে ধাবমান এরোপ্লেন হইতে বোমা ফেলা হইল। ইহা 6 সেকেণ্ড পরে মাটিতে পৌঁছিলে এরোপ্লেন কত উঁচুতে ছিল নির্ণয় কর এবং মাটিতে পড়িবার ফলে ইহার বেগ নির্ণয় কর।

ধর, এরোপ্লেন h উচ্চতায় আছে, তাহা হইলে

$h=\frac{1}{2}gt^2=16\times 6^2=16\times 36=576$ ফুট।

মনে কর, মাটিতে পৌঁছিবার সময় বেগ v, তাহা হইলে

$v\cos\alpha=256$ ফু./সে. $\qquad v\sin\alpha=gt=32\times 6=192$ ফু./সে.

বর্গ করিয়া যোগ করিলে,

$v^2=256^2+192^2=(64\times 5)^2 \quad \therefore\ v=320$ ফু./সে.

উদা. 6. 160 ফুট উঁচু মিনারের শীর্ষ হইতে অনুভূমিক তলের সহিত 30° নতিতে সেকেণ্ডে 96 ফুট বেগে একটি ঢিল প্রক্ষেপ করা হইলে কতদূরে ভূপতিত হইবে?

ঢিলের প্রারম্ভিক অনুভূমিক বেগ $=96\cos 30^\circ=96\times\frac{\sqrt{3}}{2}=48\sqrt{3}$ ফু./সে.

প্রারম্ভিক উল্লম্ববেগ $=96\sin 30^\circ=96\times\frac{1}{2}=48$ ফু./সে.

মনে কর, t সময় পরে ঢিলটি মাটিতে আসিয়া পৌঁছে; এখন উল্লম্বদিকে প্রারম্ভিক বেগ $=48$ ফু./সে.; সরণ $=-160$ ফুট, ত্বরণ $=-g$.

$\therefore\ -160=48t-\frac{1}{2}gt^2 \qquad [h=ut-\frac{1}{2}gt^2]$

$-160=48t-16t^2$; বা, $t^2-3t-10=0$; বা, $(t-5)(t+2)=0$

t ঋণাত্মক হইতে পারে না; অতএব $t=5$ সেকেণ্ড

এই সময়ে অনুভূমিক দিকে বেগের কোন পরিবর্তন হয় নাই।

ঢিল যদি স্তম্ভের পাদদেশ হইতে x দূরত্বে পড়ে, তাহা হইলে

$x=5$ সেকেণ্ডে অনুভূমিক দিকে সরণ

$=48\sqrt{3}\times 5=240\sqrt{3}=416$ ফুট (প্রায়)।

উদা. 7. একটি ঢিল সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগে 45° উন্নতিতে প্রক্ষিপ্ত হইল। একই বিন্দু হইতে কত বেগে আর একটি ঢিল উল্লম্ব ঊর্ধ্বদিকে প্রক্ষিপ্ত হইলে উভয়ে একই পরিমাণ উচ্চতায় উঠিতে পারে। [Allahabad 1945]

মনে কর, দ্বিতীয় ঢিলের প্রক্ষেপ বেগ u_0

প্রথম ঢিলের লব্ধ চরম উচ্চতা $H=\frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}=\frac{80\times 80}{64}\times\frac{1}{2}=50$ ফুট

দ্বিতীয় ঢিলও এই উচ্চতা লাভ করিতে হইলে

$$50=\frac{u_0^2}{2g};\quad \text{বা,}\quad u_0^2=2\times 32\times 50$$

$\therefore\quad u_0=8\times 5\sqrt{2}=40\sqrt{2}=56{\cdot}56$ ফু./সে. (প্রায়)।

উদা. 8. একটি প্রাস 4 সেকেণ্ড সময়ে প্রক্ষেপবিন্দুগামী অনুভূমিকতলে প্রক্ষেপবিন্দু হইতে 64 গজ দূরে ফিরিয়া আসে। প্রক্ষেপবেগ নির্ণয় কর।

উত্থিতিকাল $=\frac{2u \sin \alpha}{g}$ এবং প্রক্ষেপসীমা $=\frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$

এখানে, উত্থিতিকাল = 4 সেকেণ্ড এবং প্রক্ষেপ সীমা = 64 গজ = 192 ফুট।

$$\therefore\quad \frac{2u \sin \alpha}{g}=4 \cdots\text{(i)}\quad \text{এবং}\quad \frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}=192\cdots\text{(ii)}$$

$$\therefore\quad 4u \cos \alpha=192;\ u\cos\alpha=48 \qquad \cdots\text{(iii)}$$

(i) হইতে, $u \sin \alpha=\frac{4g}{2}=\frac{4\times 32}{2}=64\cdots\text{(iv)}$

(iii) এবং (iv) হইতে, $u^2=48^2+64^2=80^2;\quad \therefore\quad u=80$ ফু./সে.

উদা. 9. একই বিন্দু হইতে দুইটি ঢিল অনুভূমিক তলের সহিত 60° এবং 30° নতিতে প্রক্ষেপ করা হয়। যদি উভয়ে সমান উচ্চতায় পৌঁছে তাহা হইলে তাহাদের প্রক্ষেপবেগের অনুপাত কত?

u বেগে অনুভূমিকের সঙ্গে α কোণে প্রক্ষিপ্ত হইলে একটি বস্তু $\frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ উচ্চতা লাভ করে। মনে কর, দুইটি ঢিলকে 60° এবং 30° নতিতে যথাক্রমে u_1 এবং u_2 বেগে প্রক্ষেপ করা হইয়াছিল।

$$\therefore\quad \frac{u_1^2 \sin^2 60^\circ}{2g}=\frac{u_2^2 \sin^2 30^\circ}{2g}$$

$$\therefore\quad \frac{u_1^2}{u_2^2}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{3};\ \frac{u_1}{u_2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

উদা. 10. একটি গুলি 100 ফুট দূরে অবস্থিত 50 ফুট উঁচু একটি প্রাচীরের ঠিক শীর্ষ অনুভূমিকভাবে অতিক্রম করে। গুলির প্রক্ষেপবেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

যেহেতু 50 ফুট উচ্চতায় গুলিটির বেগ অনুভূমিক দিকে, অতএব ইহা চরম উচ্চতা এবং প্রক্ষেপসীমার অর্ধেক = 100 ফুট।

$\therefore \quad \dfrac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 50 \cdots$(i) এবং $\dfrac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = 200 \cdot$(ii)

ভাগ করিয়া, $\dfrac{\sin \alpha}{4 \cos \alpha} = \dfrac{50}{200}$ অর্থাৎ $\tan \alpha = 1$; $\therefore \alpha = 45°$

এখন (i) হইতে, $50 = \dfrac{u^2}{2 \times 32 \times 2}$; বা, $u^2 = 100 \times 64$.

$\therefore \quad u = 80$ ফু./সে.

উদা. 11. একটি গুলি 45° নতিতে ছুঁড়িলে 109 মিটার উচ্চতা লাভ করে। প্রক্ষেপ বেগ নির্ণয় কর। [$g = 981$ সেমি./সে.^{2}]

এখানে চরম উচ্চতা = 109 মিটার = 10900 সে. মি.

$\therefore \quad 10900 = \dfrac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \dfrac{u^2 \sin^2 45°}{2 \times 981} = \dfrac{u^2}{2 \times 981 \times 2}$

$u^2 = 4 \times 981 \times 109 \times 100$

$\therefore \quad u = 2 \times 109 \times 3 \times 10$ সেমি./সে. = 6540 সেমি./সে. = 65·4 মিটার/সে.

উদা. 12. এক পাহাড়ের চূড়া হইতে অনুভূমিক দিকে সেকেণ্ডে 64 ফুট বেগে একটি ঢিল ছোঁড়া হয়। ইহা পাহাড়ের পাদদেশে প্রক্ষেপ বিন্দুর ভিতর দিয়া উল্লম্ব রেখা হইতে 320 ফুট দূরে গিয়া ভূমিতে পড়ে। পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় কর।

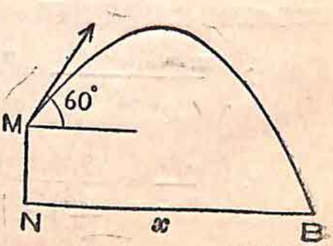
মনে কর, পাহাড়ের উচ্চতা h ; তাহা হইলে $h = \frac{1}{2}gt^2 = 16t^2$

$320 = t$ সেকেণ্ড সময়ে অনুভূমিক সরণ $= 64t$.

$\therefore \quad t = \dfrac{320}{64} = 5$ সেকেণ্ড ; এখন $h = \frac{1}{2}gt^2 = 16 \times 5^2 = 400$ ফুট।

উদা. 13. 625 ফুট উচ্চ পাহাড়ের চূড়া হইতে অনুভূমিক তলের সহিত 60° নতিতে একটি গোলা সেকেণ্ডে 400 ফুট বেগে ছুঁড়িলে ইহা কামানের মুখের ভিতর দিয়া উল্লম্ব রেখা হইতে কত অনুভূমিক দূরত্বে গিয়া পড়িবে ?

মনে কর, গুলি কামানের ভিতর দিয়া উল্লম্বরেখা হইতে x দূরে গিয়া B বিন্দুতে ভূমিতে পৌঁছে।



$y = x \tan \alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2 \cos^2 \alpha}$.

এখানে, $y = -625$ ফুট, $u = 400$ ফু./সে., $\alpha = 60°$

$$-625=\sqrt{3}x-\frac{16x^2\times 4}{400\times 400}=\sqrt{3}x-\frac{x^2}{2500};$$

বা, $x^2-2500\sqrt{3}x-2500\times 625=0$

$$\therefore\quad x=\frac{2500\sqrt{3}+\sqrt{(2500)^2\times 3+4\times 2500\times 625}}{2}$$

$$=\frac{2500\sqrt{3}\pm 50\sqrt{7500+2500}}{2}=\frac{2500\sqrt{3}\pm 50\times 100}{2}$$

$$=1250\sqrt{3}\pm 2500=2165\pm 2500.$$

সুতরাং, $x=4665$ ফুট। ($\because$ x-এর ঋণাত্মক মান হইতে পারে না।)

উদা. 14. একটি টেনিস বল 4 ফুট উচ্চতা হইতে অনুভূমিকদিকে প্রক্ষেপ করা হয়। ইহা 48 ফুট দূরে গিয়া মাটিতে পড়ে এবং 32 ফুট দূরে জাল স্পর্শ করিয়া যায়। জালের উচ্চতা নির্ণয় কর।

মনে কর, বলের প্রারম্ভিক অনুভূমিক বেগ u এবং ইহা t সময়ে মাটিতে পৌঁছে, তাহা হইলে t সময়ে বলের উল্লম্ব সরণ 4 ফুট

$\therefore\quad 4=\frac{1}{2}gt^2,\ 4=16t^2,\ t^2=\frac{4}{16};\quad \therefore\ t=\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড।

আবার এই সময়ে অনুভূমিক সরণ 48 ফুট বলিয়া, $48=u\times\frac{1}{2}$;

$\therefore\quad u=96$ ফু./সে.

জালের অনুভূমিক দূরত্ব 32 ফুট যাইতে যদি টেনিস বলটির T সময় লাগে তাহা হইলে, $32=96T\quad\therefore\ T=\frac{32}{96}=\frac{1}{3}$ সে.

এই সময়ে উল্লম্বদিকে সরণ $=\frac{1}{2}g(\frac{1}{3})^2=\frac{16}{9}$ ফুট

$\therefore$ জালের উচ্চতা $=4-\frac{16}{9}=\frac{20}{9}=2\frac{2}{9}$ ফুট।

উদা. 15. একজন বৈমানিক অনুভূমিকভাবে ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে চলিবার সময়ে 1000 ফুট উঁচু হইতে একটি বোমা ফেলে। লক্ষ্য বস্তু হইতে তাহার অনুভূমিক দূরত্ব কত হইলে বোমাটি লক্ষ্যে গিয়া পড়িবে?

প্রথমে বোমাটি মাটিতে পৌঁছিতে কি সময় লাগে তাহা নির্ণয় কর। উল্লম্বদিকে প্রারম্ভে বোমার কোন বেগ নাই। যদি t সময়ে বোমা মাটিতে পৌঁছে তাহা হইলে উল্লম্বদিকের গতি বিবেচনা করিয়া

$1000=16t^2$; $\therefore\ t^2=\frac{1000}{16},\ t=\frac{10\sqrt{10}}{4}=2{\cdot}5\sqrt{10}$ সে.

অনুভূমিক বেগ $=30$ মা./ঘ. $=44$ ফু./সে.

$\therefore$ বৈমানিকের অনুভূমিক দূরত্ব $=44\times 2{\cdot}5\sqrt{10}=347{\cdot}82$ ফুট (প্রায়)।

উদা. 16. একটি ক্রিকেট বল 6 ফুট উঁচু হইতে অনুভূমিক তলের সহিত 30° নতিতে সেকেণ্ডে 60 ফুট বেগে ছোঁড়া হইল। একজন খেলোয়াড় ইহাকে মাটি হইতে 2 ফুট উপরে ধরিল। দুইজন খেলোয়াড় কত ব্যবধানে ছিল?

মনে কর t সেকেণ্ড পরে বলটি দ্বিতীয় খেলোয়াড়ের হাতে পৌঁছে। এই সময়ে উল্লম্ব সরণ $=-(6-2)=-4$ ফুট.

$h=u\sin\alpha t-\frac{1}{2}gt^2$ ব্যবহার করিয়া, $-4=60\times\frac{1}{2}\times t-16t^2$

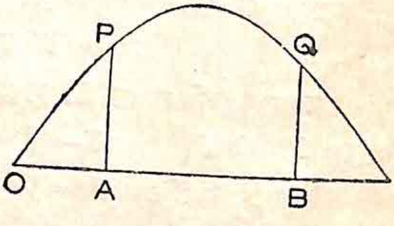
বা, $16t^2-30t-4=0$; বা, $8t^2-15t-2=0$; বা, $(t-2)(8t+1)=0$

t ঋণাত্মক হইতে পারে না ; অতএব $t=2$ সেকেণ্ড

এবং উভয়ের দূরত্ব $=60\cos 30^\circ\times 2=\frac{60\sqrt{3}}{2}\times 2=60\sqrt{3}$

$=103{\cdot}92$ ফুট (প্রায়)।

উদা. 17. একটি কণা $2\sqrt{ag}$ বেগে এরূপভাবে নিক্ষিপ্ত হইল যেন ইহা একই উচ্চতা a বিশিষ্ট এবং $2a$ দূরত্বে অবস্থিত দুইটি প্রাচীর ঠিক অতিক্রম করিয়া যায়। দেখাও যে গতিপথের নাভিলম্ব $2a$ এবং এক প্রাচীর হইতে অপর প্রাচীরে যাইতে $2\sqrt{\frac{a}{g}}$ সময় লাগে।



$PA=QB=a$ এবং $AB=2a$.

$a=u\sin\alpha.t-\frac{1}{2}gt^2$

বা, $gt^2-2u\sin\alpha.t+2a=0\cdots$(i)

মনে কর, t_1 এবং t_2 এই সমীকরণের দুইটি বীজ এবং $t_2>t_1$.

অর্থাৎ, P-তে আসে প্রক্ষেপের t_1 সময় পরে এবং Q-তে আসে t_2 সময় পরে।

এখন $t_1+t_2=\frac{2u\sin\alpha}{g}$ এবং $t_1 t_2=\frac{2a}{g}$.

$$\therefore\quad t_2-t_1=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\frac{4u^2\sin^2\alpha}{g^2}-\frac{4.2a}{g}}$$

$$=\sqrt{\frac{4u^2\sin^2\alpha-8ag}{g^2}}=\sqrt{\frac{4.4ag\sin^2\alpha-8ag}{g^2}}$$

যেহেতু অনুভূমিক দিকে t_2-t_1 সময়ে সরণ $2a$,

$$\therefore\quad 2a=2\sqrt{ag}\cos\alpha\times\frac{\sqrt{8ag}\,(2\sin^2\alpha-1)}{g}.$$

বর্গ করিয়া $4a^2=4a\cos^2\alpha.8a.(2\sin^2\alpha-1)$.

বা, $1=8\cos^2\alpha\{2(1-\cos^2\alpha)-1\}=8\cos^2\alpha-16\cos^4\alpha$

বা, $16\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1=0$; বা, $(4\cos^2\alpha-1)^2=0$

$\therefore\ \cos^2\alpha=\frac{1}{4}$; বা, $\sin^2\alpha=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

নাভিলম্ব $=\dfrac{2u^2\cos^2\alpha}{g}=\dfrac{2\times 4ag}{g}\times\dfrac{1}{4}=2a$.

$$t_2-t_1=\frac{1}{g}\sqrt{16ag\times\tfrac{3}{4}-8ag}=\frac{1}{g}\sqrt{4ag}=2\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

উদা. 18. প্রাসের অনুভূমিক প্রক্ষেপ সীমা R এবং উত্থিতিকাল T হইলে, দেখাও যে $2R\tan\alpha=gT^2$ সমীকরণ হইতে প্রক্ষেপ কোণ পাওয়া যায়। [H. S. 1960]

$$R=\frac{u^2}{g}.2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \ldots(i)$$

এবং $T=\dfrac{2u\sin\alpha}{g}$; $\therefore\ u=\dfrac{gT}{2\sin\alpha}$

এখন (i) সমীকরণে u-এর মান বসাইয়া

$$R=\frac{g^2T^2}{4\sin^2\alpha}.\ \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{gT^2}{2}.\ \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\text{ ; বা, } 2R\tan\alpha=gT^2.$$

উদা. 19. যদি কোনও প্রাসের অনুভূমিক প্রক্ষেপসীমা R এবং চরম উচ্চতা H হয়, প্রমাণ কর যে (a) $\tan\alpha=\dfrac{4H}{R}$ তাহার প্রক্ষেপ কোণ α নির্দেশ করে এবং (b) একই প্রক্ষেপ বেগে বৃহত্তম পরিসীমা $2H+\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{R^2}{H}$.

(a) $R=\dfrac{u^2}{g}.2\sin\alpha\cos\alpha,\ \cdots(i)$

H (চরম উচ্চতা) $=\dfrac{u^2\sin^2\alpha}{2g}.\ \cdots(ii)$

(ii)কে (i) দিয়া ভাগ করিয়া $\dfrac{H}{R}=\dfrac{\sin^2\alpha}{2\times 2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha}{4}$.

$$\therefore\ \tan\alpha=\frac{4H}{R}.$$

(ii) অনুভূমিক প্রক্ষেপ সীমা (R)

$$=\frac{u^2}{g}=\frac{R}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{R}{\sin 2\alpha}=\frac{R(1+\tan^2\alpha)}{2\tan\alpha}$$

$$\left[\ \sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\ \right]$$

$$=\frac{R\left(1+\frac{16H^2}{R^2}\right)}{2.\frac{4H}{R}}=\frac{R^2+16H^2}{8H}=2H+\frac{1}{8}\cdot\frac{R^2}{H}.$$

উদা. 20. যদি একটি প্রাস প্রক্ষেপের t সময় পরে P বিন্দুতে পৌঁছে এবং P বিন্দু হইতে প্রক্ষেপবিন্দুগামী অনুভূমিকতলে আসিয়া পৌঁছিতে t' সময় নেয়, দেখাও যে, তল হইতে P বিন্দুর উচ্চতা $\frac{1}{2}gtt'$.

$h=u\sin\alpha.\,t-\frac{1}{2}gt^2\cdots$(i)

যেহেতু $t+t'=$ উত্থিতিকাল $\therefore\quad 0=u\sin\alpha\,(t+t')-\frac{1}{2}g\,(t+t')^2$

ইহা হইতে, $u\sin\alpha=\frac{1}{2}g\,(t+t')$. $\quad[\because\quad t+t'\neq 0]$

এখন (i) সমীকরণ হইতে, $h=\frac{1}{2}g\,(t+t')\,t-\frac{1}{2}g\,t^2=\frac{1}{2}g\,tt'$

উদা. 21. একই সময়ে কতকগুলি কণা একই উলম্ব সমতলে একটি প্রদত্ত বিন্দু হইতে বিভিন্নদিকে একই মান V বেগে প্রক্ষিপ্ত হইল, প্রমাণ কর যে t সেকেণ্ড পরে তাহারা সকলে একটি বৃত্তের উপর থাকে।

মনে কর যে কোন একটি কণার প্রক্ষেপ কোণ α.

যে বিন্দু হইতে কণা সমূহ প্রক্ষিপ্ত হইতেছে তাহাকে আদি বিন্দু লইয়া এবং অনুভূমিক ও উলম্ব রেখা অক্ষ লইয়া মনে কর, t সময় পরে এই কণার স্থানাঙ্ক (x, y)। তাহা হইলে, $\quad x=V\cos\alpha.\,t\quad\cdots$(i)

$y=V\sin\alpha.\,t-\frac{1}{2}gt^2$; বা, $\quad y+\frac{1}{2}gt^2=V\sin\alpha.\,t\cdots$(ii)

(i) এবং (ii) এর বর্গ করিয়া যোগ করিলে,

$x^2+(y+\frac{1}{2}gt^2)^2=V^2t^2$ এই সম্পর্কে α নিরপেক্ষ ;

অতএব যে কোন কণা এই বৃত্তের উপর অবস্থিত।

উদা. 22. একটি বস্তুকে এমনভাবে ছোঁড়া হইল যে ইহার ঊর্ধ্বমুখী পথে ইহা প্রক্ষেপবিন্দু হইতে অনুভূমিকদিকে x ফুট দূরে এবং উলম্বদিকে y ফুট দূরে একটি বিন্দুর ভিতর দিয়া যায়। যদি প্রক্ষেপবিন্দুগামী অনুভূমিকতলে ইহার প্রক্ষেপসীমা R হয়, দেখাও যে প্রক্ষেপ কোণ $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\cdot\frac{R}{R-x}\right)$. [C. U. 1944]

$x=u\cos\alpha.\,t\cdots$(i) ; $\quad y=u\sin\alpha.\,t-\frac{1}{2}gt^2\cdots$(ii)

এবং $R=\frac{2u^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\cdots$(iii) ; $\quad$ (i) হইতে $t=\frac{x}{u\cos\alpha}$

(ii)-এ t-এর মান বসাইয়া,

$$y=x\tan\alpha-\tfrac{1}{2}\cdot g\frac{x^2}{u^2\cos^2\alpha}=x\tan\alpha-\frac{x^2\sin\alpha\cos\alpha}{R\cos^2\alpha}.$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{R}\right)\tan\alpha=x\left(1-\frac{x}{R}\right)\tan\alpha.$$

$$\therefore\quad \tan\alpha=\frac{y}{x}\times\frac{R}{R-x}.\quad \text{অর্থাৎ } \alpha=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\times\frac{R}{R-x}\right).$$

উদা. 23. একটি কণা একটি ত্রিভুজের অনুভূমিক ভূমির এক প্রান্ত হইতে প্রক্ষিপ্ত হইয়া শীর্ষবিন্দু স্পর্শ করিয়া ভূমির অপরপ্রান্তে গিয়া পড়ে। যদি α এবং β ভূমি কোণ হয় এবং θ প্রক্ষেপ কোণ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\tan\theta=\tan\alpha+\tan\beta.$$

ধর, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং R প্রক্ষেপসীমা।

$$y=x\tan\theta-\tfrac{1}{2}\frac{gx^2}{u^2\cos^2\theta}\cdots\text{(i)}\quad \text{এবং } R=\frac{2u^2\sin\theta\cos\theta}{g}\cdots\text{(ii)}$$

$$\therefore\quad y=x\tan\theta-\frac{x^2\sin\theta}{R\cos\theta}=\tan\theta\left(1-\frac{x}{R}\right)x.$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}\times\frac{R}{R-x}$$

এখন, $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{y}{x}+\frac{y}{R-x}=\frac{yR}{x(R-x)}$

$$\therefore\quad \tan\theta=\tan\alpha+\tan\beta.$$

উদা. 24. অনুভূমিক সমতলে একটি কামানের গোলার প্রক্ষেপসীমা R। যদি দুইটি সম্ভাব্য পথে ইহার চরম উন্নতি H_1, H_2 এবং উত্থিতিকাল T_1, T_2 হয়, তবে দেখাও যে $\quad R=\sqrt{H_1H_2}=\tfrac{1}{2}gT_1T_2$

ধর α এবং $90°-\alpha$ প্রক্ষেপ কোণ, এবং প্রক্ষেপসীমা R.

$$R=\frac{u^2}{g}2\sin\alpha\cos\alpha,\ H_1=\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g},\ H_2=\frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}$$

$$T_1=\frac{2u\sin\alpha}{g},\ T_2=\frac{2u\cos\alpha}{g}$$

এখন, $R^2=\frac{4u^4}{g^2}\sin^2\alpha\cos^2\alpha=4(2H_12H_2)=16H_1H_2.$

$$\therefore\quad R=4\sqrt{H_1H_2}$$

আবার $T_1T_2=\frac{4u^4}{g^2}\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{g}\times R\,;\quad \therefore\quad R=\tfrac{1}{2}gT_1T_2.$

উদা. 25. একটি কণাকে V বেগে প্রক্ষেপ করিলে যদি অনুভূমিক তলে প্রক্ষেপ সীমা চরম উন্নতির দ্বিগুণ হয়, দেখাও যে, প্রক্ষেপসীমা $R=\frac{4V^2}{5g}$.

প্রক্ষেপসীমা $R=\frac{2V^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha \quad \cdots(\text{i})$,

এবং চরম উচ্চতা $H=\frac{V^2\sin^2\alpha}{2g} \quad \cdots(\text{ii})$

এখানে $R=2H \quad \therefore \quad \frac{2V^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha=\frac{V^2\sin^2\alpha}{g}$.

$\therefore \quad \tan\alpha=2$. সুতরাং $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$ এবং $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

এখন (i) হইতে, $R=\frac{2V^2}{g}\times\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4V^2}{5g}$.

উদা. 26. β উন্নতিবিশিষ্ট নততলের একবিন্দু হইতে একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সহিত α নতিতে প্রক্ষেপ করা হইল। প্রমাণ কর যে, যদি $\cot\beta=2\tan(\alpha-\beta)$ হয় তাহা হইলে ইহা নততলকে লম্বাভিমুখে গিয়া আঘাত করে।

মনে কর, T সময় পরে বস্তুটি নততলে ফিরিয়া আসে।

যেহেতু T সময় পরে নততল বরাবর বেগ 0

$\therefore \quad V\cos(\alpha-\beta)-g\sin\beta.T=0 \cdots(\text{i}) \quad [v=u+ft$ সূত্র $]$

বা, $V\cos(\alpha-\beta)=g\sin\beta.T$

আবার এই সময়ে নততলের লম্বাভিমুখে সরণ 0

$\therefore \quad V\sin(\alpha-\beta)T-\frac{1}{2}g\cos\beta.T^2=0 \quad [s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র $]$

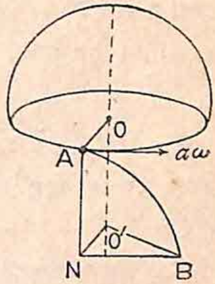
বা, $V\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}g\cos\beta.T\cdots\cdots(\text{ii}) \quad [\because \quad T\neq 0]$

(ii)কে (i) দ্বারা ভাগ করিয়া, $2\tan(\alpha-\beta)=\cot\beta$.

***উদা. 27.** একটি ভিজা খোলা ছাতা উল্লম্বভাবে ধরা হইয়াছে। ইহার কিনারার ব্যাসার্ধ a এবং মাটি হইতে ইহা h ফুট উপরে আছে। হাতল ধরিয়া ইহাকে সমকৌণিক বেগ ω দিয়া ঘুরানো হইতেছে। দেখাও যে কিনারা হইতে যে সকল জলের ফোঁটা ছুটিয়া যায় তাহারা মাটিতে পৌঁছিয়া বৃত্তের উপর থাকে এবং উহার ব্যাসার্ধ $a\left(1+\frac{2\omega^2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$.

মনে কর, O অনুভূমিক বৃত্তাকার কিনারার কেন্দ্র, O' বিন্দু O বিন্দুর উল্লম্ব নীচে ভূমির উপর একটি বিন্দু।

ছাতার কিনারার A বিন্দুতে একটি জলের ফোঁটা বিবেচনা কর। ইহার বেগ অনুভূমিক দিকে $a\omega$.



মনে কর, t সময় পরে ইহা ভূমিতে B বিন্দুতে আসিয়া পতিত হয়। AN ভূমির উপর লম্ব $=h$.

এখন $h=AN=\frac{1}{2}gt^2,\ NB=a\omega t,$

$O'N=OA=a.$

$$O'B^2=O'N^2+NB^2=a^2+a^2\omega^2\cdot\frac{2h}{\omega}$$

$$=a^2\left(1+\frac{2\omega^2h}{\beta}\right).$$

অতএব ফোঁটাটি $a\left(1+\frac{2\omega^2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$ ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তের উপর আছে ; বৃত্তের কেন্দ্র হইল O'.

উদা. 28. একটি কণা প্রারম্ভিক বেগ u দিয়া প্রক্ষিপ্ত হইল। যদি কণাটি H চরম উচ্চতা লাভ করে ; দেখাও প্রক্ষেপবিন্দুগামী অনুভূমিক সমতলে প্রক্ষেপসীমা R-এর জন্য $R=4\left\{H\left(\frac{u^2}{2g}-H\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$. [C. U. 1940]

আমরা জানি $H=\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\quad\cdots$(i)

এবং $R=\frac{u^2}{g}.2\sin\alpha\cos\alpha$. বা, $R^2=\frac{u^4}{g^2}4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cdots$(ii)

(i) হইতে, $\sin^2\alpha=\frac{2gH}{u^2}$; $\quad\therefore\quad\cos^2\alpha=1-\frac{2gH}{u^2}$

এখন (ii) হইতে, $R^2=\frac{u^4}{g^2}\times4\times\frac{2gH}{u^2}\left(1-\frac{2gH}{u^2}\right).$

$$=\frac{8H}{g}(u^2-2gH)=16H\left(\frac{u^2}{2g}-H\right)$$

$$\therefore\quad R=4\left\{H\left(\frac{u^2}{2g}-H\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

প্রশ্নমালা VI

1. $u=120$ ফু./সে. এবং $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ হইলে উচ্চতা, উত্থিতিকাল এবং অনুভূমিক সমতলে প্রক্ষেপসীমা নির্ণয় কর।

2. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে অনুভূমিক সমতলে সর্বাধিক প্রক্ষেপসীমা নির্ণয় কর :
(i) প্রক্ষেপবেগ যখন 64 ফু./সে. ; (ii) প্রক্ষেপবেগ যখন 72 ফু./সে. ; (iii) প্রক্ষেপবেগ যখন 90 ফু./সে. ; (iv) প্রক্ষেপবেগ যখন 28 মিটার/সেকেণ্ড।

3. অনুভূমিক তলের সহিত 60° কোণে একটি বস্তুকে সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগে প্রক্ষেপ করা হইল। (i) ইহা সর্বাধিক কত উচ্চতায় যাইতে পারে ? (ii) অনুভূমিক প্রক্ষেপসীমা এবং উত্থিতিকাল নির্ণয় কর। (iii) 64 ফুট উচ্চতায় ইহার বেগের মান নির্ণয় কর।

4. 160 ফুট উচ্চ একটি স্তম্ভের শীর্ষ হইতে একটি ঢিল অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণে সেকেণ্ডে 96 ফুট বেগে প্রক্ষেপ করা হইলে ইহা কতদূরে গিয়া ভূপতিত হইবে ?

5. একজন শিকারী 200 ফুট দূরে অবস্থিত 50 ফুট উচ্চে বৃক্ষের মাথায় উপবিষ্ট একটি পাখীর প্রতি সর সন্ধান করে। যদি প্রক্ষেপ কোণের ট্যান্‌জেন্ট $\frac{3}{4}$ হয়, প্রক্ষেপ বেগ নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত : $y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2 \alpha}$ ব্যবহার কর। এখানে $x = 200$ ফু., $y = 50$ ফু., $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. $u = ?$]

6. যদি অনুভূমিক তলের প্রক্ষেপসীমা R এবং উত্থিতিকাল T হয়, তাহা হইলে দেখাও যে প্রক্ষেপ কোণ $2R \tan \alpha = gT^2$ সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়।

[H. S. 1960]

7. 272 ফুট উচ্চ মিনারের শীর্ষদেশ হইতে একটি গুলি ছোঁড়া হয়। 17 সেকেণ্ড পরে ইহা মিনারের পাদদেশ হইতে 4352 ফুট দূরে ভূমিতে আসিয়া পড়ে। প্রক্ষেপ কোণ নির্ণয় কর।

8. একটি টেনিস বল 6 ফুট উচ্চতা হইতে অনুভূমিকে প্রক্ষেপ করিলে প্রক্ষেপকারী হইতে 39 ফুট দূরে 3 ফুট উচ্চ জাল স্পর্শ করিয়া যায়। প্রারম্ভিক বেগ এবং যে স্থানে ইহা মাটিতে পড়িবে প্রক্ষেপকারী হইতে তাহার দূরত্ব নির্ণয় কর। [H. S. 1961]

9. একজন লোক সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগে একটি বল ছোঁড়ে, ইহার অনুভূমিক প্রক্ষেপসীমা নির্ণয় কর। যদি বলটি 100 ফুট অনুভূমিক দূরত্বে ভূতলে পৌঁছে তাহা হইলে প্রক্ষেপ কোণ নির্ণয় কর।

10. একটি কণা সেকেণ্ডে 48 ফুট বেগে প্রক্ষিপ্ত হইল। অনুভূমিক প্রক্ষেপ সীমার বৃহত্তম মান এবং যে দুইটি প্রক্ষেপ কোণের জন্য অনুভূমিক প্রক্ষেপসীমা 36 ফুট তাহাও বাহির কর।

[H. S. 1962]

11. একটি টেনিস বল 6·25 ফুট উচ্চতা হইতে অনুভূমিকে প্রক্ষেপ করিলে প্রক্ষেপকারী হইতে 60 ফুট দূরে ভূমিতে স্পর্শ করে। উহা প্রক্ষেপকারী হইতে 40 ফুট দূরে অবস্থিত একটি জালকে স্পর্শ করিলে, জালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

[U. P. 1941 ; H. S. 1967]

12. যদি অভিকর্ষাধীন একটি প্রাসের অনুভূমিক প্রক্ষেপসীমা r এবং লব্ধ চরম উচ্চতা h হয়, তাহা হইলে দেখাও যে প্রারম্ভিক বেগ v-র মান $\frac{v^2}{2g}=h+\frac{r^2}{16h}$ সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়। [H. S. 1963]

13. একটি ক্রিকেট বল 6 ফুট উঁচু হইতে অনুভূমিক দিকের সহিত 30° নতিতে 60 ফুট/সেকেণ্ড বেগে ছোঁড়া হইল এবং ইহাকে একজন খেলোয়াড় ভূমি হইতে 2 ফুট উচ্চে ধরিল। দুইজন খেলোয়াড়ের মধ্যে দূরত্ব কত ছিল? [U. P. 1940]

14. একজন বৈমানিক অনুভূমিক দিকে ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে চলিবার সময়ে 2000 ফুট উঁচু হইতে একটি বোমা ফেলিল। লক্ষ্য বস্তু হইতে তাহার দূরত্ব কত হইলে বোমাটি লক্ষ্যে গিয়া পড়িবে? [H. S. 1966]

15. একটি কণা v বেগে অনুভূমিক তলের সহিত α কোণে প্রক্ষিপ্ত হইয়াছে। যদি কণাটির পাল্লা R, উড্ডয়ণকাল T এবং চরম উচ্চতা H হয়, তবে প্রমাণ কর যে $g^2T^4-4T^2v^2+4R^2=0$ এবং $16gH^2-8v^2H+gR^2=0$. [C. U. 1945]

16. একটি বস্তু এমনভাবে প্রক্ষিপ্ত হইয়াছে যে, উহা প্রক্ষেপ বিন্দু হইতে অনুভূমিক দিকে a ফুট দূরত্বে এবং উল্লম্বদিকে b ফুট দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দু দিয়া যায়। যদি প্রক্ষেপ বিন্দুগামী অনুভূমিক তলে ইহার পাল্লা x হয়, তবে দেখাও যে ইহার প্রক্ষেপ কোণ হইতেছে $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{x-a}\right)$.

17. একটি কণা v বেগে প্রক্ষিপ্ত করা হইয়াছে। ইহার চরম উচ্চতা y এবং অনুভূমিক পাল্লা x হইলে, প্রমাণ কর যে $g(x^2+16y^2)-8v^2y=0$.

18. একটি কণাকে v বেগে অনুভূমিক তলের সহিত α কোণে প্রক্ষিপ্ত করা হইয়াছে। যদি উহা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (h, k)-কে আঘাত করে, তবে দেখাও যে α-এর মান দুইটি হইবে এবং v-এর সর্বনিম্ন মান $g\{k+\sqrt{(h^2+k^2)}\}$.

19. প্রমাণ কর যে প্রাসের সমীকরণ $y=x\tan\alpha\,(R-x)/R$ আকারে লেখা যায়, যেখানে $R=$ অনুভূমিক পাল্লা এবং $\alpha=$ অনুভূমিক রেখার সহিত প্রক্ষেপ কোণ। [C. H. 1963, '68 ; C. U. 1967]

[**ইঙ্গিত :** মনে কর, একটি কণাকে u বেগে অনুভূমিক রেখার সহিত α কোণে প্রক্ষেপ করা হইয়াছে এবং t-তম সময়ে উহার অবস্থান $P(x, y)$।

$$\therefore \quad \text{অনুভূমিক পাল্লা} = R = \frac{u^2}{g}\sin 2\alpha.$$

এখন, অনুভূমিক দিকে উহার বেগ $u\cos\alpha$ ও ত্বরণ শূন্য এবং উল্লম্বদিকে বেগ $u\sin\alpha$ ও ত্বরণ $-g$ (অভিকর্ষজত্বরণের জন্য)

$\therefore \quad x = u\cos\alpha . t \cdots$ (i) এবং $y = u\sin\alpha . t - \frac{1}{2}gt^2 \cdots$(ii)

(i) ও (ii) হইতে t অপনয়ন করিয়া,

$$y = u\sin\alpha . \frac{x}{u\cos\alpha} - \frac{1}{2}g . \left(\frac{x}{u\cos\alpha}\right)^2$$

$$= x\tan\alpha - \frac{g}{2u^2\cos^2\alpha}x^2$$

$$= x\tan\alpha - \frac{x^2\tan\alpha}{u^2/g\,\sin^2\alpha} = x\tan\alpha - \frac{x^2\tan\alpha}{R}$$

$$= x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right) = x\tan\alpha\,(R-x)/R \;\Big]$$

20. একটি বলকে O বিন্দু হইতে এমনভাবে প্রক্ষেপ করা হইল যাহাতে উহা দুইটি দেওয়াল ঘেঁষিয়া পার হয়। একটি দেওয়াল O হইতে a দূরে যাহার উচ্চতা b এবং অপরটি b দূরে, যাহার উচ্চতা a. দেখাও যে বলটির অনুভূমিক পাল্লা $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. [C. H. 1968]

21. একটি বস্তুকে অনুভূমিক দিকের সহিত α নতিতে এমনভাবে উৎক্ষেপ করা হইয়াছে যে, উহা পরস্পরের সহিত $2a$ দূরত্বে অবস্থিত a উচ্চতা বিশিষ্ট দুইটি দেওয়ালের উপর ঘেঁষিয়া যায়। দেখাও যে বস্তুটির পাল্লা হইতেছে $2a\cot\frac{\alpha}{2}$.

[C. H. 1965]

[ইঙ্গিত : উদা. 17. দেখ।]

22. কোন এক স্থান হইতে h ফুট উচ্চতা বিশিষ্ট পাহাড়ের উপর অবস্থিত শত্রুর ঘাঁটির কৌণিক উন্নতি β. দেখাও যে ঐ অবস্থানে গোলা বর্ষণ করিতে হইলে গোলার প্রারম্ভিক বেগের সর্বনিম্ন মান $\sqrt{gh(1+\operatorname{cosec}\beta)}$ হইবে। [C.U. 1946]

৭

সরল সমঞ্জস গতি

(**Simple Harmonic Motion**)

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী :

ত্বরণের মান $=\mu x.$

বেগের মান $v=\sqrt{\mu(a^2-x^2)}$

স্থিরাবস্থা হইতে সময় $t=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\cos^{-1}\frac{x}{a}$; $x=a\cos\sqrt{\mu}\,t$

পর্যায় কাল $=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$

সরল দোলকের ক্ষেত্রে $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ এবং $\mu=\frac{g}{l}.$

উদাহরণমালা—VII

উদা. 1. একটি কণা সরল দোলনে এক সরল রেখায় চলিতেছে ; যদি 9 ইঞ্চি দূরে ত্বরণ 3 ফুট/সেকেণ্ড^2 হয় তাহা হইলে স্থিরাবস্থা হইতে স্থিরাবস্থা পর্যন্ত দোলনের সময় নির্ণয় কর।

ত্বরণের মান $=\mu x.$

এখানে ত্বরণ $=3$ ফু./সে^{2}, $x=9$ ইঞ্চি $=\frac{9}{12}$ বা $\frac{3}{4}$ ফুট.

$\therefore\ 3=\mu\times\frac{3}{4},\ \mu=4.$

এখন পর্যায়কাল $=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}=\frac{2\pi}{\sqrt{4}}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ সেকেণ্ড।

স্থিরাবস্থা হইতে পুনঃ স্থিরাবস্থায় আসিতে সময় $=\frac{1}{2}\times$ পর্যায়কাল $=\frac{\pi}{2}$ সেকেণ্ড।

উদা. 2. একটি কণা গতিপথের কেন্দ্র হইতে 10 ফুট দূরে স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া সরল দোলনে চলে। যদি প্রারম্ভে তাহার ত্বরণ 2·5 ফু./সে.^{2} হয় (i) কেন্দ্র হইতে 6 ফুট দূরে এবং কেন্দ্র অতিক্রম কালে ইহার বেগ, (ii) পর্যায়কাল নির্ণয় কর।

সরল দোলনে ত্বরণের মান $=\mu x.$

এখানে, যখন $x=10$ ফুট, ত্বরণ $=2\cdot5$ ফু./সে^{2}.

$\therefore\ 2\cdot5=\mu\times10$ হইতে $\mu=\frac{2\cdot5}{10}=\frac{1}{4}.$

(i) বেগ $=\sqrt{\mu(a^2-x^2)}$ হইতে

যখন $x=6$ ফুট, বেগ $=\frac{1}{2}\sqrt{10^2-6^2}=\frac{8}{2}=4$ ফু./সে.

যখন $x=0$, বেগ $=\frac{1}{2}\sqrt{10^2}=\frac{10}{2}=5$ ফু./সে.।

(ii) পর্যায়কাল $=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}=2\pi\times2=4\pi$ সেকেণ্ড

উদা. 3. সরল দোলনে গতিশীল একটি বিন্দুর গতিপথের কেন্দ্রের ভিতর দিয়া যাইবার সময় বেগ সেকেণ্ডে 10 ফুট এবং ইহার দোলন কাল π সেকেণ্ড। যে অবস্থানে বেগ শূন্য সেই অবস্থান হইতে 1 ফুট পথ চলিবার পর ইহার বেগ কত?

$$\text{পর্যায়কাল}=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \quad \therefore \quad \pi=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}, \quad \sqrt{\mu}=2.$$

কেন্দ্র হইতে x দূরত্বে $v=\sqrt{\mu(a^2-x^2)}$

এখানে যখন $x=0$, $v=10$; $\therefore$ $10=2a$ সুতরাং $a=5$ ফুট

শূন্যবেগের স্থান হইতে 1 ফুট দূরে $x=5-1=4$.

তখন বেগ $=2\sqrt{5^2-4^2}=2\times3=6$ ফু./সে.

উদা. 4. সরল দোলনে গতিশীল একটি কণা যখন গতিপথের কেন্দ্র হইতে 3 ফুট দূরে তখন ইহার বেগ সেকেণ্ডে 8 ফুট এবং যখন 4 ফুট দূরে তখন বেগ সেকেণ্ডে 6 ফুট। সর্বাধিক বেগ এবং দোলন কাল নির্ণয় কর। [H. S. 1965]

$v=\sqrt{\mu(a^2-x^2)}$ হইতে

$8=\sqrt{\mu(a^2-3^2)}$ ··· (i) এবং $6=\sqrt{\mu(a^2-4^2)}$ ··· (ii)

(i)-কে (ii) দিয়া ভাগ করিয়া,

$\frac{4}{3}=\sqrt{\frac{a^2-3^2}{a^2-4^2}}$; বর্গ করিয়া, $\frac{16}{9}=\frac{a^2-3^2}{a^2-4^2}$

বা, $16(a^2-4^2)=9(a^2-3^2)$; বা, $(16-9)a^2=16^2-9^2$

$\therefore$ $a^2=25$, $a=5$

(i)এ a-এর মান বসাইয়া $8=\sqrt{\mu(5^2-3^2)}=4\sqrt{\mu}$.

$\therefore$ $\sqrt{\mu}=2$

বৃহত্তম বেগ $=\sqrt{\mu}\,a=2\times5=10$ ফু./সে.

এবং পর্যায়কাল $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ সেকেণ্ড।

উদা. 5. সরল দোলনে গতিশীল একটি কণার দোলনকাল 4 সেকেণ্ড। যদি ইহা কেন্দ্র হইতে 4 ফুট দূরে স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করে, তাহা হইলে 2 ফুট পথ অতিক্রম করিতে কত সময় লাগে এবং তখন ইহা কি বেগ অর্জন করে?

যখন স্থিরাবস্থা হইতে 2 ফুট দূরে আসে তখন কেন্দ্র হইতে দূরত্ব $x=4-2=2$ ফুট। এখানে $a=4$ ফুট

$$t=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\cos^{-1}\frac{x}{a} \text{ হইতে, } t=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\cos^{-1}\frac{2}{4}=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\cos^{-1}\frac{1}{2}$$

আবার, পর্যায় কাল $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$; $\therefore$ $4=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$; বা, $\sqrt{\mu}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $t=\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}$ সেকেণ্ড; এখন $v=\sqrt{\mu(a^2-x^2)}$ হইতে,

নির্ণেয় বেগ $=\frac{\pi}{2}\sqrt{4^2-2^2}=\frac{\pi}{2}\sqrt{12}=\pi\sqrt{3}$ ফু./সে.

উদা. 6. সরল রেখায় সরল দোলনে গতিশীল একটি কণার বেগ কেন্দ্র হইতে x_1 এবং x_2 দূরত্বে যথাক্রমে v_1 এবং v_2। দেখাও যে দোলন কাল T নিম্ন সমীকরণ হইতে পাওয়া যায় $T=2\pi\sqrt{\frac{x_1^2-x_2^2}{v_2^2-v_1^2}}$. [C. U. 1969]

এখানে $v_1=\sqrt{\mu(a^2-x_1^2)}$, $\quad v_2=\sqrt{\mu(a^2-x_2^2)}$

$\therefore$ $v_2^2-v_1^2=\mu(x_1^2-x_2^2)$; বা, $\mu=\frac{v_2^2-v_1^2}{x_1^2-x_2^2}$

$$\therefore \quad T=2\pi\sqrt{\frac{x_1^2-x_2^2}{v_2^2-v_1^2}}.$$

উদা. 7. একটি কণা একটি সরলরেখায় সরল দোলনে চলিতেছে। কণাটি গতিপথের কেন্দ্র হইতে 3 ও 4 ফুট দূরত্বে বেগ যথাক্রমে 8 এবং 6 ফুট/সে.। উহার পর্যায় কাল নির্ণয় কর।

এখানে $v=\sqrt{\mu(a^2-x^2)}$ সূত্র হইতে,

$8=\sqrt{\mu(a^2-3^2)}$; বা, $\mu(a^2-9)=64\cdots$(i)

আবার, $6=\sqrt{\mu(a^2-4^2)}$; বা, $\mu(a^2-16)=36\cdots$(ii)

(i) ও (ii) হইতে, $7\mu=28$; বা, $\mu=4$.

এখন, $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ সেকেণ্ড.

উদা. 8. পৃথিবীর কোন এক স্থানে একটি ঘড়ির দোলকের দৈর্ঘ্য 39 ইঞ্চি

এবং ইহা দিনে 10 সে. সময় দ্রুত যায়। দোলকের দৈর্ঘ্যের কিরূপ পরিবর্তন করিলে ঘড়িটি সঠিক সময় দিবে।

1 দিন $=24\times60\times60=86400$ সে.

$\therefore$ ঘড়িটির দোলনের পর্যায় কাল $=2\times\dfrac{86400}{(86400+10)}$

মনে কর, ঘড়িটির দোলকের দৈর্ঘ্য l করিলে ঘড়িটি সঠিক সময় দিবে।

$\therefore\;\; 2\times\dfrac{86400}{86410}=2\pi\sqrt{\dfrac{39}{g}}\;\cdots$(i) এবং $2=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}\;\cdots$(ii)

(i) এবং (ii) হইতে, $\sqrt{\dfrac{l}{39}}=\dfrac{8641}{8640}=1+\dfrac{1}{8640}$

বা, $\dfrac{l}{39}=\left(1+\dfrac{1}{8640}\right)^2=1+\dfrac{2}{8640}$ (প্রায়)

$\therefore\;\; l-39=\dfrac{39}{4320}=0\cdot009$ ইঞ্চি

$\therefore$ দোলকটির দৈর্ঘ্য $0\cdot009$ ইঞ্চি বর্ধিত করিতে হইবে।

প্রশ্নমালা—VII

1. সরল দোলনে গতিশীল একটি কণার দোলনকাল 4 সেকেণ্ড। যদি ইহা কেন্দ্র হইতে 4 ফুট দূরে স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করে, তাহা হইলে 2 ফুট যাইতে কত সময় লাগে এবং তখন ইহা কত বেগ অর্জন করে ?

2. একটি সরলরেখার O বিন্দুর উভয় পার্শ্বে সরল দোলনে গতিশীল একটি বিন্দু। 6 ফুট এবং 8 ফুট দূরে ইহার বেগ যথাক্রমে সেকেণ্ডে 10 ফুট এবং 8 ফুট। সরল দোলনের বিস্তার ও পর্যায়কাল নির্ণয় কর। [H. S. 1967]

3. একটি সরল দোলনে গতিশীল একটি কণা যখন গতিপথের কেন্দ্রে আসে তখন তাহার বেগ 4 ফু./সে. এবং ইহার দোলনকাল π সেকেণ্ড। যেখানে বেগ শূন্য হয় তথা হইতে এক ফুট দূরে গেলে ইহার বেগ কত ?

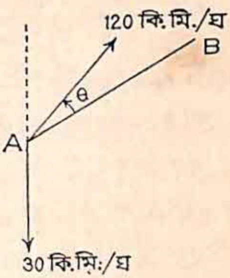
4. সরল দোলনে গতিশীল একটি কণার বেগ গতিপথের কেন্দ্র হইতে 3 ফুট দূরে সেকেণ্ডে 8 ফুট এবং 4 ফুট দূরে সেকেণ্ডে 6 ফুট। বৃহত্তম বেগ ও পর্যায়কাল নির্ণয় কর। [H. S. 1965]

5. সরলরেখায় সরল দোলনে গতিশীল একটি কণার দুইস্থানে বেগ v_1 ও v_2 এবং ত্বরণ যথাক্রমে f_1 ও f_2. ঐ স্থান দুইটির মধ্যে দূরত্ব d হইলে, দেখাও যে, $d=\dfrac{v_1^2-v_2^2}{f_1+f_2}$.

উদা. 1. একখানি এরোপ্লেন বায়ুপ্রবাহ না থাকিলে ঘণ্টায় 120 কিলোমিটার বেগে উড়ে। ইহা A হইতে যাত্রা করিয়া উত্তর-পূর্বদিকে 300 কিলোমিটার দূরে B-তে যায়। যদি উত্তর দিক্ হইতে বায়ু 30 কি.মি. বেগে প্রবাহিত হয় তাহা হইলে এরোপ্লেনকে কোন্ দিকে চালাইতে হইবে এবং কত সময় লাগিবে ?

এখানে লব্ধি বেগের দিক্ AB.

মনে কর, এরোপ্লেনকে AB-র সহিত θ কোণ করিয়া চালাইতে হইবে এবং V লব্ধি বেগ, তাহা হইলে



$$\frac{30}{\sin\theta}=\frac{120}{\sin 135^\circ}=\frac{V}{\sin(135^\circ+\theta)}$$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{30}{120}\sin 135^\circ=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\cdot177$$

$\theta=10^\circ10'$ (সারণী হইতে)

$\therefore$ এরোপ্লেনকে উত্তরদিকের $(45^\circ-10^\circ10')$ $=34^\circ50'$ পূর্বদিকে চালাইতে হইবে।

এখন $V=\dfrac{120\sin(135^\circ+\theta)}{\sin 135^\circ}=120(\cos\theta-\sin\theta)=96\cdot84$ কি.মি./ঘ.

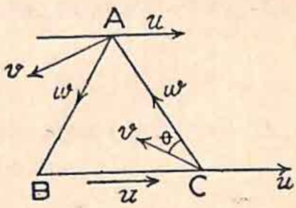
সময় $=\dfrac{300}{96\cdot84}$ ঘণ্টা $=3$ ঘ. $5\frac{3}{5}$ মি.।

উদা. 2. একটি এরোপ্লেন এক ত্রিভুজাকৃতি পথ ভ্রমণ করিতেছে ; ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু c মাইল লম্বা। একটি বাহুর সমান্তরালভাবে ঘণ্টায় u মাইল বেগে বায়ু প্রবাহিত হইতেছে। বায়ুপ্রবাহ না থাকিলে এরোপ্লেনের বেগ v। দেখাও যে ত্রিভুজাকৃতি পথ ঘুরিয়া আসিতে এরোপ্লেনের $c.(v+\sqrt{4v^2-3u^2})/v^2-u^2$ ঘণ্টা সময় লাগে।

মনে কর, বায়ুপ্রবাহের বেগ BC বাহুর সমান্তরাল।

যখন এরোপ্লেন BC পথ যায় তখন লব্ধিবেগ $=v+u$.

যখন CA বা AB পথ যায় তখন লব্ধিবেগ w হইলে এবং ইহা CA বা AB বাহুর সহিত θ কোণ করিলে



$$\frac{u}{\sin\theta}=\frac{w}{\sin(120^\circ+\theta)}=\frac{v}{\sin 120^\circ}$$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{u}{v}\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{u}{v}\cdots\text{(i)}$$

$$w=\frac{v\sin(120°+\theta)}{\sin 120°}=\frac{v}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta).$$

$$=\frac{v}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\sqrt{1-\frac{3}{4}\frac{u^2}{v^2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{2}\;(\sqrt{4v^2-3u^2}-v)$$

$$\text{সমস্ত সময়}=\frac{c}{u+v}+\frac{2c}{\frac{1}{2}(\sqrt{4v^2-3u^2}-u)}$$

$$=\frac{c}{u+v}+\frac{4c\;(\sqrt{4v^2-3u^2}+u)}{4v^2-3u^2-u^2}=c\left[\frac{1}{u+v}+\frac{\sqrt{4v^2-3u^2}+u}{v^2-u^2}\right]$$

$$=c\left[\frac{v+u+\sqrt{4v^2-3u^2}+u}{v^2-u^2}\right]=\frac{c}{v^2-u^2}(v+\sqrt{4v^2-3u^2})$$

যদি এরোপ্লেন বিপরীতমুখে চলে তাহা হইলে u স্থলে $-u$ লিখিয়া সময় পাই। এই ক্ষেত্রেও সময় আগের সময়ের পরিমাণ।

[লক্ষ্য কর CB পথ যাইবার সময় লব্ধিবেগ $v-u$, BA বা AC বরাবর যাইবার সময় u BA বা AC-র সঙ্গে 60° কোণ করে।]

উদা. 3. একই সমতলে তিনটি সরলরেখা পরস্পরের সহিত সমান নতিতে আছে এবং তিনটি সমান ভরের কণা P, Q, R এই তিন রেখা বরাবর যথাক্রমে u, v, w বেগে চলিতেছে। দেখাও যে কণা তিনটির ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে P কণার বেগ $\frac{1}{3}(4u^2+v^2+w^2+2uw+2uw-vw)^{\frac{1}{2}}$

ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে P কণার বেগ=তাহার নিজের বেগ এবং ভরকেন্দ্রের বেগের সমান ও বিপরীতমুখী বেগের লব্ধি।

[(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) যদি যে-কোন মুহূর্তে কণা তিনটির স্থানাঙ্ক হয়, তাহা হইলে তাহাদের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\bar{x}, \bar{y})$ এর জন্য

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

অতএব বেগ $\bar{U}=\dfrac{u_1+u_2+u_3}{3}$, $\bar{V}=\dfrac{v_1+v_2+v_3}{3}$

(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3) কণা তিনটির অনুরূপ বেগ]

BC বরাবর ভরকেন্দ্রের বেগ $=\frac{1}{2}\,(u-v\cos 60°-w\cos 60°)$

$$=\frac{1}{3}\left(u-\frac{v}{2}-\frac{w}{2}\right)$$

BC-র লম্বাভিমুখে ভরকেন্দ্রের বেগ $=\frac{1}{3}\,(v\sin 60°-w\sin 60°)$

$$=\frac{1}{3}.\;\frac{\sqrt{3}}{2}(v-w)$$

$\therefore$ ভরকেন্দ্রের সাপেক্ষে P কণার বেগ

$$=\left[\left\{u-\tfrac{1}{3}\left(u-\tfrac{v}{2}-\tfrac{w}{2}\right)\right\}^2+\left\{-\tfrac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}\left(v-w\right)\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\tfrac{1}{3}\left[\left(2u+\tfrac{v}{2}+\tfrac{w}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}(v-w)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\tfrac{1}{3}\left[4u^2+v^2+w^2+2uv+2uw+\frac{vw}{2}-\tfrac{3}{4}.2vw\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\tfrac{1}{3}(4u^2+v^2+w^2+2uv+2uw-vw)^{\frac{1}{2}}.$$

উদা. 4. প্রক্ষেপ-বিন্দুগামী অনুভূমিক সমতলে একটি বিন্দুকে লক্ষ্য করিয়া একটি গুলি ছোঁড়া হইল। প্রক্ষেপ কোণ α হইলে গুলি লক্ষ্য হইতে a ফুট দূরে গিয়া পড়ে ; প্রক্ষেপ কোণ β হইলে গুলিটি b ফুট কম দূরত্বে পড়ে। দেখাও যে লক্ষ্য ভেদ করিতে হইলে যথোচিত প্রক্ষেপ কোণ

$$\tfrac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a\sin 2\beta+b\sin 2\alpha}{a+b}\right)$$

মনে কর, লক্ষ্য বিন্দুর দূরত্ব R এবং ইহার জন্য θ প্রক্ষেপ কোণ, তাহা হইলে

$$R=\frac{u^2}{g}\sin 2\theta \quad \cdots \quad \text{(i)} \qquad R+a=\frac{u^2}{g}\sin 2\alpha \quad \cdots\text{(ii)}$$

$$R-b=\frac{u^2}{g}\sin 2\beta \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

এখন, $\dfrac{u^2}{g}\sin 2\theta+a=\dfrac{u^2}{g}\sin 2\alpha$

বা, $\dfrac{u^2}{g}(\sin 2\alpha-\sin 2\theta)=a \quad \cdots\cdot \quad \text{(iv)}$

$\dfrac{u^2}{g}\sin 2\theta-b=\dfrac{u^2}{g}\sin 2\beta$

বা, $\dfrac{u^2}{g}(\sin 2\theta-\sin 2\beta)=b \quad \cdots \quad \text{(v)}$

(iv) এবং (v) হইতে $\dfrac{\sin 2\alpha-\sin 2\theta}{\sin 2\theta-\sin 2\beta}=\dfrac{a}{b}.$

বা, $b\sin 2\alpha-b\sin 2v=a\sin 2\theta-a\sin 2\beta$

$\therefore \quad (a+b)\sin 2\theta=b\sin 2\alpha+a\sin 2\beta$

বা, $\sin 2\theta=\dfrac{b\sin 2\alpha+a\sin 2\beta}{a+b}$

$$2\theta=\sin^{-1}\left(\frac{b\sin 2\alpha+a\sin 2\beta}{a+b}\right)$$

$$\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a\sin 2\beta+b\sin 2\alpha}{a+b}\right)$$

উদা. 5. প্রদত্ত প্রক্ষেপ সীমার জন্য যদি α_1, α_2 দুইটি সম্ভাব্য প্রক্ষেপ কোণ হয় এবং t_1, t_2 ঐ দুই ক্ষেত্রে উত্থিতিকাল দেখাও যে

$$\frac{t_1^2-t_2^2}{t_1^2+t_2^2}=\frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$t_1=\dfrac{2u_1\sin\alpha_1}{g}$ আবার $t_1=\dfrac{R}{u_1\cos\alpha_1}$ $[R=u_1\cos\alpha_1 t_1]$

$t_2=\dfrac{2u_2\sin\alpha_2}{g}$ আবার $t_2=\dfrac{R}{u^2\cos\alpha_2}$

$\therefore\ \dfrac{t_1}{t_2}=\dfrac{u_1\sin\alpha_1}{u_2\sin\alpha_2}=\dfrac{u_2\cos\alpha_2}{u_1\cos\alpha_1}$; বা, $\dfrac{t_1^2}{t_2^2}=\dfrac{\sin\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2\cos\alpha_1}$

$$\therefore\ \frac{t_1^2-t_2^2}{t_1^2+t_2^2}=\frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\alpha_1\sin\alpha_2}=\frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

উদা. 6. একই উল্লম্ব তলে একই সময়ে সমান বেগে দুইটি প্রদত্ত বিন্দু হইতে α এবং β প্রক্ষেপ কোণে দুইটি কণা প্রক্ষিপ্ত হয় এবং তাহারা মিলিত হয়। দেখাও যে $\alpha+\beta=$ ধ্রুবক।

মনে কর A এবং B হইতে কণা দুইটি প্রক্ষিপ্ত হইল ; তাহারা যেন t সময় পরে P বিন্দুতে মিলিত হয়। ধর A এবং B বিন্দু হইতে P বিন্দুর অনুভূমিক দূরত্ব x, x_1 এবং উল্লম্ব দূরত্ব y, y_1 এখন

$$x=u\cos\alpha.t \qquad y=u\sin\alpha.t-\tfrac{1}{2}gt^2$$

$$x_1=u\cos\beta.t \qquad y_1=u\sin\beta.t-\tfrac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore\ \frac{x-x_1}{y-y_1}=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=-\tan\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

যেহেতু A এবং B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $\therefore$ $\dfrac{x-x_1}{y-y_1}$ নির্দিষ্ট

$\therefore$ $\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ অর্থাৎ $\alpha+\beta=$ ধ্রুবক।

উদা. 7. অনুভূমিক তলের সহিত এরূপ α কোণে একটি বস্তু প্রক্ষিপ্ত হইল যেন তাহারা $2a$ দূরত্বে স্থিত a উচ্চতাবিশিষ্ট দুইটি প্রাচীর ঠিক লঙ্ঘন করিতে পারে। দেখাও যে প্রক্ষেপসীমা $2a\cot\frac{\alpha}{2}$.

a উচ্চতা যদি t সময়ে লব্ধ হয়, তাহা হইলে

$$a=u \sin \alpha t-\tfrac{1}{2} gt^2 \text{ অর্থাৎ } \tfrac{1}{2}gt^2-u \sin \alpha t+a=0$$

যদি প্রথম ও দ্বিতীয় দেওয়ালের শীর্ষে t_1 এবং t_2 সময় পরে বস্তুটি পৌঁছে তাহা হইলে $t_1+t_2=\frac{2u \sin \alpha}{g}$ এবং $t_1t_2=\frac{2a}{g}$.

আবার $2a=(t_2-t_1)$ সময়ে অনুভূমিক সরণ $=u \cos \alpha \times (t_2-t_1)$

বর্গ করিয়া $4a^2=(t_2-t_1)^2u^2 \cos^2 \alpha$.

$$=u^2\cos^2\alpha\{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2\}=u^2 \cos^2 \alpha\left\{\frac{4u^2 \sin^2 \alpha}{g^2}-\frac{8a}{g}\right\}$$

যেহেতু $R=\frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$ $\quad\therefore\quad u^2=\frac{gR}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$

$$\therefore\quad 4a^2=\frac{gR \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha}\left\{\frac{2 \sin^2 \alpha\, gR}{g^2\, 2 \sin \alpha \cos \alpha}-\frac{8a}{g}\right\}$$

$$=\frac{R \cos \alpha}{2 \sin \alpha}\left\{\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha}R-8u\right\}$$

বা, $8a^2 \sin \alpha \cos \alpha=R \cos \alpha(2 \sin \alpha.R-8a \cos \alpha)$.

বা, $4a^2 \sin \alpha=R^2 \sin \alpha-4a \cos \alpha\, R$

বা, $R^2-4a \cot \alpha.R=4a^2$.

বা, $(R-2a \cot \alpha)^2=4a^2(1+\cot^2\alpha)=4a^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha$.

বা, $R-2u \cot \alpha=\pm 2a \operatorname{cosec} \alpha$.

বা, $R=2a\,(\cot \alpha+\operatorname{cosec} \alpha)$ ধনাত্মক মান লইয়া

$$=2a\frac{\cos \alpha+1}{\sin \alpha}=2a\frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}\,; \quad \therefore\quad R=2a \cot \tfrac{\alpha}{2}.$$

উদা. 8. যদি প্রারম্ভিক বেগ u দিয়া প্রক্ষিপ্ত একটি কণার অনুভূমিকতলে প্রক্ষেপসীমা R হয়, দেখাও যে উত্থিতিকাল T এবং চরম উচ্চতা H নিম্ন সমীকরণদ্বয় হইতে পাওয়া যায় $g^2T^4-4T^2u^2+4R^2=0$ এবং $16\,gH^2-8Hu^2+gR^2=0$

যেহেতু, $T=\frac{2u \sin \alpha}{g}$, $H=\frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$, $R=\frac{u^2}{g} \sin 2\alpha$.

(i) এখন $R^2=\frac{4u^4}{g^2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha=\frac{4u^4}{g^2}\, \frac{g^2T^2}{4u^2}\left(1-\frac{g^2T^2}{4u^2}\right)$

$$=\tfrac{1}{4}T^2(4u^2-g^2T^2)$$

$$\therefore\quad g^2T^4-4T^2u^2+4R^2=0$$

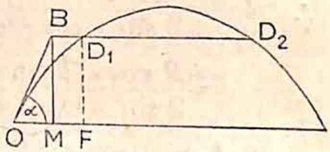
(ii) আবার $R^2=\frac{4u^4}{g^2}.\frac{2gH}{u^2}\left(1-\frac{2gH}{u^2}\right)=\frac{8H}{g}(u^2-2gH)$

$\therefore \quad 16gH^2-8Hu^2+gR^2=0.$

[দ্রষ্টব্য : প্রথম ক্ষেত্রে ∝ কে T-এর সাহায্যে এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে Hএর সাহায্যে অপসারিত করা হইয়াছে।]

উদা. 9. একটি এরোপ্লেন সমবেগ v লইয়া একই উচ্চতা h-এ উড়িতেছে। একটি কামানের ঠিক উপর দিয়া চলিয়া যাইবার পরে যখন এরোপ্লেনের উন্নতি কোণ α তখন যদি একটি গোলা ইহার দিকে সোজা ছোঁড়া হয়, দেখাও যে, $2(V\cos\alpha-v)\, v\tan^2\alpha=gh$ হইলে, গোলাটি এরোপ্লেনকে আঘাত করিবে। এখানে V গোলার প্রারম্ভিক বেগ, ইহার পথ অধিবৃত্ত।

যখন O হইতে গুলি ছোঁড়া হয় তখন মনে কর এরোপ্লেন B অবস্থানে আছে। গুলি যদি এরোপ্লেনকে বিদ্ধ করে তাহা হইলে ইহা D_1 অথবা D_2 অবস্থানে বিদ্ধ করিবে, ধর t সময় পরে গুলি এরোপ্লেনকে D_1 অবস্থানে বিদ্ধ করে। তাহা হইলে



$BD_1=vt. \quad OF=V\cos\alpha.t$

এখন $BD_1=MF=OF-OM=V\cos\alpha t-h\cos\alpha$

$\therefore \quad vt=V\cos\alpha\, t-h\cot\alpha, \quad t=\frac{h\cot\alpha}{V\cos\alpha-v}.$

আবার $h=FD_1=V\cos\alpha t-\frac{1}{2}gt^2$

$$=V\cos\alpha.\ \frac{h\cot\alpha}{V\cos\alpha-v}-\frac{1}{2}g\ \frac{h^2\cot^2\alpha}{(V\cos\alpha-v)^2}$$

বা, $2(V\cos\alpha-v)^2=2V\cos\alpha\,(V\cos\alpha-v)-gh\cot^2\alpha$

বা, $2(V\cos\alpha-2)\,v=gh\cot^2\alpha$; $\therefore\ 2(V\cos\alpha-v)\,v\tan^2\alpha=gh.$

উদা. 10. দেখাও যে প্রদত্ত বেগে P হইতে Q বিন্দুতে যাইবার সময়ের গুণফল $2PQ/g$.

ধর, P হইতে Q এর অনুভূমিক এবং উল্লম্ব দূরত্ব a এবং b. P হইতে Qতে যাইবার সময় যদি t হয়, তাহা হইলে

$a=u\,t\cos\alpha,\quad b=ut\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2. \quad \therefore\quad a^2+(b+\frac{1}{2}gt)^2=u^2t^2$

বা, $\frac{1}{4}g^2t^4+(gb-u^2)t^2+a^2+b^2=0$

যদি P হইতে Qতে যাইবার দুইটি সময় t_1 এবং t_2 হয়, তাহা হইলে

$t_1^2t_2^2=\frac{4(a^2+b^2)}{g^2}=\frac{4\,PQ^2}{g^2}$; $\therefore\quad t_1t_2=\frac{2PQ}{g}.$

উদা. 11. h ফুট উচ্চ কোন স্তম্ভের চূড়া হইতে একটি বন্দুকের গুলি u বেগে ছোড়া হইল এবং উহা ভূমিতে স্তম্ভের পাদদেশ হইতে k ফুট দূরে পতিত হইল। দেখাও যে উহার সম্ভাব্য উড্ডয়নকালের সমীকরণ $g^2t^4-4(gh+u^2)t^2+4(h^2+k^2)=0$. যেখানে g হইল অভিকর্ষজ ত্বরণ এবং t উড্ডয়নকাল।

মনে কর গুলিটিকে অনুভূমিকের সহিত α কোণ করিয়া ছোড়া হইয়াছিল। সুতরাং অনুভূমিক দিকে বেগ $= u\cos\alpha$ এবং উল্লম্ব নিম্নাভিমুখে বেগ $= u\sin\alpha$.

$$\therefore\quad h=u\sin\alpha . t+\tfrac{1}{2}gt^2 \text{ এবং } k=u\cos\alpha\, t.$$

বা, $u\sin\alpha=\frac{h}{t}-\frac{1}{2}gt\cdots$(i) এবং $u\cos\alpha=\frac{k}{t}\cdots$(ii)

(i) ও (ii)কে বর্গ করিয়া যোগ করিলে

$$u^2=\frac{h^2}{t^2}-2.\frac{h}{t}.\tfrac{1}{2}gt+\tfrac{1}{4}g^2t^2+\frac{k^2}{t^2}$$

বা, $u^2t^2=h^2+k^2-hgt^2+\frac{1}{4}g^2t^4$

বা, $g^2t^4-4ght^2-4u^2t^2+4(h^2+k^2)=0.$

বা, $g^2t^4-4(gh+u^2)t^2+4(h^2+k^2)=0.$

উদা. 12. একটি কণাকে V বেগে ও অনুভূমিকের সহিত α কোণে A হইতে উৎক্ষেপ করা হইল এবং উহা B বিন্দু দিয়া যায়। A-কে মূলবিন্দু, অনুভূমিক দিককে x-অক্ষ ও উল্লম্বদিককে y-অক্ষ ধরিলে B-র স্থানাঙ্ক (x, y). প্রমাণ কর যে, $\tan\alpha$-র দ্বিঘাত সমীকরণ হইল, $\tan^2\alpha-\frac{2V^2}{gx}\tan\alpha+1+\frac{2V^2 y}{gx^2}=0$ এবং B বিন্দুতে পৌঁছানোর সময়ের সমীকরণ $g^2t^4-4(V^2-gy)t^2+4r^2=0$ যেখানে r হইল A ও B বিন্দুর ভিতর দূরত্ব এবং g অভিকর্ষজ ত্বরণ। [C. P. 1969]

এখানে, B বিন্দুতে পৌঁছানোর সময় t হইলে, ঐ t সময় কণাটির অনুভূমিক সরণ x এবং উল্লম্ব সরণ y [$\because$ $B\equiv(x, y)$ এবং A মূলবিন্দু]

আবার, কণাটির অনুভূমিক দিকে বেগ $V\cos\alpha$ ও ত্বরণ নাই এবং উল্লম্বদিকে $V\sin\alpha$ এবং ত্বরণ g নিচের দিকে।

সুতরাং, $x=V\cos\alpha . t$; বা, $V\cos\alpha=\frac{x}{t}\cdots$(i)

এবং $y=V\sin\alpha . t-\frac{1}{2}gt^2$; বা, $V\sin\alpha=\frac{y}{t}+\frac{1}{2}gt\cdots$(ii)

এখন, (i) হইতে, $t=\frac{x}{V\cos\alpha}$

$y = V\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2$ হইতে,

$$y = V\sin\alpha.\frac{x}{V\cos\alpha} - \frac{1}{2}g.\left(\frac{x}{V\cos\alpha}\right)^2$$

বা, $y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}g.\frac{x^2}{V^2}.\sec^2\alpha.$

বা, $2yV^2 = 2x\tan\alpha.V^2 - gx^2(1+\tan^2\alpha).$

বা, $\frac{2yV^2}{gx^2} = \frac{2x\tan\alpha.V^2}{gx^2} - 1 - \tan^2\alpha.$

বা, $\tan^2\alpha - \frac{2V^2}{gx}.\tan\alpha + 1 + \frac{2V^2y}{gx^2} = 0.$ ইহা $\tan\alpha$-র একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

আবার, (i) ও (ii)কে বর্গ করিয়া যোগ করিলে,

$$V^2 = \left(\frac{x}{t}\right)^2 + \left(\frac{y}{t} + \frac{1}{2}gt\right)^2 = \frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2} + gy + \frac{1}{4}g^2t^2$$

বা, $4V^2t^2 = 4x^2 + 4y^2 + 4gyt^2 + g^2t^4$

বা, $g^2t^4 - 4(V^2 - gy)t^2 + 4(x^2+y^2) = 0.$

এখন, AB-র দূরত্ব$= r = \sqrt{x^2+y^2}$; $\therefore\ x^2+y^2 = r^2$

$\therefore\ g^2t^4 - 4(V^2-gy)t^2 + 4r^2 = 0.$

উদা. 13. একটি কণাকে উল্লম্ব ঊর্ধ্বাভিমুখে উৎক্ষেপ করা হইল। উৎক্ষেপ বিন্দু হইতে x_1, x_2, x_3 উচ্চতায় ইহার বেগ যথাক্রমে v_1, v_2, v_3. দেখাও যে অভিকর্ষ হেতু ত্বরণের মাণ

$$\frac{v_1^2x_1(x_2-x_3)+v_2^2x_2(x_3-x_1)+v_3^2x_3(x_1-x_2)}{2(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_1-x_2)}$$ [C. H. 1969]

মনে কর, প্রারম্ভিক বেগ u এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ g.

$\therefore\ v_1^2 = u^2 - 2gx_1,\ v_2^2 = u^2 - 2gx_2,\ v_3^2 = u^2 - 2gx_3.$

বা, $x_1 = \frac{u^2-v_1^2}{2g},\ x_2 = \frac{u^2-v_2^2}{2g},\ x_3 = \frac{u^2-v_3^2}{2g}$

এখন, $v_1^2x_1(x_2-x_3) = v_1^2.\ \frac{u^2-v_1^2}{2g}\left(\frac{u^2-v_2^2}{2g} - \frac{u^2-v_3^2}{2g}\right)$

$$= \frac{v_1^2(u^2-v_1^2)(v_3^2-v_2^3)}{4g^2}$$

$$= \frac{u^2\ v_1^2(v_3^2-v_2^2)+v_1^4(v_2^2-v_3^2)}{4g^2}$$

অনুরূপে, $v_2^2 x_2(x_3-x_1)=\dfrac{u^2.v_2^2(v_1^2-v_3^2)+v_2^4(v_3^2-v_1^2)}{4g^2}$

এবং $v_3^2.x_3(x_1-x_2)=\dfrac{u^2 v_3^2(v_2^2-v_1^2)+v_3^4(v_1^2-v_2^2)}{4g^2}$

$$\therefore\ v_1^2 x_1(x_2-x_3)+v_2^2 x_2(x_3-x_1)+v_3^2 x_3(x_1-x_2)$$

$$=\frac{u^2\{v_1^2(v_3^2-v_2^2)+v_2^2(v_1^2-v_3^2)+v_3^2(v_2^2-v_1^2)\}}{4g^2}$$

$$+\frac{v_1^4(v_2^2-v_3^2)+v_2^4(v_3^2-v_1^2)+v_3^4(v_1^2-v_2^2)}{4g^2}$$

$$=0+\frac{v_1^2\ v_2^2(v_1^2-v_2^2)+v_2^2 v_3^2(v_2^2-v_3^2)+v_3^2 v_1^2(v_3^2-v_1^2)}{4g^2}$$

$$=-\frac{(v_1^2-v_2^2)(v_2^2-v_3^2)(v_3^2-v_1^2)}{4g^2}$$

$[\because\ ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)=-(a-b)(b-c)(c-a)]$

$$=\frac{(v_2^2-v_1^2)(v_3^2-v_3^2)(v_1^2-v_3^2)}{4g^2}.$$

আবার, $(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_1-x_2)$

$$=\frac{(v_3^2-v_2^2)}{2g}.\frac{(v_1^2-v_3^2)}{2g}.\frac{(v_2^2-v_1^2)}{2g}$$

$$=\frac{(v_2^2-v_1^2)(v_3^2-v_2^2)(v_1^2-v_3^2)}{8g^3}$$

$$\therefore\ \frac{v_1^2 x_1(x_2-x_3)+v_2^2 x_2(x_3-x_1)+v_3^2 x_3(x_1-x_2)}{2(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_1-x_2)}$$

$$=\frac{(v_2^2-v_1^2)(v_3^2-v_2^2)(v_1^2-v_3^2).8g^3}{2\times 4g^2.(v_2^2-v_1^2)(v_3^2-v_2^2)(v_1^2-v_3^2)}=g.$$

উদা. 14. একটি কণাকে u বেগে উৎক্ষেপ করা হইল এবং উহা একটি নততলকে উল্লম্বভাবে আঘাত করিল। নততলের নতি উৎক্ষেপ বিন্দুতে অনুভূমিকের সহিত β হইলে, দেখাও যে কণাটির উড্ডয়নকাল $\dfrac{2u}{g\sqrt{1+3\sin^2\beta}}$. ইহা উৎক্ষেপ বিন্দু হইতে কত উচ্চে নততলকে আঘাত করিবে নির্ণয় কর। [C. H. 1962, '70]

মনে কর কণাটিকে অনুভূমিকের সহিত α কোণে উৎক্ষেপ করা হইয়াছিল এবং উহার উড্ডয়নকাল t, নততল বরাবর ও উহার উল্লম্ব বিশ্লেষণ করিয়া,

$u\cos(\alpha-\beta)-g\sin\beta.\ t-0.\cdots$(i)

এবং $u\sin(\alpha-\beta)t-\frac{1}{2}g\cos\beta.t^2=0.$

বা, $u \sin(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}g \cos \beta.t=0 \cdots$(ii)

(i) ও (ii) হইতে,

$$u^2 \cos^2(\alpha-\beta)+u^2 \sin^2(\alpha-\beta)=g^2 \sin^2\beta.t^2+\tfrac{1}{4}g^2.\cos^2\beta.t^2$$

বা, $u^2=g^2t^2(\sin^2 \beta+\frac{1}{4}\cos^2 \beta)=\frac{1}{4}g^2t^2(1+3 \sin^2 \beta)$

বা, $t=\dfrac{2u}{g\sqrt{1+3 \sin^2 \beta}}$.

আবার, যেহেতু কণাটির নততল বরাবর অনুভূমিক পাল্লা $u \cos \alpha.t$, অতএব উৎক্ষেপ বিন্দুর অনুভূমিক হইতে নততলের আঘাত বিন্দুর উচ্চতা $=u \cos \alpha.t.\tan \beta$.

$\therefore$ উচ্চতা $=u\, t.\tan \beta.\cos\{(\alpha-\beta)+\beta\}$

$=t.\tan \beta\{u \cos \alpha-\beta) \cos \beta-u \sin(\alpha-\beta) \sin \beta\}$

$=t.\tan \beta(g \sin \beta.t.\cos \beta-\frac{1}{2}g \cos \beta.t \sin \beta)$ [(i) ও (ii) হইতে]

$=\frac{1}{2}gt^2 \sin^2 \beta=\dfrac{2u^2 \sin^2 \beta}{g(1+3 \sin^2 \beta)}$ [t-এর মান বসাইয়া]

উদা. 15. একটি বোমা ভূমি স্পর্শে ফাটিয়া গেল এবং উহার অংশ কণাগুলি উহার চারিদিকে 80 ফুট/সে. পর্যন্ত বেগে ছড়াইয়া পড়িতে লাগিল। দেখাও যে বোমাটির ভূমি স্পর্শের স্থান হইতে 100 ফুট দূরে অবস্থিত কোন ব্যক্তি $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ সেকেণ্ড বিপদজনক অবস্থায় থাকিবে।

মনে কর বোমাটির একটি কণা v বেগে অনুভূমিকের সহিত α কোণে, t সেকেণ্ড পরে ঐ ব্যক্তিকে আঘাত করে।

$\therefore$ $v \cos \alpha.t=100$ এবং $v \sin \alpha.t-\frac{1}{2}gt^2=0$

$\therefore$ $v^2t^2=100^2+\frac{1}{4}g^2t^4$ বা, $\frac{1}{4}g^2t^4-v^2t^2+100^2=0.$

$\therefore$ $t^2=\dfrac{v^2\pm\sqrt{v^4-100^2g^2}}{\frac{1}{2}g^2}$

সুতরাং যে কোন বেগ v লইয়া [যেখানে $v^4 \not< 100^2g^2$, বা, $v \not< 10\sqrt{g}$] মাত্র দুইটি কণা ঐ ব্যক্তিকে আঘাত করিতে পারিবে। একটি কণা প্রথমে t_1 সময়ে, যেখানে $t_1^2=\dfrac{v^2-\sqrt{v^4-100^2g^2}}{\frac{1}{2}g^2}$ এবং দ্বিতীয় কণা পরে t_2 সময়ে, যেখানে $t_2^2=\dfrac{v^2+\sqrt{v^4-100^2g^2}}{\frac{1}{2}g^2}$.

এখন, দ্বিতীয় কণার ক্ষেত্রে, যখন v-এর মান বৃহত্তম, তখন সময়ের মান বৃহত্তম। সুতরাং v-এর সর্বোচ্চ মানের ক্ষেত্রে ঐ সময়ের পরে কোন কণা ঐ ব্যক্তিকে আঘাত করিতে পারিবে না।

এখানে v-এর সর্বোচ্চ মান 80 ফুট/সে.

$$\therefore \quad t_2^2=\frac{80^2+\sqrt{80^4-100^2.32^2}}{\frac{1}{2}.32^2}=\frac{6400+3200\sqrt{3}}{32\times16}$$

$\therefore \quad t_2=\frac{10}{4}\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ সেকেণ্ড এবং এই সময়ের পরে ঐ ব্যক্তির কোন বিপদ নাই।

আবার, প্রথম কণার ক্ষেত্রে,

$$t_1^2=\frac{v^2-\sqrt{v^4-100^2g^2}}{\frac{1}{2}g^2}=\frac{2.100^2}{v^2+\sqrt{v^4-100^2g^2}}.$$

স্পষ্টতঃই যখন v-এর মান বৃহত্তম, তখন সময়ের মান ক্ষুদ্রতম। সুতরাং v-এর সর্বোচ্চ মানের ক্ষেত্রে সময়ের পূর্বে কোন কণা ঐ ব্যক্তিকে আঘাত করিতে পারিবে না। এখানে v-এর সর্বোচ্চ মান 80 ফুট/সে.

$$\therefore \quad t_1^2=\frac{80^2-\sqrt{80^4-100^2.32^2}}{\frac{1}{2}.32^2}=\frac{6400-3200\sqrt{3}}{32\times16}$$

$\therefore \quad t_1=\frac{5\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ এবং এই সময়ের পূর্বে কোন কণা ঐ ব্যক্তিকে আঘাত করিতে পারিবে না অর্থাৎ ঐ সময়ের পূর্বে ঐ ব্যক্তির কোন বিপদ নাই।

$\therefore$ ঐ ব্যক্তি বিপদজনক অবস্থায় থাকিবে

$$=t_2-t_1=\frac{5\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)-\frac{5\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$=\frac{5}{2}\sqrt{2}$ সেকেণ্ড।

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা—I

1. (i) 10, (ii) 7, (iii) 7, (iv) 60°, (v) 3, (vi) 16 ;
2. না ; 3. 150 ফুট ; 4. 150 গজ ; 5. 150 গজ, $3\frac{1}{8}$ মিনিট ;
6. ট্রেনের গতির দিকের সহিত $\tan^{-1}\frac{5}{44}$ কোণে নত ;
7. $\pi-\cos^{-1}\frac{3}{5}$, 1 মিনিট 15 সে ; 10. 60° ; 11. 120° ;
12. 15 গজ/মিনিট ; 13. $1\frac{2}{3}$ মিনিট, 440 ফুট ;
14. 25 সেমি./সেকেণ্ড, $\sin^{-1}\frac{4}{5}$ পশ্চিমের উত্তরে ; 15. 30° ;
16. u, প্রথম বেগের সহিত 60° কোণ উৎপন্ন করে ; 18. 120° ;
19. 2 ঘণ্টা 45 মিনিট ; 20. 164 ফুট (প্রায়), দক্ষিণের $\tan^{-1}\frac{2}{3}$ কোণ পূর্বে (প্রায়)।

প্রশ্নমালা—II

1. 13 ফু./সে., প্রথমের আপেক্ষিক বেগ উত্তরের $\tan^{-1}\frac{12}{5}$ ডিগ্রি পশ্চিমে, 780 ফুট ; 2. ঘণ্টায় $3\sqrt{2}$ কি.মি. বেগে উত্তর পশ্চিম দিক হইতে ;
3. $\frac{160}{257}$ ঘণ্টা, $\frac{10}{\sqrt{257}}$ মাইল ; 4. উল্লম্বরেখার 45° কোণ ; 5. সমান ;
6. উল্লম্বরেখার সহিত $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ কোণে নত ঘণ্টায় $\sqrt{21}$ মাইল বেগে ;
7. $\sqrt{u^2+v^2}$, u-এর সহিত $\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\frac{u}{v}$; 8. $27\frac{3}{11}$ এবং $13\frac{7}{11}$ মাইল/ঘণ্টা ;
9. একই বিন্দুতে এবং ব্যাসের দুইপ্রান্তে, $3v$ এবং v ;
10. 188·56 মাইল/ঘণ্টা ; 11. উত্তরের পশ্চিমে ঘণ্টায় $4\sqrt{2}$ মাইল ;
13. পূর্বদিকে ; 14. 10 ঘণ্টা 12 মিনিটে P.M. ;
15. পূর্বের $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ দক্ষিণে ঘণ্টায় $4\sqrt{5}$ মাইল ; 17. প্রত্যেকটি 50 গজ ;
18. পূর্বের 30° উত্তরে ; 20. পশ্চিমের 75° উত্তরে এবং পশ্চিমের 15° উত্তরে।

প্রশ্নমালা—III

1. 25000 সেমি, 50 সেকেণ্ড ; 2. $u=70$ সেমি/সে. $f=40$ সেমি/সে^{2} ;
3. 43 ফুট ; 4. 14 ফুট/সে.^{2} ; 5. 10 গজ ; 8. 1 ইঞ্চি ;
10. 30 ফুট/সে., −2 ফুট/সে. ; 11. 1 ফুট/সেকেণ্ড^2, 6 সেকেণ্ড ;
13. $\frac{2c}{t(3t+t')}$; 16. কম ; 19. 2 ফুট/সেকেণ্ড^2 ;
21. 48 সেকেণ্ড, 16 সেকেণ্ড।

প্রশ্নমালা—IV

1. 40 ফুট/সেকেণ্ড ; 3. 100 ফুট ; 4. 117·6 মিটার (প্রায়) ;
5. প্রথম বস্তুটি ছুড়িবার 5 সেকেণ্ড পরে, 100 ফুট ;
6. 257·6 ফুট, 4 সেকেণ্ড ; 7. 64 ফুট ;
8. দ্বিতীয় বলটি ছোঁড়ার 3 সেকেণ্ড পরে, 240 ফুট উচ্চতায় ;
13. মিনারের ভূমি হইতে 295·8 ফুট উচ্চতায়, A-র বেগ নীচের দিকে এবং B-র বেগ উপরের দিকে ; 16. 184 ফুট ; 17. 290 ফুট।

প্রশ্নমালা—V

1. 250 পাউণ্ড.ফুট/সেকেণ্ড ; 2. (i) 128 পাউণ্ড.ফুট/সেকেণ্ড, (ii) 280,000 গ্রাম.সেমি./সেকেণ্ড ;
3. 640 ফুট ; 4. 242 টন ভার ; 5. 110 পাউণ্ড ভার ;
6. 150 পাউণ্ড ভার ; 7. 82·5 সেকেণ্ড ; 8. 6 পাউণ্ডাল, 3 পাউণ্ডাল ;
9. $8053\frac{1}{3}$ পাউণ্ড ভার ; 10. 2 ফুট, $\frac{1}{320}$ সেকেণ্ড ;
11. $\frac{36}{175}$ ফুট/সেকেণ্ড^2 ; 12. 404 পাউণ্ডভার ;
13. 440 ফুট, $27\frac{1}{2}$ টনভার ; 14. 1120 ফুট/সেকেণ্ড ; 15. $1\frac{4}{5}$ মাইল ;

প্রশ্নমালা—VI

1. 81 ফুট, 432 ফুট , 2. (i) 128 ফুট, (ii) 162 ফুট, (iii) 200 ফুট, (iv) 80 মিটার ; 3. (i) 75 ফুট, (ii) 100 $\sqrt{3}$ ফুট, $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ সেকেণ্ড, (iii) 48 ফুট/সেকেণ্ড ; 4. 416 ফুট (প্রায়) ; 5. 100 ফুট/সেকেণ্ড ;
7. 256 $\sqrt{2}$ ফুট/সেকেণ্ড, 45° ; 8. 52 $\sqrt{3}$ ফুট/সেকেণ্ড, 39 $\sqrt{2}$ ফুট ;
9. 15° অথবা 75° ; 10. 72 ফুট, 15°, 75° ; 11. 3 ফুট $5\frac{2}{3}$ ইঞ্চি ;
13. 60 $\sqrt{3}$ ফুট ; 14. 440 $\sqrt{5}$ ফুট ;

প্রশ্নমালা—VII

1. $\frac{2}{3}$ সেকেণ্ড, $\pi\sqrt{3}$ ফুট/সে. ; 2. $\frac{3}{\sqrt{7}}$, $\frac{2\sqrt{7}}{3}\pi$ সে.
3. 2 $\sqrt{3}$ ফু./সে. 4. 10 ফু./সে., π সে.।

১ এক বিন্দুতে প্রযুক্ত বলসমূহের লব্ধি এবং সাম্যাবস্থা

(Forces acting at a point—Composition and Equilibrium)

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী :

এক বিন্দুতে ক্রিয়মান দুইটি বল P এবং Q পরস্পরের সহিত α কোণ করিলে তাহাদের লব্ধি R এর জন্য, $R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$.

যদি লব্ধি P বলের সহিত θ কোণ করে, তাহা হইলে

$$\tan\theta=\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

বিশেষ প্রয়োগ : (i) $\alpha=90^\circ$ (দুইটি বল পরস্পর লম্বাভিমুখে)

$$R^2=P^2+Q^2\,;\quad \tan\theta=\frac{Q}{P}.$$

(ii) $P=Q$ (দুইটি সমান বল)

$$R=2P\cos\frac{\alpha}{2}\,;\quad \theta=\frac{\alpha}{2}.$$

উদাহরণমালা—I

উদা. 1. নিম্নের উদাহরণ সমূহে P এবং Q দুইটি বল; α অন্তর্বর্তী কোণ এবং R লব্ধি বল।

(i) $P=12,\ Q=5,\ \alpha=90^\circ$; R নির্ণয় কর; (ii) $P=16,\ R=65,\ \alpha=90^\circ$; Q নির্ণয় কর। (iii) $P=7,\ Q=8,\ \alpha=60^\circ$; R নির্ণয় কর। (iv) $P=3.\ Q=5,\ R=7$; α নির্ণয় কর। (v) $P=7,\ R=13,\ \alpha=60^\circ$; Q নির্ণয় কর।

সমাধান : $R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$ সূত্রে

(i) $R^2=12^2+5^2+2.\ 12.\ 5.\cos 90^\circ$

$=12^2+5^2=13^2$ [যেহেতু $\cos 90^\circ=0$] $\therefore\ R=13.$

(ii) $65^2 = 16^2 + Q^2 \quad \therefore \quad Q^2 = 65^2 - 16^2$

$= (65+16)(65-16) = 81 \times 49 \quad \therefore \quad Q = 9 \times 7 = 63.$

(iii) $R^2 = 7^2 + 8^2 + 2.7.8 \cos 60^\circ = 49 + 64 + 2 \times 56 \times \frac{1}{2}$

$= 49 + 64 + 56 = 169 \qquad \therefore \quad R = 13.$

(iv) $7^2 = 3^2 + 5^2 + 2.3.5 \cos \alpha.$

$\therefore \quad 30 \cos \alpha = 49 - 9 - 25 = 15 \quad \therefore \quad \cos \alpha = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}, \ \alpha = 60^\circ$

(v) $13^2 = 7^2 + Q^2 + 2.7.\ Q \cos 60^\circ = 7^2 + Q^2 + 7Q$

বা, $Q^2 + 7Q - 120 = 0$; বা, $(Q+15)(Q-8) = 0$

$\therefore \quad Q = 8.$ এখানে বল ঋণাত্মক ধরা হইল না।

উদা. 2. এক বিন্দুতে ক্রিয়মাণ দুইটি বলের মান 15 এবং 9 পা. ভার; (i) তাহাদের বৃহত্তম লব্ধি (ii) ক্ষুদ্রতম লব্ধি নির্ণয় কর।

বৃহত্তম লব্ধি $= 15 + 9 = 24$ পা. ভার।

ক্ষুদ্রতম লব্ধি $= 15 - 9 = 6$ পা. ভার।

উদা. 3. 24 এবং 7 পা. ভার দুইটি বল পরস্পর লম্বাভিমুখে একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে ; ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

লব্ধি বলের মান $= \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$ পা. ভার

লব্ধি বলের দিক্ 24 পা. ভার বলের সঙ্গে θ কোণ করিলে

$$\tan \theta = \frac{7}{24}.$$

উদা. 4. যদি একটি কণার উপর 40, 16, 35 এবং 28 পা. ভার বল যথাক্রমে উত্তর, দক্ষিণ, পূর্ব এবং পশ্চিম দিকে ক্রিয়া করে, তাহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

উত্তর দিকে 40 পা. ভার এবং দক্ষিণ দিকে 16 পা. ভার বলের লব্ধি

$= 40 - 16 = 24$ পা. ভার উত্তরাভিমুখে

পূর্বদিকে 35 পা. ভার এবং পশ্চিম দিকে 28 পা. ভার বলের লব্ধি

$= 35 - 28 = 7$ পা. ভার পূর্বাভিমুখে

এখন, নির্ণেয় লব্ধি = উত্তরাভিমুখে 24 পা. ভার এবং পূর্বাভিমুখে 7 পা. ভার বলের লব্ধি $= \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$ পা. ভার

যদি লব্ধি বল উত্তরদিকে সঙ্গে θ কোণ করে, তাহা হইলে $\tan \theta = \frac{24}{7}.$

উদা. 5. একটি কণার উপর 10 এবং $10\sqrt{2}$ পা. ভার বল পরস্পরের সহিত 135° কোণে প্রযুক্ত হইলে তাহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

ধর, লব্ধি বল R এবং ইহা 10 পা. ভার বলের সহিত θ কোণ করে, তাহা হইলে,

$$R^2 = 10^2 + (10\sqrt{2}) + 2.\ 10.\ 10\sqrt{2} \cos 135^\circ$$

$$= 100 + 200 + 200\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 100 + 200 - 200 = 100$$

$\therefore$ R = 10 পা. ভার

$$\tan\theta = \frac{10\sqrt{2}\sin 135^\circ}{10 + 10\sqrt{2}\cos 135^\circ} = \frac{10}{10-10}$$

বা, $\cot\theta = \frac{0}{10} = 0 \quad \therefore \theta = 90^\circ$

উদা. 6. এক বিন্দুতে ক্রিয়মাণ দুইটি বল পরস্পরের সহিত 60° কোণ করিয়া আছে, তাহাদের লব্ধি $5\sqrt{3}$ পা. ভার এবং একটি বল 5 পা. ভার, অপরটি নির্ণয় কর।

মনে কর, অপর বল Q, তাহা হইলে

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha$ সূত্রে, $(5\sqrt{3})^2 = 5^2 + Q^2 + 2.5.\ Q \cos 60^\circ$

বা, $75 = 25 + Q^2 + 2.\ 5.\ Q.\ \frac{1}{2}$

বা, $Q^2 + 5Q - 50 = 0$; বা, $(Q+10)(Q-5) = 0$

$\therefore$ Q = 5 পা. ভার। [Q-এর ঋণাত্মক মান ধরা হইল না]

উদা. 7. দুইটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 14 পা. ভার, তাহারা পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়া করে, তাহা হইলে লব্ধি 10 পা. ভার। বল দুইটি নির্ণয় কর।

মনে কর বল দুইটি P এবং Q ; তাহা হইলে $P + Q = 14 \ldots (i)$

এবং $\sqrt{P^2 + Q^2} = 10$ অর্থাৎ $P^2 + Q^2 = 100 \quad \ldots \quad \ldots (ii)$

এখন $2PQ = (P+Q)^2 - (P^2 + Q^2) = 14^2 - 10^2 = 96$

$$\therefore PQ = 48 \cdots (iii)$$

(i) এবং (iii) হইতে P = 8, Q = 6 অথবা P = 6, Q = 8.

উদা. 8. 6, 8 এবং 10 গ্রাম ভার বল এক বিন্দুতে ক্রিয়া করিয়া সাম্যাবস্থায় আছে; প্রথম এবং দ্বিতীয় বলের অন্তর্ভুক্ত কোণ বাহির কর।

মনে কর, নির্ণেয় কোণ α.

বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে বলিয়া 6 গ্রাম এবং 8 গ্রাম ভার বলের লব্ধি তৃতীয় বল 10 গ্রাম ভারের সমান ও বিপরীতমুখী।

এখন যেহেতু 6 গ্রাম এবং 8 গ্রাম ভার বলের লব্ধি 10 গ্রাম ভার

$\therefore$ $R^2 = P^2 + Q^2 + PQ \cos \alpha$ সূত্র হইতে

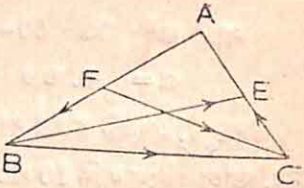
$10^2 = 6^2 + 8^2 + 2.6.8 \cos \alpha$

বা, $96 \cos \alpha = 10^2 - 6^2 - 8^2 = 0 \quad \therefore \cos \alpha = 0;\ \alpha = 90^\circ$

উদা. 9. A এবং B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু; P বিন্দুর উপর $\overrightarrow{AP}$ এবং $\overrightarrow{PB}$-র অনুপাতে দুইটি বল ক্রিয়া করে। দেখাও যে P যেখানেই হউক না কেন বল দুইটির লব্ধির মান ও দিক্ ধ্রুবক।

বলের ত্রিভুজ সূত্র হইতে $\overrightarrow{AP}$ এবং $\overrightarrow{PB}$- দ্বারা নির্দেশিত দুইটি বলের লব্ধি $\overrightarrow{AB}$-র দ্বারা প্রদর্শিত হয়। অতএব লব্ধির মান ও দিক নির্দিষ্ট।

উদা. 10. F এবং E যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুর মধ্যবিন্দু। যদি এক বিন্দুতে ক্রিয়মাণ দুইটি বলের মান ও দিক $\overrightarrow{BE}$ এবং $\overrightarrow{FC}$ দ্বারা প্রদর্শিত হয়, তাহা হইলে তাহাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।



$\overrightarrow{BE}$ রেখার দ্বারা প্রদর্শিত বল $\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{CE}$ বলদ্বয়ের লব্ধি

$\overrightarrow{FC}$ " " " " $\overrightarrow{FB}$ এবং $\overrightarrow{BC}$ বলের লব্ধি।

$\therefore$ $\overrightarrow{BE}$ এবং $\overrightarrow{FC}$ দ্বারা প্রদর্শিত বলদ্বয়ের লব্ধি

$2\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{CE}$ ও $\overrightarrow{FB}$-র লব্ধি সমান।

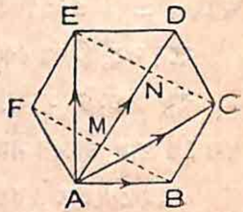
এখন, $CE=\frac{1}{2}CA$ এবং $FB=\frac{1}{2}AB$

$\therefore$ $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{FB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

সুতরাং, নির্ণেয় লব্ধি $=2\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

উদা. 11. ABCDEF একটি সম ষড়্ভুজ। যদি A কৌণিক বিন্দুতে $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ দ্বারা প্রদর্শিত পাঁচটি বল ক্রিয়া করে, তবে তাহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

FB এবং EC যুক্ত কর, ইহারা AD-কে যথাক্রমে M এবং N বিন্দুতে ছেদ করে।



স্পষ্টতঃ M এবং N বিন্দু FB এবং EC সরলরেখার মধ্যবিন্দু।

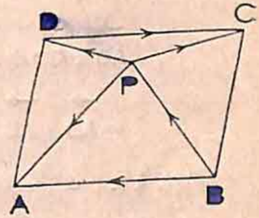
$\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AF}$ বলদ্বয়ের লব্ধি $2\overrightarrow{AM}$ এবং ইহা AD অভিমুখে।

$\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{AF}$ বলদ্বয়ের লব্ধি $2\overrightarrow{AN}$ এবং ইহা AD অভিমুখে। কিন্তু AM = DN

$\therefore\ 2\vec{AM}+2\vec{AN}=2\vec{AN}+2\vec{ND}=2\vec{AD}$

সুতরাং নির্ণেয় লব্ধি$=2\vec{AD}+\vec{AD}=3\vec{AD}$; ইহা AD রেখার দিকে ক্রিয়মাণ।

উদা. 12. ABCD একটি সামান্তরিক এবং P ইহার অভ্যন্তরে একটি কণা। $\vec{PA}$, $\vec{PC}$ এবং $\vec{BP}$, $\vec{DP}$-দ্বারা প্রদর্শিত চারিটি বল কণাটির উপর ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে, কণাটি যেখানেই থাকুক না কেন ইহা সাম্যাবস্থায় থাকিবে।



$\vec{BP}$ এবং $\vec{PA}$ বলের লব্ধি $\vec{BA}$; $\vec{DP}$ এবং $\vec{PC}$ বলদ্বয়ের লব্ধি $\vec{DC}$; কিন্তু $\vec{AB}=\vec{DC}$

$\therefore$ এক বিন্দুতে ক্রিয়মান $\vec{BA}$ এবং $\vec{DC}$ বল সমান ও বিপরীতমুখী ; সুতরাং প্রদত্ত বল চারিটি সাম্যবস্থায় আছে।

উদা. 13. যদি একটি কণার উপর ক্রিয়মান দুইটি বল কোনও সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় দ্বারা প্রদর্শিত হয়, তাহাদের লব্ধি ঐ সামান্তরিকের একটি বাহুর দ্বিগুণ দ্বারা প্রদর্শিত হইতে পারে।

[নিজে চিত্র আঁক]

মনে কর দুইটি বল $\vec{AC}$ এবং $\vec{BD}$ কর্ণের দ্বারা প্রদর্শিত হয়। যদি O দুই কর্ণের ছেদ বিন্দু হয়, তাহা হইলে ইহাদের লব্ধি $2\vec{AO}$ এবং $2\vec{BO}$ বলের লব্ধি।

$\vec{AO}$ এবং $\vec{BO}$ দ্বারা প্রদর্শিত বলের লব্ধি $2\vec{EO}$ দ্বারা প্রদর্শিত হয় ; (E বিন্দু AB বাহুর মধ্যবিন্দু)। কিন্তু $2\vec{EO}=\vec{BC}$.

$\therefore$ লব্ধি $2\vec{BC}$ বাহুর দ্বারা প্রদর্শিত হয়।

[**বিকল্প পদ্ধতি :** $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}$

$\vec{BD}=\vec{BA}+\vec{AD}$

$\therefore\ \vec{AC}+\vec{BD}=\vec{BC}+\vec{AD}=\vec{BC}+\vec{BC}=2\vec{BC}$.]

উদা. 14. ABCD একটি সামান্তরিক। দেখাও যে $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{AC}$ এবং $\vec{DB}$-র দ্বারা প্রদর্শিত চারিটি বলের লব্ধির মান এবং অবস্থান $2\vec{AB}$-র দ্বারা প্রদর্শিত হয়।

[ছবি নিজে আঁক]

$\vec{CD}+\vec{AC}=\vec{AD}$, সুতরাং, $\vec{BC}$, C বিন্দুতে ক্রিয়া করে,

$\vec{BC}+\vec{DB}=\vec{DC}$ সুতরাং, $\vec{AB}$, B " " "

$\therefore\ \vec{AB}+\vec{CD}+\vec{AC}+\vec{DB}=\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{DB}$

$=\vec{AB}+\vec{AB}=2\vec{AB}$, AB বরাবর

উদা. 15. একটি কণা P-কে ABCD চতুর্ভুজের অভ্যন্তরে কোথায় স্থাপন করিলে $\vec{PA}$, $\vec{PB}$, $\vec{PC}$ এবং $\vec{PD}$ রেখার দ্বারা প্রদর্শিত বলের ক্রিয়ার ফলে কণাটি স্থিরাবস্থায় থাকিবে ?

M, AC-র মধ্যবিন্দু হইলে, $\vec{PA}$ এবং $\vec{PC}$ রেখার দ্বারা প্রদর্শিত বলের লব্ধি $2\vec{PM}$ দ্বারা প্রদর্শিত হয়।

N, BD-র মধ্যবিন্দু হইলে, $\vec{PB}$ এবং $\vec{PD}$ রেখার দ্বারা প্রদর্শিত বলের লব্ধি $2\vec{PN}$ দ্বারা প্রদর্শিত হয়।

অতএব $2\vec{PM}$ এবং $2\vec{PN}$ সমান এবং বিপরীতমুখী হইলে চারিটি বলের ক্রিয়ার ফলে কণা সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

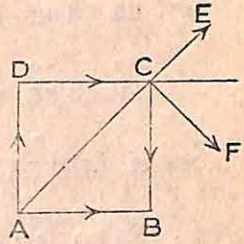
এই ক্ষেত্রে P বিন্দু MN-এর মধ্যবিন্দু।

সুতরাং চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দুই নির্ণেয় বিন্দু।

উদা. 16. ABCD একটি বর্গক্ষেত্র ; $\vec{AB}$, $\vec{CB}$, $\vec{AD}$ এবং $\vec{DC}$ বাহু বরাবর সমান বল P ক্রিয়া করে, ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর। [U.P. 1954]

$\vec{AB}$ এবং $\vec{AD}$ বরাবর ক্রিয়মাণ দুইটি সমান বল P-এর লব্ধি $P\sqrt{2}$ এবং ইহা AC বরাবর ক্রিয়া করে।

$\vec{DC}$ এবং $\vec{CB}$ বরাবর ক্রিয়মাণ দুইটি সমান বল P-এর লব্ধি $P\sqrt{2}$ এবং ইহা বর্ধিত DC এবং CB-এর অন্তর্বর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক বরাবর ক্রিয়া করে।



এখন, নির্ণেয় লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়মাণ CE বরাবর $P\sqrt{2}$ এবং CF বরাবর $P\sqrt{2}$ এই দুই সমান বলের লব্ধি। ইহাদের অন্তর্বর্তী কোণ সমকোণ।

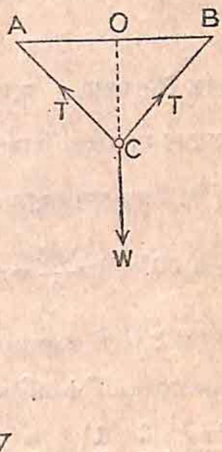
$\therefore$ লব্ধি $= 2P\sqrt{2}\cos 45^\circ = 2P$

লব্ধি বর্ধিত DC বরাবর ক্রিয়া করে।

✓ উদা. 17. l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একখানি সরু দড়ির দুই প্রান্ত একই অনুভূমিক রেখায় c দূরত্বে অবস্থিত দুইটি বিন্দুতে সংযুক্ত আছে। দড়িতে সরণক্ষম একটি মসৃণ ভারহীন আংটি হইতে W ভার ঝুলিতেছে। দেখাও যে দড়ির টান $\dfrac{lW}{2\sqrt{l^2-c^2}}$।

যেহেতু দড়িটি মসৃণ আংটির ভিতর দিয়া গিয়াছে, দড়ির উভয় অংশে টান সমান। মনে কর CA এবং CB উভয় অংশে টান T.

সাম্যাবস্থার জন্য টান দুইটির লব্ধি W-এর সমান ও বিপরীতমুখী



$\therefore \quad 2T\cos\dfrac{C}{2} = W \ldots\ldots$(i)

ACB কোণের সমদ্বিখণ্ডক CO সরলরেখা AB-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

এখন $\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{CO}{BC}$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}}{\frac{l}{2}} = \frac{\sqrt{l^2-c^2}}{l}$$

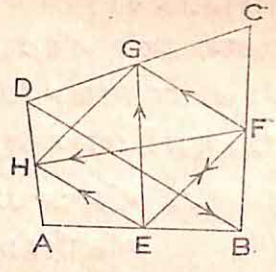
$$\therefore \quad \frac{2T\sqrt{l^2-c^2}}{l} = W; \quad \text{বা,} \quad T = \frac{lW}{2\sqrt{l^2-c^2}}$$

✓ উদা. 18. E, F, G, H যথাক্রমে একটি চতুর্ভুজের AB, BC, CD এবং DA বাহুর মধ্যবিন্দু। একটি বিন্দুতে ক্রিয়মান তিনটি বল যদি $\vec{EG}$, $\vec{FH}$ এবং $\vec{DB}$ দ্বারা প্রদর্শিত হয়, তাহা হইলে দেখাও যে, তাহারা সাম্যাবস্থায় থাকে।

EF, FG, GH এবং HE যোগ কর।

এখন $\vec{EG}$ বল $\vec{EF}$ এবং $\vec{FG}$ দ্বারা প্রদর্শিত বলের লব্ধি।

$\vec{FH}$ বল $\vec{FE}$ এবং $\vec{EH}$ বলের লব্ধি।



অতএব ইহারা $\vec{FG}$ এবং $\vec{EH}$ বলের লব্ধির সমান; কিন্তু $\vec{FG}$ এবং $\vec{EH}$ সমান বল একবিন্দুতে ক্রিয়মান $=$ BD.

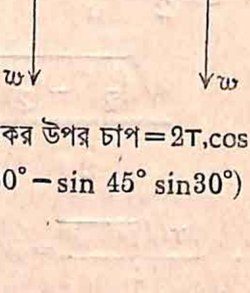
[কারণ, $FG=EH=\frac{1}{2}BD$]

$\vec{DB}$ এবং $\vec{BD}$ সমান ও বিপরীতমুখী;

অতএব বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে।

উদা. 19. একটি উলম্ব দেওয়াল A, B, C তিনটি মসৃণ খুঁটি, একটি সমবাহু ত্রিভুজ করিয়া আছে। ভূমি BC অনুভূমিক। দুইটি সমান ভার w একটি দড়ির দুই প্রান্তে বাঁধিয়া দেওয়া হইয়াছে এবং দড়িটি তিনটি খুঁটির উপর দিয়া গিয়াছে। খুঁটিগুলির উপর চাপ নির্ণয় কর। [H. S. 1963]

দড়ি মসৃণ খুঁটির উপর দিয়া গিয়াছে বলিয়া দড়ির সর্বত্র টান সমান। মনে কর ইহা T.



w ভারের সাম্যাবস্থা বিবেচনা করিয়া $T=w$

A খুঁটির উপর চাপ সমান দুইটি বল T-এর লব্ধি

$$=2T\cos 30^\circ=2w\frac{\sqrt{3}}{2}=w\sqrt{3}.$$

B অথবা C একই অবস্থায় আছে, ইহাদের প্রত্যেকের উপর চাপ $=2T\cos 75^\circ$

$$=2w\cos(45^\circ+30^\circ)=2w(\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ)$$

$$=\frac{2w}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{w}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1).$$

উদা. 20. চারিটি সমান বল এক বিন্দুতে ক্রিয়মান। প্রথম বল দ্বিতীয় বলের লম্বাভিমুখে; তাহাদের লব্ধি তৃতীয় বলের লম্বাভিমুখে এবং প্রথম তিন বলের লব্ধি চতুর্থ বলের লম্বাভিমুখে। ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রত্যেকটি বল P;

$\therefore$ প্রথম ও দ্বিতীয় বলের লব্ধি $= \sqrt{P^2+P^2} = P\sqrt{2}$

প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় বলের লব্ধি

$=$ পরস্পর লম্বাভিমুখী $P\sqrt{2}$ এবং P বলের লব্ধি $= \sqrt{2P^2+P^2} = P\sqrt{3}$

চারিটি বলের লব্ধি $=$ পরস্পর লম্বাভিমুখী $P\sqrt{3}$ এবং P-এর লব্ধি

$$= \sqrt{3P^2+P^2} = 2P.$$

উদা. 21. দুইটি সমান দৈর্ঘ্যের দড়ির সাহায্যে একটি বস্তুকে ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে। দড়ি দুইটি একই অনুভূমিক রেখার উপর দুইটি বিন্দুতে সংলগ্ন আছে। দেখাও যে দড়ির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি করিলে তাহাদের টান হ্রাস পায়।

মনে কর, দড়ি দুইটির প্রত্যেকটিতে টান T, এবং তাহাদের অন্তর্বর্তী কোণ 2θ; তাহা হইলে $W = 2T\cos\theta$.

বা, $T = \frac{W}{2}\sec\theta$.

দড়ির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি করিলে θ কমে, অতএব $\sec\theta$ কমে; সুতরাং দৈর্ঘ্য বাড়াইলে দড়ির টান কমে।

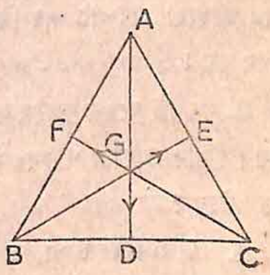
উদা. 22. ABC ত্রিভুজের ভূমি BC-র মধ্য বিন্দু D; দেখাও যে $\vec{AB}$ এবং $\vec{AC}$-র লব্ধি $\vec{AB}$ এবং $\vec{BD}$-র লব্ধির দ্বিগুণ।

$\vec{AB}$ এবং $\vec{AC}$-র লব্ধি $= 2\vec{AD}$.

কিন্তু বলের ত্রিভুজ-সূত্রের সাহায্যে $\vec{AB}$ এবং $\vec{BD}$-এর লব্ধি $\vec{AD}$.

$\therefore$ প্রমাণিত হইল যে $\vec{AB}$ এবং $\vec{AC}$-র লব্ধি $\vec{AB}$ এবং $\vec{BD}$-র লব্ধির দ্বিগুণ।

উদা. 23. একটি ত্রিভুজের BC, CA এবং AB বাহু যথাক্রমে D, E এবং F বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। $\vec{AD}$, $\vec{BE}$ এবং $\vec{CF}$ দ্বারা প্রদর্শিত তিনটি বলের লব্ধি নির্ণয় কর।



$$2\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

$$2\vec{BE} = \vec{BC} + \vec{BA}$$

$$2\vec{CF} = \vec{CA} + \vec{CB}.$$

$\therefore$ $2(\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF})$

$$=\vec{AB}+\vec{BA}+\vec{AC}+\vec{CA}+\vec{BC}+\vec{CB}=0$$

$$\therefore \quad \vec{AD}+\vec{BE}+\vec{CF}=0$$

উদা. 24. একটি বিন্দুতে 1, 2 এবং $\sqrt{3}$ মানের তিনটি বল ক্রিয়া করে। প্রথম বল দুইটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC-র $\vec{AB}$ এবং $\vec{AC}$ বাহু বরাবর ক্রিয়া করে এবং তৃতীয় বল BC বাহুর উপর লম্ব $\vec{DA}$ বরাবর ক্রিয়া করে। ইহাদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।

AB এবং AB র লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ কর।

ধর, এই দুইদিকে বিশ্লেষিতাংশ সমূহের সমষ্টি X এবং Y। ধর, লব্ধি AB-র সঙ্গে θ কোণ করে।

$$X=1+2\cos 60^\circ-\sqrt{3}\cos 30^\circ=1+2\times\tfrac{1}{2}-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2-\tfrac{3}{2}=\tfrac{1}{2}.$$

$$Y=0+2\sin 60^\circ-\sqrt{3}\sin 30^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\times\tfrac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}=\sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}}=1\ ;\ \tan\theta=\frac{Y}{X}=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}=\tan 60^\circ$$

$$\therefore \quad \theta=60^\circ$$

তাহা হইলে লব্ধির মান 1 এবং ইহা AC বরাবর ক্রিয়া করে।

প্রশ্নমালা I

1. দুইটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 25 পা. ভার এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি 7 পা. ভার। উহাদের মান নির্ণয় কর।

2. পরস্পর বিপরীত মুখে ক্রিয়া করিলে দুইটি বলের লব্ধি হয় 7 পা. ভার। যখন তাহারা পরস্পর লম্বাভিমুখে ক্রিয়া করে তখন লব্ধি 13 পা. ভার। বল দুইটি নির্ণয় কর।

3. দুইটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 31 গ্রাম ভার এবং তাহাদের ক্ষুদ্রতম লব্ধি 17 গ্রাম ভার। যদি তাহারা পরস্পর লম্বাভিমুখে ক্রিয়া করে তাহা হইলে তাহাদের লব্ধির মান কত হইবে ?

4. 7, 5 এবং 8 পা. ভার বল একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করিয়া সাম্যাবস্থায় আছে ; দ্বিতীয় এবং তৃতীয় বলের অন্তর্ভূত কোণ নির্ণয় কর।

5. ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরে একটি বিন্দু O কোন্ অবস্থানে থাকিলে $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$-র দ্বারা প্রদর্শিত তিনটি বলের ক্রিয়ার ফলে স্থিরাবস্থায় থাকিবে ?

[**ইঙ্গিত** :—মনে কর, D বিন্দু BC বাহুর মধ্যবিন্দু।

$\vec{OB}$ এবং $\vec{OC}$-র দ্বারা প্রদর্শিত বলের লব্ধি $2\vec{OD}$। সাম্যাবস্থার জন্য তৃতীয় বল $\vec{OA}$ ইহার সমান এবং বিপরীতমুখী।

অতএব O বিন্দু AD মধ্যমার উপর থাকিতে হইবে যেন $OA = 2OD$ হয়, তাহা হইলে, $AD - OD = 2OD$; বা, $3OD = AD \quad \therefore \quad OD = \frac{1}{3} AD$.

অনুরূপে, O মধ্যমাদ্বয়ের উপরও আছে। অতএব ইহা মধ্যমাত্রয়ের ছেদ বিন্দু। ইহা ABC ত্রিভুজের ভর কেন্দ্র।]

6. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ ; ইহার AB বাহুর মধ্যবিন্দু D ; প্রমাণ কর যে, $\vec{AD}$ এবং $\vec{AC}$ দ্বারা প্রদর্শিত বল দুইটির লব্ধি $\sqrt{7}\,\vec{AD}$ দ্বারা প্রদর্শিত হইবে।

7. যদি একটি বিন্দুতে ক্রিয়মাণ দুইটি বল একটি সামান্তরিকের দুই কর্ণের দ্বারা প্রদর্শিত হয়, তাহাদের লব্ধি ঐ সামান্তরিকের কোনও একটি বাহুর দ্বিগুণ রেখার দ্বারা প্রদর্শিত হইবে।

8. একটি বিন্দুতে 1, 2, 3, 4 এর অনুপাতে চারটি বল একটি আয়তক্ষেত্রের ক্রমানুসারে গৃহীত চারিটি বাহুর সমান্তরাল দিকে ক্রিয়া করে। ইহাদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।

9. ABCD একটি চতুর্ভুজ। এক বিন্দুতে ক্রিয়মাণ চারিটি বলের মান ও দিক্ $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{BC}$ এবং $\vec{DC}$-র দ্বারা প্রদর্শিত হয়। ইহাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

10. দেখাও যে, কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু ও বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর যোজক সরলরেখা দ্বারা নির্দেশিত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকে।

11. দুইটি বল এক বিন্দুতে ক্রিয়া করে, যদি একটির দিক বিপরীত করা হয় তাহা হইলে লব্ধি এক সমকোণ ঘুরিয়া যায়। প্রমাণ কর যে বল দুইটির মান সমান।

12. দুইটি বল P এবং Q-এর লব্ধি R ; যদি Qকে দ্বিগুণ করা হয়, নূতন লব্ধি P-এর লম্বাভিমুখে হয়। প্রমাণ কর যে $Q = R$. [U. P. 1936]

13. দুইটি বল P এবং Q পরস্পরের সহিত এমন কোণ করিয়া আছে যে $R = P$। দেখাও যে P-কে দ্বিগুণ করিলে নূতন লব্ধি Q-এর লম্বাভিমুখে ক্রিয়া করিবে। [U. P. 1951]

14. এক বিন্দুতে ক্রিয়মাণ তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে ; বৃহত্তম বলটি 5 পা. ভার এবং ক্ষুদ্রতম বল 3 পা. ভার। ইহাদের মধ্যে দুইটি বলের অন্তর্ভূক্ত কোণ এক সমকোণ ; অপর বলটি নির্ণয় কর।

15. তিনটি বল O বিন্দুতে প্রদত্ত দিকে ক্রিয়া করে এবং তাহারা সাম্যাবস্থায় আছে। যদি E বিন্দুর ভিতর দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায় এবং ইহা বলের ক্রিয়া রেখাগুলিকে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে তিনটি বল ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাতে।

16. একটি ভারহীন দড়ির দৈর্ঘ্য l, ইহাকে অনুভূমিক সমতলে অবস্থিত a ব্যবধানে দুইটি বিন্দু A এবং B এর সহিত বাঁধা হইয়াছে। W ভারের একটি মসৃণ আংটি দড়ির ভিতরে সরিতে পারে, একটি অনুভূমিক বল X প্রয়োগ করিয়া আংটিকে B-এর উল্লম্ব নীচে রাখা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে,

$$X=\frac{aW}{l} \text{ এবং দড়ির টান } \frac{W(a^2+l^2)}{2l^2}.$$

২ বলের বিশ্লেষণ ও লব্ধি

(Resolution of Forces and Resultant)

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

(i) F প্রদত্ত বলের দুইটি উপাংশ P এবং Q যদি F এর সহিত α এবং β কোণ করে, তাহা হইলে

$$\frac{P}{\sin\beta}=\frac{Q}{\sin\alpha}=\frac{F}{\sin(\alpha+\beta)};$$

(ii) দুইটি উপাংশ লম্বাভিমুখে থাকিলে তাহাদিগকে বিশ্লেষিতাংশ বলে। F বলের সহিত α কোণে বিশ্লেষিতাংশ $=F\cos\alpha$. এবং লম্বাভিমুখে বিশ্লেষিতাংশ $=F\sin\alpha$.

(iii) দুইটি পরস্পর লম্বাভিমুখী OX এবং OY সরলরেখার দিকে প্রত্যেক বলকে বিশ্লেষিত কর। এই দুই দিকে বিশ্লেষিতাংশ সমূহের সমষ্টি যদি X এবং Y হয় এবং লব্ধি R যদি OX-এর সহিত θ কোণ করে, তাহা হইলে

$$R=\sqrt{X^2+Y^2};\qquad \tan\theta=\frac{Y}{X}$$

সাম্যাবস্থার শর্ত $X=0,\ Y=0$;

উদাহরণমালা II

1. নিম্ন উদাহরন সমূহের প্রত্যেকটিতে একটি বল দেওয়া আছে এবং উহা প্রদত্ত দিকের সঙ্গে যে-কোণ করিয়াছে তাহা দেওয়া আছে ঃ

প্রদত্ত দিকে এবং তাহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষিতাংশ নির্ণয় কর ঃ—

(i) 10 পাউণ্ড ভার, 0°. (ii) 12 পাউণ্ড ভার, 30°, (iii) $10\sqrt{2}$ গ্রাম ভার, 45° (iv) 14 আউন্স ভার, 60° (v) 16 হন্দর ভার, 90° (vi) 20 কিগ্রা. ভার, 120° (vii) 8 টন ভার, 135° (viii) 50 গ্রাম ভার, 150° (ix) 9 মিলিগ্রাম ভার, 180°।

সমাধান ঃ

ধর, (প্রত্যেক ক্ষেত্রে) X এবং Y যথাক্রমে প্রদত্ত দিকে এবং তাহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষিতাংশ নির্দেশ করে।

(i) $X=10\cos 0^\circ=10$ পা. ভার।

$Y=10\sin 0^\circ=0.$

দ্রষ্টব্য ঃ বলের লম্বাভিমুখে তাহার কোন বিশ্লেষিতাংশ নাই।

(ii) $X=12\cos 30^\circ=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$ পা. ভার ;

$Y=12\sin 30^\circ=12\times\frac{1}{2}=6$ পা. ভার।

(iii) $X=10\sqrt{2}\cos 45^\circ=10$ গ্রাম ভার ;

$Y=10\sqrt{2}\sin 45^\circ=10$ গ্রাম ভার।

(iv) $X=14\cos 60^\circ=14\times\frac{1}{2}=7$ আউন্স ভার

$Y=14\sin 60^\circ=14\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$ আউন্স ভার

(v) $X=16\cos 90^\circ=0$; $Y=16\sin 90^\circ=16$ হন্দর ভার।

(vi) $X=20\cos 120^\circ=20\times(-\frac{1}{2})=-10$ কিলোগ্রাম ভার

$Y=20\sin 120^\circ=20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$ কিলোগ্রাম ভার

(vii) $X=8\cos 135^\circ=8\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-4\sqrt{2}$ টন ভার

$Y=8\sin 135^\circ=8\times\frac{1}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$ টন ভার ;

(viii) $X=50\cos 150^\circ=50\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-25\sqrt{3}$ গ্রাম ভার

$Y=50\sin 150^\circ=50\times\frac{1}{2}=25$ গ্রাম ভার

(ix) $X=9\cos 180^\circ=-9$ মিলিগ্রাম ভার ; $Y=9\sin 180^\circ=0.$

উদা. 2. 20 পাউণ্ড ভারের একটি বল অনুভূমিক দিকের সঙ্গে 30° কোণ করিয়া আছে। অনুভূমিক এবং উলম্ব দিকে ইহার বিশ্লেষিতাংশ নির্ণয় কর।

অনুভূমিক দিকে বিশ্লেষিতাংশ $=20\cos 30^\circ=20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$ পা. ভার

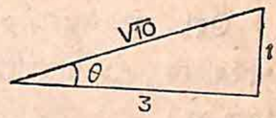
উলম্বদিকে বিশ্লেষিতাংশ $=20\sin 30^\circ=20\times\frac{1}{2}=10$ পা. ভার।

উদা. 3. একটি মালগাড়ি রেল লাইনের উপর আছে। রেল লাইনের দিকের সঙ্গে 60° কোণে অনুভূমিক তলে 20 টন ভার বল প্রয়োগ করিলে রেল লাইনের দিকে কি পরিমাণ বল গাড়ীটিকে চালাইবার চেষ্টা করিবে ?

রেল লাইনের দিকে (গাড়ীর সম্মুখ দিকে) বলের বিশ্লেষিতাংশ $=20\cos 60^\circ$ $=20\times\frac{1}{2}=10$ টন ভার।

উদা. 4. ঊর্ধ্বাভিমুখী 30 পাউণ্ড-ভারের একটি বলকে দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ করা হইয়াছে। একটি উপাংশ অনুভূমিকদিকে এবং তাহার মান 10 পা. ভার ; অপর উপাংশের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

মনে কর, অপর উপাংশ Q এবং ইহা প্রদত্ত 30 পা. ভার বলের সহিত θ কোণ করে। তাহা হইলে—



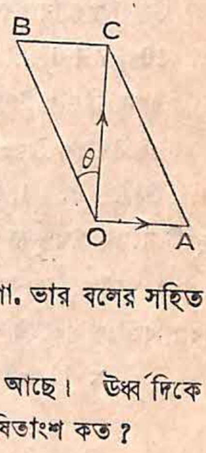
$$\frac{Q}{\sin 90^\circ}=\frac{10}{\sin\theta}=\frac{30^\circ}{\sin(90^\circ+\theta)}$$

$$\frac{10}{\sin\theta}=\frac{30}{\cos\theta};\ \text{বা},\ \tan\theta=\frac{10}{30}=\frac{1}{3},\ \theta=\tan^{-1}\frac{1}{3}$$

এখন $Q=\dfrac{10}{\sin\theta}=10\sqrt{10}$ পা. ভার

[বিকল্প পদ্ধতি : মনে কর, OC ঊর্ধ্বাভিমুখী 30 পা. ভার বলকে নির্দেশ করে এবং OA অনুভূমিক উপাংশ 10 পা. বলকে নির্দেশ করে।

সামান্তরিক OACB সম্পূর্ণ করা হইল। এখন OB অপর উপাংশ নির্দেশ করে।



$$\tan\theta=\frac{BC}{OC}=\frac{OA}{OC}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3},\ \theta=\tan^{-1}\frac{1}{3}$$

ত্রিভুজ OCB সমকোণী, $OB^2=OC^2+BC^2$

$=OC^2+OA^2=30^2+10^2=900+100=1000$

$\therefore$ $OB=10\sqrt{10}$ পা. ভার। অপর উপাংশ প্রদত্ত 30 পা. ভার বলের সহিত $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ কোণ করে। ইহার মান $10\sqrt{10}$ পা. ভার।

উদা. 5. একটি বল ঊর্ধ্বদিকের সঙ্গে 60° কোণ করিয়া আছে। ঊর্ধ্বদিকে ইহার বিশ্লেষিতাংশ 50 পাউণ্ড-ভার হইলে, অনুভূমিক দিকে বিশ্লেষিতাংশ কত ?

মনে কর, বলটির মান P, তাহা হইলে

$50=P\cos 60^\circ=P\times\frac{1}{2}$; $\therefore$ $P=100$ পাউণ্ড-ভার।

এখন, অনুভূমিক দিকে বিশ্লেষিতাংশ $=P\sin 60^\circ=100\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=50\sqrt{3}$ পা. ভার।

উদা 6. 10 গ্রাম ভরের সমান একটি বল দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভূত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। অন্তর্ভূত কোণটি 120° হইলে এই দুই রেখার দিকে (i) উপাংশদ্বয় কত হইবে ? (ii) বিশ্লেষিতাংশ কত হইবে ?

(i) লব্ধি $R=2P\cos\frac{\alpha}{2}$ সূত্র ব্যবহার করিয়া

$$10=2P\cos 60^\circ=2P\times\tfrac{1}{2} \quad \therefore \quad P=10 \text{ গ্রাম ভার।}$$

(ii) এই দুইদিকের প্রত্যেক দিকে বিশ্লেষিতাংশ $=10\cos 60^\circ$

$=5$ গ্রাম ভার।

উদা. 7. উত্তরদিকে 10 পা. ভার একটি বলের তিনটি উপাংশ আছে। উত্তর-পশ্চিমদিকে এবং পশ্চিমদিকে উপাংশ $5\sqrt{2}$ এবং 7 পা. ভার। তৃতীয় উপাংশ নির্ণয় কর।

ধর, নির্ণেয় উপাংশ বলের বিশ্লেষিতাংশ পূর্ব ও উত্তরদিকে যথাক্রমে X এবং Y. যেহেতু যে কোন দিকে লব্ধিবলের বিশ্লেষিতাংশ উক্তদিকে উপাংশসমূহের বিশ্লেষিতাংশ সমূহের বীজগাণিতিক সমষ্টির সমান।

পূর্বদিকে বিশ্লেষিত করিলে

$0=X-5\sqrt{2}\cos 45^\circ-7 \quad \therefore \quad X=5+7=12$ পা. ভার।

উত্তরদিকে বিশ্লেষণ করিলে

$10=Y+5\sqrt{2}\sin 45^\circ \quad \therefore \quad Y=10-5=5$ পা. ভার।

এখন, নির্ণেয় উপাংশ $=\sqrt{12^2+5^2}=13$ পা. ভার

এই উপাংশ উত্তর দিকের সঙ্গে θ কোণ করিলে $\tan\theta=\frac{12}{5}$.

উদা. 8. 1, 2, এবং 3 পাউণ্ড-ভার বল একবিন্দুতে ক্রিয়া করে। যে কোন দুইটি বলের অন্তর্ভুক্ত কোণ 120° হইলে ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

1 পাউণ্ড ভার বলের দিকে এবং তাহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ কর। এই দুইদিকে বিশ্লেষিতাংশ সমূহের লব্ধি যথাক্রমে X এবং Y হইলে,

$$X=1+2\cos 120^\circ+3\cos 240^\circ=1+2(-\tfrac{1}{2})+3(-\tfrac{1}{2})$$

$$=-\tfrac{3}{2} \text{ পা. ভার}$$

$$Y=0+2\sin 120^\circ+3\sin 240^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ পা. ভার}$$

$$\text{লব্ধি } R=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3} \text{ পা. ভার}$$

লব্ধি 1 পা. ভার বলের সঙ্গে θ কোণ করিলে

$$\tan\theta=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

যেহেতু X এবং Y উভয়ে ঋণাত্মক অতএব $\theta=180^\circ+30^\circ=210^\circ$.

উদা. 9. একটি বিন্দুতে পূর্বদিকে 3 গ্রাম, উত্তর-পূর্বদিকে $12\sqrt{2}$ গ্রাম, দক্ষিণ-পশ্চিমদিকে $3\sqrt{2}$ গ্রাম ভার বল প্রযুক্ত হইয়াছে। ইহাদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।

উত্তর-পূর্বদিকে $12\sqrt{2}$ গ্রাম ভার বল এবং দক্ষিণ-পশ্চিমদিকে $3\sqrt{2}$ গ্রাম ভার বল $=12\sqrt{2}-3\sqrt{2}=9\sqrt{2}$ গ্রাম ভার বল উত্তর-পূর্ব দিকে।

এখন $R^2=3^2+(9\sqrt{2})^2+2\cdot3(9\sqrt{3})\cos 45°$

$=9+162+54=225 \quad \therefore\ R=15$ গ্রাম ভার।

[**বিকল্প পদ্ধতি ঃ** পূর্বদিকে এবং উত্তরদিকে বিশ্লেষণ করিয়া

$X=3+9\sqrt{2}\cos 45°=3+9=12$ গ্রাম ভার।

$Y=9\sqrt{2}\sin 45°=9$ গ্রাম ভার।

$R=\sqrt{X^2+Y^2}=\sqrt{12^2+9^2}=15$ গ্রাম ভার।]

লব্ধি যদি পূর্বদিকের সঙ্গে θ কোণ করে, তাহা হইলে $\tan\theta=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$.

উদা. 10. 1, 2, 3, 4 গ্রাম ভার বল একটি বর্গক্ষেত্র ABCD-র কেন্দ্র O বিন্দুতে প্রযুক্ত হইয়াছে এবং ইহারা যথাক্রমে A, B, C, D কৌণিকবিন্দুর অভিমুখে ক্রিয়া করে। ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

OC-র দিকে 3 পা. ভার বল এবং OA-র দিকে 1 পা. ভার বল
$=3-1=2$ পা. ভার বল OC-র দিকে ;

OD-র দিকে 4 পা. ভার বল এবং OB-র দিকে 2 পা. ভার বল
$=4-2=2$ পা. ভার বল OD-র দিকে,

এখন নির্ণেয় লব্ধি = OB এবং OD-র দিকে দুইটি সমান বল প্রত্যেকে 2 পা. ভার বলের লব্ধি,

$\therefore$ নির্ণেয় লব্ধি $=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ পা. ভার বল।

ইহা COD কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, অতএব CD-র লম্বাভিমুখে।

উদা. 11. একটি বিন্দুতে 3, 4 এবং 5 পাউণ্ড ভার বল একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুত্রয়ের সমান্তরাল দিকে ক্রিয়া করে ; ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

এক বিন্দুতে ক্রিয়মাণ বল তিনটির ক্রিয়ারেখা সমবাহু ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিন বাহুর সমান্তরাল বলিয়া যে-কোন দুইটি বলের অন্তর্বর্তী কোণ 120°।

3 পা. ভার বলের দিকে এবং তাহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া, বিশ্লেষিতাংশ সমূহের সমষ্টি এই দুইদিকে X এবং Y ধরিয়া

$X=3+4\cos 120°+5\cos 240°=3-\frac{4}{2}-\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}$ পা. ভার

$$Y = 0 + 4\sin 120^\circ + 5\sin 240^\circ = 4\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ পা. ভার}$$

$$R = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{9}{4}+\tfrac{3}{4}} = \sqrt{3} \text{ পা. ভার}$$

$$\tan\theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

যেহেতু X এবং Y উভয়ে ঋণাত্মক $\therefore\ \theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$

অর্থাৎ লব্ধি দ্বিতীয় বল 4. পা. ভারের লম্বাভিমুখে।

উদা. 12. একটি বিন্দুতে তিনটি সমান মান P বিশিষ্ট বল প্রযুক্ত হইয়াছে। মধ্যবর্তী বলটি অপর দুই বলের প্রত্যেকের সঙ্গে 60° কোণ করিয়া আছে। ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

প্রথম এবং তৃতীয় বল দুইটির লব্ধি $2P\cos 60^\circ = 2P\times\frac{1}{2} = P$, ইহা দ্বিতীয় বলের দিকে

$\therefore$ বল তিনটির লব্ধি $= P + P = 2P$ দ্বিতীয় বলের দিকে।

উদা. 13. এক সমতলে অবস্থিত $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$ রেখার দিকে P, 3P, $\sqrt{3}P$, $\sqrt{3}P$ বল ক্রিয়া করে। যদি $\angle AOB = 60^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ$ এবং $\angle COD = 120^\circ$ হয়, তাহা হইলে বলসমূহের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। [C.U. 1950]

P বলের দিকে এবং তাহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া এবং বিশ্লেষিতাংশ সমূহের সমষ্টি এই দুইদিকে X এবং Y ধরিয়া

$$X = P + 3P\cos 60^\circ + \sqrt{3}P\cos 150^\circ + \sqrt{3}P\cos 270^\circ$$

$$= P + \tfrac{3}{2}P + \sqrt{3}P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 0 = P.$$

$$Y = 0 + 3P\sin 60^\circ + \sqrt{3}P\sin 150^\circ + \sqrt{3}P\sin 270^\circ$$

$$= 3P\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}P\times\tfrac{1}{2} + \sqrt{3}P(-1)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}P + \frac{\sqrt{3}}{2}P - \sqrt{3}P = \sqrt{3}P.$$

$\therefore\ R = \sqrt{P^2 + 3P^2} = 2P$; $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}P}{P} = \sqrt{3}$; $\therefore\ \theta = 60^\circ$

অতএব লব্ধি $= 2P$, ইহা OB-র দিকে ক্রিয়মাণ।

উদা. **14.** এক সম ষড়ভুজের কেন্দ্রে একটি ক্ষুদ্র অঙ্গুরী আছে। দৃঢ়ভাবে ছয়টি কৌণিক বিন্দুতে আবদ্ধ ছয়টি দড়ি দিয়া ইহাকে স্থিরাবস্থায় রাখা হইয়াছে। পরপর চারিটি দড়িতে টান যথাক্রমে 2, 7, 9 এবং 6 পা. ভার। অপর দুইটি দড়িতে টান নির্ণয় কর।

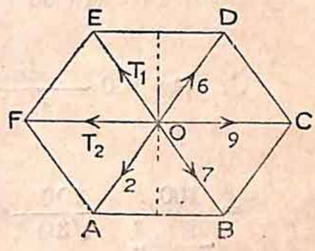
মনে কর ABCDEF ষড়ভূজের কেন্দ্র O.

$\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$ দড়িতে টান, যথাক্রমে 2, 7, 9 এবং 6 পা. ভার; অবশিষ্ট দুইটি দড়িতে টান T_1 এবং T_2.

OC এবং OC-র লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া সাম্যাবস্থার শর্তানুসারে

$0=9+6\cos 60°+T_1\cos 120°+T_2\cos 180°-2\cos 60°+7\cos 60°$

$=9+6\times\frac{1}{2}+T_1(-\frac{1}{2})+T_2(-1)-2\times\frac{1}{2}+7\times\frac{1}{2}$



$=9+3-\frac{1}{2}T_1-T_2-1+\frac{7}{2}$

$=14\frac{1}{2}-\frac{1}{2}T_1-T_2 \cdots\cdots$(i)

আবার, $0=0+6\sin 60°+T_1\sin 120°+T_2\sin 180°-2\sin 60°-7\sin 60°$

$=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}+T_1\frac{\sqrt{3}}{2}-9\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+T_1\frac{\sqrt{3}}{2}\ldots\ldots$(ii)

(ii) সমীকরণ হইতে, $T_1=3$ পা. ভার

(i) সমীকরণে T_1 এর মান স্থাপন করিয়া, $T_2=14\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=13$ পা. ভার।

উদা. 15. একটি কণার উপর 10 পা. এবং 6 পা. ভার বল পরস্পরের লম্বাভিমুখে ক্রিয়া করিতেছে, আর একটি 8 পা. ভার বল ইহাদের অন্তর্বর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া ক্রিয়া করিতেছে, ইহারা সকলেই বিন্দুটি হইতে বহির্মুখী। যে বল ইহাদিগকে সাম্যাবস্থায় রাখিতে পারে তাহার মান নির্ণয় কর। [U. P. Board 1953]

মনে কর, নির্ণেয় বল P প্রথম বল 10 পা. ভারের সহিত α কোণ করিয়া আছে। এখন, প্রথম বল এবং তাহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া সাম্যাবস্থার শর্তানুসারে—

$0=10+8\cos 45°+0+P\cos\alpha=10+8\times\frac{1}{\sqrt{2}}+P\cos\alpha$

বা, $P\cos\alpha=-(10+4\sqrt{2}) \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$(i)

$0=0+8\sin 45°+6+P\sin\alpha=8\times\frac{1}{\sqrt{2}}+6+P\sin\alpha$

বা, $P\sin\alpha=-(6+4\sqrt{2}) \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$(ii)

(i) এবং (ii) হইতে [বর্গ করিয়া যোগ কর]

$$P^2=(10+4\sqrt{2})^2+(6+4\sqrt{2})^2$$
$$=100+32+80\sqrt{2}+36+32+48\sqrt{2}$$
$$=200+128\sqrt{2}.$$

$\therefore\ P=\sqrt{200+128\sqrt{2}}.$ পা. ভার।

উদা. 16. 100 পা. ভারের একটি বলকে তাহার দুইদিকে যথাক্রমে 30° এবং 45° কোণ করিয়া দুইটি বলে বিশ্লেষিত কর।

মনে কর P এবং Q দুইটি উপাংশ, তাহা হইলে

$$\frac{P}{\sin 45^\circ}=\frac{Q}{\sin 30^\circ}=\frac{100}{\sin(45^\circ+30^\circ)}$$

$$\therefore\ P=100.\frac{\sin 45^\circ}{\sin(45^\circ+30^\circ)}=100\times\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 30^\circ+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 30^\circ}$$

$$=\frac{100}{\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}=\frac{200}{\sqrt{3}+1}=\frac{200(\sqrt{3}-1)}{2}=100(\sqrt{3}-1) \text{ পা. ভার}$$

$$Q=100\ \frac{\sin 30^\circ}{\sin(45^\circ+30^\circ)}=100\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 30^\circ+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 30^\circ}$$

$$=\frac{50\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{100\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}=50\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) \text{ পা. ভার}$$

উদা. 17. 200 গ্রাম ভারের একটি বলকে তাহার উভয়দিকে পরস্পরের মধ্যে 60° কোণ করিয়া থাকে এমন দুইটি সমান বলে বিশ্লেষণ কর।

মনে কর, নির্ণেয় উপাংশ দুইটি প্রত্যেকে P, তাহা হইলে

$$\frac{P}{\sin 30^\circ}=\frac{200}{\sin 60^\circ};$$

$$\therefore\quad P=\frac{200\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ}=\frac{200\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{200}{\sqrt{3}}=\frac{200}{3}\sqrt{3} \text{ গ্রাম ভার।}$$

[এখানে উপাংশ দুইটির প্রত্যেকে প্রদত্ত বলের সঙ্গে 30° কোণ করিতেছে।]

উদা. 18. দুইটি সমান বল P-এর লব্ধি যদি P হয় তাহাদের অন্তর্বর্তী কোণ নির্ণয় কর।

ধর অন্তর্বর্তী কোণ α, তাহা হইলে

$P=2P\cos\frac{\alpha}{2}$; বা, $1=2\cos\frac{\alpha}{2}$; বা, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$; $\frac{\alpha}{2}=60°$

$\therefore \quad \alpha=120°$.

উদা. 19. দুইটি বল পরস্পর লম্বাভিমুখে ক্রিয়া করিলে তাহাদের লব্ধি $\sqrt{10}$ পা. ভার। যদি তাহারা 60° কোণ করিয়া ক্রিয়া করে তাহা হইলে লব্ধি $\sqrt{13}$ পা. ভার হয়। বল দুইটির মান নির্ণয় কর। [U.P.B. 1950]

মনে কর, বল দুইটির মান P এবং Q,

প্রথম ক্ষেত্রে $(\sqrt{10})^2=P^2+Q^2$ অর্থাৎ $P^2+Q^2=10$ ......(i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $(\sqrt{13})^2=P^2+Q^2+2PQ\cos 60°$

$13=P^2+Q^2+PQ$ ... ...(ii)

(i) এবং (ii) হইতে $13=10+PQ$ অর্থাৎ $PQ=3$ ...(iii)

এখন $(P+Q)^2=P^2+Q^2+2PQ=10+2\times3=16$

$\therefore \quad P+Q=4$ ... ...(iv)

(iii) এবং (iv) হইতে $P=3,\ Q=1$ অথবা $P=1,\ Q=3$

অতএব বল দুইটির মান 3 এবং 1 পা. ভার।

উদা. 20. দুইটি বল P এবং Q-এর লব্ধি P-এর লম্বাভিমুখে; একই কোণ করিয়া আছে এমন P এবং Q′-এর লব্ধি Q′-এর লম্বাভিমুখে। দেখাও যে $QQ'=P^2$.

মনে কর, উভয় ক্ষেত্রেই বল দুইটি α কোণ করিয়া আছে; তাহা হইলে

প্রথম ক্ষেত্রে : $\frac{P}{\sin(\alpha-90°)}=\frac{Q}{\sin 90°}$ ... ...(i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে : $\frac{P}{\sin 90°}=\frac{Q'}{\sin(\alpha-90°)}$ ... ...(ii)

(i) এবং (ii) হইতে, $\frac{P^2}{\sin(\alpha-90°)\sin 90°}=\frac{QQ'}{\sin 90°\sin(\alpha-90°)}$

অর্থাৎ $P^2=QQ'$.

উদা. 21. P−Q, P এবং P+Q বল এক বিন্দুতে ক্রিয়া করে, তাহাদের দিক এক সমবাহু ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহুর সমান্তরাল; লব্ধি নির্ণয় কর। [U.P. 1946]

এক বিন্দুতে ক্রিয়মান তিনটি বল সমবাহু ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিন বাহুর সমান্তরাল বলিয়া যে কোন দুই বলের অন্তর্ভূত কোণ 120°.

P বলের দিকে এবং P বলের লম্বাভিমুখে বিশ্লেষিত করিয়া, X এবং Y এই দুইদিকে বিশ্লেষিতাংশের সমষ্টি হইলে,

$$X=P+(P+Q)\cos 120^\circ+(P-Q)\cos 240^\circ$$

$$=P+(P+Q)(-\tfrac{1}{2})+(P-Q)(-\tfrac{1}{2})=P-\tfrac{1}{2}P-\tfrac{1}{2}Q-\tfrac{1}{2}P+\tfrac{1}{2}Q=0$$

$$Y=0+(P+Q)\sin 120^\circ+(P-Q)\sin 240^\circ$$

$$=(P+Q)\frac{\sqrt{3}}{2}+(P-Q)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}Q.$$

$\therefore$ লব্ধি P বলের লম্বাভিমুখে $\sqrt{3}Q$.

উদা. 22. (i) তিনটি বল P, Q, R যথাক্রমে $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ রেখা বরাবর ক্রিয়া করে; F তাহাদের লব্ধি বলের মান হইলে প্রমাণ কর যে

$$F^2=P^2+Q^2+R^2+2QR\cos BOC+2RP\cos COA+2PQ\cos AOB.$$

[C.U. 1948]

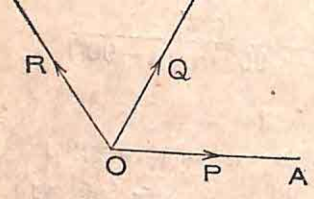
(ii) উপরের উদাহরণে যদি যে কোন দুই বলের অন্তর্ভূত কোণ 120° হয়, তাহা হইলে $F^2=P^2+Q^2+R^2-QR-RP-PQ$.

(iii) একটি বিন্দুতে ক্রিয়মাণ তিনটি বল P, Q, R যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}$ বাহুর সমান্তরাল হইলে, প্রমাণ কর যে. $F^2=P^2+Q^2+R^2-2QR\cos A-2RP\cos B-2PQ\cos C$; যেখানে F উহাদের লব্ধির মান।

(i) OA এবং OA-এর লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ কর; এই দুইদিকে বিশ্লেষিতাংশ সমূহের সমষ্টি যথাক্রমে X এবং Y ধর। তাহা হইলে

$$X=P+Q\cos AOB+R\cos COA \quad \ldots \quad \ldots(i)$$

$$Y=0+Q\sin AOB+R\sin COA \quad \ldots \quad \ldots(ii)$$



$$F^2=X^2+Y^2=P^2+Q^2(\cos^2 AOB+\sin^2 AOB)+R^2(\cos^2 COA+\sin^2 COA)$$
$$+2PQ\cos AOB+2PR\cos COA+2QR(\cos AOB\cos COA+\sin AOB\sin COA)$$
$$=P^2+Q^2+R^2+2PQ\cos AOB+2PR\cos COA+2QR\cos(AOC-AOB)$$
$$=P^2+Q^2+R^2-2QR\cos BOC+2RP\cos COA+2PQ\cos AOB.$$

(ii) $X = P + Q\cos 120^\circ + R\cos 240^\circ = P - Q\times\frac{1}{2} + R(-\frac{1}{2})$

$= P \quad \frac{Q}{2} - \frac{R}{2}.$

$Y = 0 + Q\sin 120^\circ + R\sin 240^\circ = \frac{Q\sqrt{3}}{2} - \frac{R\sqrt{3}}{2}.$

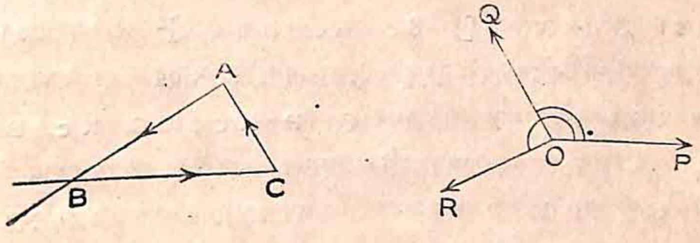
$F^2 = X^2 + Y^2 = P^2 + Q^2(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}) + R^2(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}) \quad PQ - PR + 2QR(\frac{1}{4}-\frac{3}{4})$

$= P^2 + Q^2 + R^2 - QR - RP - PQ.$

(iii) এক বিন্দুতে ক্রিয়মাণ তিনটি বল P, Q, R যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত BC, CA, AB বাহুর সমান্তরাল হইলে

$\angle QOP = 180^\circ - C, \ \angle ROP = 180^\circ + B$

$X = P + Q\cos\angle QOP + R\cos\angle ROP = P - Q\cos C - R\cos B$



i ii

$Y = 0 + Q\sin QOP + R\sin ROP = Q\sin C - R\sin B$

$F^2 = X^2 + Y^2$

$= P^2 + Q^2(\cos^2 C + \sin^2 C) + R^2(\cos^2 B + \sin^2 B)$

$- 2PQ\cos C - 2PR\cos B + 2QR(\cos C\cos B - \sin C\sin B)$

$= P^2 + Q^2 + R^2 - 2PQ\cos C - 2PR\cos B + 2QR\cos(B+C)$

$= P^2 + Q^2 + R^2 - 2QR\cos A - 2RP\cos B - 2PQ\cos C$

যেহেতু $\cos(B+C) = \cos(180^\circ - A) = -\cos A.$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যদি $P = Q = R$ হয়,

$F^2 = P^2(3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C).$

উদা. 23. এক বিন্দুতে ক্রিয়মাণ তিনটি বল ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিন বাহুর সমান্তরাল এবং তাহারা যথাক্রমে বিপরীত কোণের কোসাইনের অনুপাতে। দেখাও যে তাহাদের লব্ধি $[1 - 8\cos A\cos B\cos C]^{\frac{1}{2}}$ অনুপাতে।

ধর, তিনটি বল P, Q, R. এখানে $P = K \cos A$, $Q = K \cos B$, $R = K \cos C$.
পূর্বে উদাহরণের অনুরূপে,

$F^2 = K^2 [\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 6 \cos A \cos B \cos C]$.

এখন ত্রিকোণমিতি হইতে

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$.

$\therefore \quad F^2 = K^2 [1 - 8 \cos A \cos B \cos C]$

$$F = K [1 - 8 \cos A \cos B \cos C]^{\frac{1}{2}}$$

অর্থাৎ $F \propto [1 - 8 \cos A \cos B \cos C]^{\frac{1}{2}}$

উদা. 24. ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুর ভিতর দিয়া ক্রিয়মাণ তিনটি বল বিপরীত বাহুর লম্বাভিমুখে এবং তাহারা যথাক্রমে কোণগুলির কো-সাইনের অনুপাতে। দেখাও যে লব্ধি $[1 - 8 \cos A \cos B \cos C]^{\frac{1}{2}}$ এর অনুপাতে।

যেহেতু ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বত্রয় সমবিন্দু, অতএব বলত্রয় একবিন্দুতে ক্রিয়মাণ এবং $P = K \cos A$, $Q = K \cos B$. $R = K \cos C$। অধিকন্তু যেহেতু বল তিনটি ত্রিভুজের বাহুর উপর লম্ব যে কোন দুই বলের অন্তর্ভূত কোণ তাহারা যে দুই বাহুর উপর লম্ব তাহাদের অন্তর্ভূত কোণের সমান। এখন পূর্বের দুই উদাহরণের অনুরূপে সমাধান পাওয়া যায়।

উদা. 25. একটি কণার উপর উত্তর দিকে P বল, পশ্চিমদিকে Q বল, দক্ষিণ-পশ্চিমদিকে $P\sqrt{2}$ গ্রাম ভার বল এবং পূর্বদিকে 8 গ্রাম ভার বল প্রযুক্ত হইয়া কণাটি স্থিরাবস্থায় আছে। P এবং Q বল নির্ণয় কর।

পূর্বদিকে এবং উত্তরদিকে বিশ্লেষণ করিয়া সাম্যাবস্থার শর্তানুসারে

$0 = 8 - Q - 5\sqrt{2} \cos 45° = 8 - Q - 5 = 3 - Q \quad \therefore \quad Q = 3$ গ্রাম ভার

আবার, $0 = P - 5\sqrt{2} \sin 45° = P - 5$; $\therefore \quad P = 5$ গ্রাম ভার।

উদা. 26. দুইটি বল P এবং Q পরস্পর α কোণে ক্রিয়া করে ; তাহাদের লব্ধি R ; ঐ দুইদিকে ক্রিয়মাণ অপর দুইটি বল P′ এবং Q′এর লব্ধি R′ ; প্রমাণ কর যে R এবং R′ এর অন্তর্বর্তী কোণের কো-সাইন

$[PP' + QQ' - (PQ' + P'Q) \cos \alpha]/RR'$ [C. U. 1967]

P-এর দিকে এবং তাহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া

$R \cos \theta = P + Q \cos \alpha \cdots$(i) $R \sin \theta = Q \sin \alpha \cdots$(ii)

অনুরূপে $R' \cos \theta' = P' + Q' \cos \alpha \cdots$(iii) $R' \sin \theta' = Q' \sin \alpha \ldots$(iv)

এখন R এবং R′ এর অন্তর্বর্তী কোণ হইল $\theta' - \theta$

$$\cos(\theta'-\theta)=\cos\theta'\cos\theta-\sin\theta'\sin\theta.$$

$$=\frac{P'+Q'\cos\alpha}{R'}\cdot\frac{P+Q\cos\alpha}{R}+\frac{Q'\sin\alpha}{R'}\cdot\frac{Q\sin\alpha}{R}.$$

$$=\frac{PP'+(PQ'+P'Q)\cos\alpha+QQ'(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{RR'}$$

$$=\frac{PP'+QQ'+(PQ'+P'Q)\cos\alpha}{RR'}$$

উদা. 27. দুই বল R এবং S পরস্পর θ কোণ করিয়া একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং তাহাদের লব্ধি F. অপর দুইটি বল R এবং S′ ঐ দুই রেখা বরাবর ক্রিয়া করে এবং তাহাদের লব্ধি F′। যদি F এবং F′ এর ক্রিয়া রেখার অন্তর্বর্তী কোণ ϕ হয় প্রমাণ কর যে, $(1-\cos\phi)(1+\cos\phi)=[(R^2S'^2-2RR'SS'+R'^2S^2)(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)]/F^2F'^2$ [C. U. 1946]

মনে কর লব্ধি F বল R এর দিকের সঙ্গে γ কোণ করে এবং লব্ধি F′ বল R (বা R′) এর দিকের সঙ্গে γ' কোণ করে তাহা হইলে $\phi=\gamma'-\gamma$.

R এর দিকে এবং তাহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া

$$F\cos\gamma=R+S\cos\theta \quad\text{....(i)}\qquad F\sin\gamma=S\sin\theta \quad\text{...(ii)}$$

অনুরূপে, $F'\cos\gamma'=R'+S'\cos\theta$ ...(iii) $F'\sin\gamma'=S'\sin\theta$ ....(iv)

এখন $\sin\phi=\sin(\gamma'-\gamma)=(\sin\gamma'\cos\gamma-\cos\gamma'\sin\gamma)$

$$=\frac{S'\sin\theta}{F'}\times\frac{R+S\cos\theta}{F}-\frac{R'+S'\cos\theta}{F'}\times\frac{S\sin\theta}{F}$$

$$=\frac{(RS'-R'S)\sin\theta+SS'\sin\theta\cos\theta-SS'\sin\theta\cos\theta}{FF'}$$

$$\therefore\ \sin^2\phi=\frac{(RS'-R'S)^2\sin^2\theta}{(FF')^2}$$

$$1-\cos^2\phi=\frac{(R^2S'^2+R'^2S^2-2RR'SS')(1-\cos^2\theta)}{F^2F'^2}$$

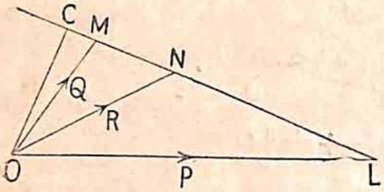
বা, $(1-\cos\phi)(1+\cos\phi)$

$$=\frac{(R^2S'^2-2RR'SS'+R'^2S^2)(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{F^2F'^2}.$$

উদা. 28. O বিন্দুতে ক্রিয়মাণ P এবং Q বলের লব্ধি R ; একটি সরলরেখা ইহাদের ক্রিয়ারেখাকে L, M এবং N বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। দেখাও যে,

$$\frac{P}{OL}+\frac{Q}{OM}=\frac{R}{ON}$$

O হইতে প্রদত্ত ছেদকের উপর OC লম্ব অঙ্কিত কর এবং OC-এর দিকে বিশ্লেষণ কর। যেহেতু যে কোন দিকে উপাংশ সমূহের বিশ্লেষিতাংশের সমষ্টি = ঐ দিকে লব্ধি বিশ্লেষিতাংশ ∴ P cos LOC + Q cos MOC = R cos NOC.



অর্থাৎ $P.\frac{OC}{OL}+Q.\frac{OC}{OM}=R.\frac{OC}{ON}$ $\therefore\ \frac{P}{OL}+\frac{Q}{OM}=\frac{R}{ON}$.

উদা. 29. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, ইহার A কোণ সমকোণ। AD সরলরেখা BC-র উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে $\overrightarrow{AB}$ বরাবর $\frac{1}{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ বরাবর $\frac{1}{AC}$ বলের লব্ধি $\overrightarrow{AD}$ বরাবর $\frac{1}{AD}$. [নিজে চিত্র আঁক]

$$R^2=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{AC^2+AB^2}{AB^2.AC^2}=\frac{BC^2}{AB^2\ AC^2};\quad \therefore\ R=\frac{BC}{AB.AC}$$

এখন ABD এবং ABC সদৃশ ত্রিভুজদ্বয়ে

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{AC};\quad \therefore\ AB.AC=BC.AD.$$

এখন, $R=\frac{BC}{BC.AD}=\frac{1}{AD}$

লব্ধি R যদি AB-র সঙ্গে θ কোণ করে, তাহা হইলে

$$\tan\theta=\frac{1}{AC}\div\frac{1}{AB}=\frac{AB}{AC}=\tan C=\tan DAB.$$

∴ লব্ধি AD বরাবর ক্রিয়া করে।

উদা. 30. P ও Q বল দুইটির লব্ধি R ; যদি Q কে দ্বিগুণ করা হয় তবে R এর মানও দ্বিগুণ হয়। আবার Q কে বিপরীতমুখী করা হইলে R এর মান দ্বিগুণ হয়। দেখাও যে P : Q : R = $\sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{2}$.

প্রথম ক্ষেত্রে $P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha=R^2$ ... (i)

Q দ্বিগুণিত করিলে R দ্বিগুণিত হয়

∴ দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $P^2+4Q^2+4PQ\cos\alpha=4R^2$ ... (ii)

Q-র দিক্ পরিবর্তন করিলেও R দ্বিগুণিত হয়

∴ তৃতীয় ক্ষেত্রে, $P^2+Q^2-2PQ\cos\alpha=4R^2$ ... (iii)

(i) এবং (iii) যোগ করিয়া $2P^2+2Q^2=5R^2$ .... (iv)

(iii) সমীকরণের উভয়দিকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া (ii)-এর সহিত যোগ করিলে

$3P^2+6Q^2=12R^2$; অর্থাৎ $P^2+2Q^2=4R^2$ ... (v)

(iv) হইতে (v) বিয়োগ করিয়া, $P^2=R^2$

(v)-তে ইহা বসাইয়া, $R^2+2Q^2=4R^2$ $\therefore$ $2Q^2=3R^2$

তাহা হইলে $3P^2=2Q^2=3R^2$

$$\therefore \frac{P^2}{2}=\frac{Q^2}{3}=\frac{R^2}{2};\quad \therefore P:Q:R=\sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{2}.$$

উদা. 31. একটি বিন্দুতে দুইটি সমান বল ক্রিয়া করে। তাহাদের লব্ধির বর্গ গুণফলের তিনগুণ হইলে অন্তর্বর্তী কোণ নির্ণয় কর। [P. U. 1933]

ধর, অন্তর্বর্তী কোণ α, এবং সমান বল দুইটি প্রত্যেকে P, তা হইলে $R^2=3P^2$;

এখন $R=2P\cos\frac{\alpha}{2}$ সূত্রে $P\sqrt{3}=2P\cos\frac{\alpha}{2}$

$$\therefore \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \frac{\alpha}{2}=30^\circ \quad \therefore \alpha=60^\circ$$

উদা. 32. 3P এবং 2P দুইটি বলের লব্ধি R। প্রথমে বল দ্বিগুণ করিলে লব্ধির মান দ্বিগুণ হয়। বল দুইটির অন্তবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

ধর, নির্ণেয় অন্তর্বর্তী কোণ α

প্রথম ক্ষেত্রে, $R^2=(3P)^2+(2P)^2+2\cdot6P^2\cos\alpha$,

অথবা, $R^2=13P^2+12P^2\cos\alpha$ ... (i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $(2R)^2=(6P)^2+(2P)^2+2.\ 12P^2\cos\alpha$,

অথবা, $4R^2=40P^2+24P^2\cos\alpha$ ... (ii)

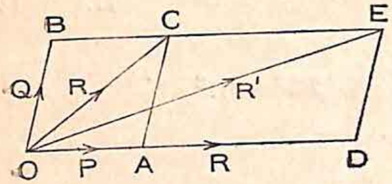
(i) হইতে R^2 এর মান (ii) তে স্থাপন করিলে

$$52P^2+48P^2\cos\alpha=40P^2+24P^2\cos\alpha,$$

অথবা $12=-24\cos\alpha$. অথবা $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$; $\therefore$ $\alpha=120^\circ$.

উদা. 33. দুইটি বল P এবং Q এর লব্ধি R। যদি P-কে R পরিমাণ বৃদ্ধি করা হয় এবং Q অপরিবর্তিত রাখা হয় তাহা হইলে নূতন লব্ধি P+R এর সঙ্গে যে কোণ করে তাহা লব্ধি R পূর্বে P-এর সঙ্গে যে কোণ করিতেছিল তাহার অর্ধেক। নূতন লব্ধির মান নির্ণয় কর। R যদি P-এর সঙ্গে θ কোণ করে দেখাও যে নূতন লব্ধি= $2R\cos\frac{\theta}{2}$.

মনে কর, R বল P-এর সঙ্গে θ কোণ করে



এখন OC = AD = CE.

$$\therefore \angle COE = \angle CEO = \angle EOD = \frac{\theta}{2}$$

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha,$$

$$R'^2 = (P+R)^2 + Q^2 + 2(P+R) Q \cos \alpha$$
$$= P^2 + 2PR + R^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha + 2RQ \cos \alpha$$
$$= R^2 + R^2 + 2R(P + Q \cos \alpha)$$

কিন্তু $P + Q \cos \alpha = R \cos \theta$.

$$\therefore \quad R'^2 = 2R^2 + 2R^2 \cos \theta = 2R^2 (1 + \cos \theta) = 4R^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad R' = 2R \cos \frac{\theta}{2}.$$

উদা. 34. দুইটি বল P এবং Q পরস্পরের সহিত α কোণে ক্রিয়া করে ; তাহাদের লব্ধি R। যদি বল দুইটির প্রত্যেককে R পরিমাণ বৃদ্ধি করা হয়, দেখাও যে নূতন লব্ধি পূর্বলব্ধি R-এর সহিত যে কোণ করে, তাহার ট্যানজেন্ট

$$\frac{(P-Q) \sin \alpha}{P+Q+R+(P+Q) \cos \alpha}.$$

মনে কর, প্রথমক্ষেত্রে লব্ধি P-এর দিকের সঙ্গে θ কোণ করে এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে θ' কোণ করে, তাহা হইলে,

$$\tan \theta = \frac{Q \sin \alpha}{P + Q \cos \alpha} \cdots \text{(i)} \quad \tan \theta' = \frac{(Q+R) \sin \alpha}{P+R+(Q+P) \cos \alpha} \cdots \text{(ii)}$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রের লব্ধি প্রথম ক্ষেত্রের লব্ধির সঙ্গে $\theta' - \theta$ কোণ করে

এখন $\tan (\theta' - \theta) = \dfrac{\tan \theta' - \tan \theta}{1 + \tan \theta' \tan \theta}$.

$$= \frac{(P + Q \cos \alpha)(Q+R) \sin \alpha - \{P+R+(Q+R) \cos \alpha\} Q \sin \alpha}{(P + Q \cos \alpha)\{P+R+(Q+R) \cos \alpha\} + Q(Q+R) \sin^2 \alpha}.$$

$$= \frac{P(P-Q) \sin \alpha}{P^2 + Q^2 + PR + 2PQ \cos \alpha + R(P+Q) \cos \alpha + QR}$$

$$= \frac{R(P-Q) \sin \alpha}{R^2 + PR + QR + R(P+Q) \cos \alpha} \quad [\because \ R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha]$$

$$= \frac{(P-Q) \sin \alpha}{P+Q+R+(P+Q) \cos \alpha}.$$

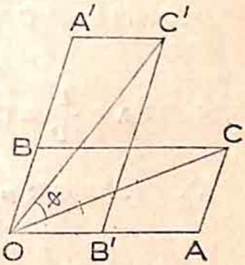
উদা. 35. দুইটি বল P এবং Q-এর পরস্পরের মধ্যে নতি θ, যদি P এবং Q পরস্পর স্থান বিনিময় করে, দেখাও যে লব্ধি ϕ পরিমাণ কোণ ঘুরে যেখানে

$$\tan\frac{\phi}{2}=\frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\theta}{2}$$

মনে কর লব্ধি P এবং Q-এর সঙ্গে β এবং γ কোণ করিয়া আছে

[চিত্রে $\beta=\angle AOC=\angle A'OC'$, $\gamma=\angle BOC=\angle B'OC'$

$\gamma+\beta=\angle AOB=\theta$]



এখন $\phi=\gamma-\beta$

আমরা জানি $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\dfrac{P}{Q}$

$$\therefore\quad \frac{\sin\gamma-\sin\beta}{\sin\gamma+\sin\beta}=\frac{P-Q}{P+Q}$$

বা,
$$\frac{2\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2}}{2\sin\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}}=\frac{P-Q}{P+Q}$$

$$\therefore\quad \tan\frac{\gamma-\beta}{2}=\frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\gamma+\beta}{2}=\frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\theta}{2}$$

অর্থাৎ $\tan\frac{\phi}{2}=\frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\theta}{2}$.

উদা. 36. দুইটি বল P+Q এবং P−Q পরস্পরের সহিত 2α কোণ করিয়া আছে ; তাহাদের লব্ধি দুই বলের সমদ্বিখণ্ডক রেখার সঙ্গে θ কোণ করে। দেখাও যে $P\tan\theta=Q\tan\alpha$. [P. U. 1931]

এখানে লব্ধি P+Q এর সহিত $\alpha-\theta$ কোণ করে এবং P−Q এর সহিত $\alpha+\theta$ কোণ করে

$$\therefore\quad \frac{P+Q}{P-Q}=\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha-\theta)}.$$

এখন যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা (Componendo and Dividendo)

$$\frac{P}{Q}=\frac{\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\alpha+\theta)-\sin(\alpha-\theta)}=\frac{2\sin\alpha\cos\theta}{2\cos\alpha\sin\theta}$$

$$=\tan\alpha.\cot\theta=\frac{\tan\alpha}{\tan\theta}$$

অর্থাৎ $P\tan\theta=Q\tan\alpha$.

উদা. 37. দেখাও যে একটি ত্রিভুজের দুইবাহু AB এবং AC বরাবর ক্রিয়মাণ দুইটি বল sec B এবং sec C-এর লব্ধি (tan B + tan C) এবং ইহা A হইতে BC-র উপর লম্ব AD বরাবর ক্রিয়া করে। [নিজে ছবি আঁক]

$$\text{AB বরাবর } \sec B = \frac{AB \sec B}{AB} = \frac{AB}{BD}.$$

$$\text{AC বরাবর } \sec C = \frac{AC \sec C}{AC} = \frac{AC}{CD}.$$

মনে কর $\lambda = \frac{1}{BD}$ এবং $\mu = \frac{1}{CD}$. তাহা হইলে যেহেতু $\lambda. BD = 1 = \mu\ CD$.

$\therefore$ $\lambda. AB$ এবং $\mu. AC$ বলদ্বয়ের লব্ধি $= (\lambda + \mu)\ AD$.

$$= \left(\frac{1}{BD} + \frac{1}{CD}\right) AD = \frac{AD}{BD} + \frac{AD}{CD} = \tan B + \tan C.$$

এবং ইহা AD বরাবর ক্রিয়মাণ।

উদা. 38. ABCD একটি চতুর্ভুজ। একবিন্দুতে ক্রিয়মাণ ছয়টি বলের মান ও দিক্ $2\vec{AB}$, $3\vec{BC}$, $2\vec{CD}$, $\vec{DA}$, $\vec{CA}$ এবং $\vec{DB}$-র দ্বারা নির্দেশিত হইতে পারে। দেখাও যে ইহারা সাম্যাবস্থায় আছে। [নিজে ছবি আঁক]

ABCD চতুর্ভুজে

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} + \vec{DA} = 0 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

ABC ত্রিভুজে

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

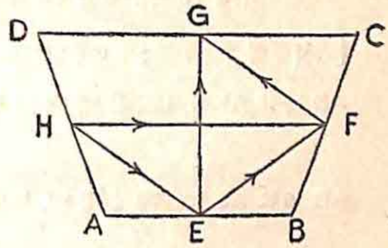
BCD ত্রিভুজে

$$\vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DB} = 0 \quad \text{(iii)}$$

যোগ করিয়া $2\vec{AB} + 3\vec{BC} + 2\vec{CA} + \vec{DA} + \vec{CA} + \vec{DB} = 0$

অতএব একবিন্দুতে ক্রিয়মাণ বলসমূহ যাহাদের মান ও দিক $2\vec{AB}$, $3\vec{BC}$, $2\vec{CD}$, $\vec{DA}$, $\vec{CA}$ এবং $\vec{DB}$ দ্বারা প্রদর্শিত হয় তাহারা সাম্যাবস্থায় আছে।

উদা. 39. ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD, DA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E, F, G, H ; দুইটি বলের মান ও দিক্ $\vec{EG}$ এবং $\vec{HF}$ দ্বারা প্রদর্শিত হইলে, দেখাও যে $\vec{AC}$ তাহাদের লব্ধির মান ও দিক প্রদর্শন করে।



$\vec{EG} = \vec{EF} + \vec{FG}$

$\vec{HF} = \vec{HE} + \vec{EF}$

∴ এই বল দুইটির লব্ধি

$= 2\vec{EF} + \vec{HE} + \vec{FG}$

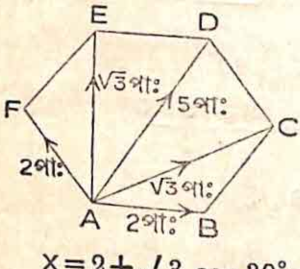
কিন্তু $HE = \frac{1}{2}DB$ এবং $FG = \frac{1}{2}BD$.

$\vec{HE}$ এবং $\vec{FG}$ সমান ও বিপরীতমুখী

∴ লব্ধি $= 2\vec{EF} = \vec{AC}$.

উদা: 40. একটি সম-ষড়ভুজের একটি কৌণিক বিন্দুতে 2, $\sqrt{3}$, 5, $\sqrt{3}$ এবং 2 পা. ভার বল যথাক্রমে অন্য পাঁচটি কৌণিক বিন্দুর দিকে ক্রিয়া করিতেছে। লব্ধির মান এবং দিক্ নির্ণয় কর।

মনে কর, ABCDEF সমষড়ভুজের A কৌণিক বিন্দুতে প্রদত্ত বলসমূহ প্রযুক্ত হইয়া B, C, D, E এবং F কৌণিক বিন্দু পাঁচটির দিকে ক্রিয়া করিতেছে।



জ্যামিতি হইতে সহজে দেখান যায় যে কোণ BAC, CAD, DAE, EAF প্রত্যেকে 30°.

AB এবং তাহার লম্বাভিমুখে AE-র দিকে বিশ্লেষণ কর, এই দুইদিকে বিশ্লেষিতাংশ সমূহের সমষ্টি X ও Y ধর, তাহা হইলে

$X = 2 + \sqrt{3}\cos 30^\circ + 5\cos 60^\circ + 0 + 2\cos 120^\circ$

$= 2 + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \times \frac{1}{2} + 2(-\frac{1}{2}) = 2 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} - 1 = 5$ পা. ভার

$Y = 0 + \sqrt{3}\sin 30^\circ + 5\sin 60^\circ + \sqrt{3} + 2\sin 120^\circ$

$= \sqrt{3} \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ পা. ভার।

লব্ধি R যদি AB-র দিকের সঙ্গে θ কোণ করে

$R^2 = X^2 + Y^2 = 5^2 + (5\sqrt{3})^2 = 100 \quad \therefore \quad R = 10$ পা. ভার

$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3} \quad \therefore \quad \theta = 60°$

অতএব লব্ধি 10 পা. ভার বল এবং ইহা AD-র দিকে ক্রিয়া করে।

[**বিকল্প পদ্ধতি :** এই ক্ষেত্রে অবশ্য লব্ধি অতি সহজে নির্ণয় করা যায়।

AB এবং AF বরাবর 2 পা. ভার বল দুইটির লব্ধি $= 2.\ 2.\cos 60°$

$= 2$ পা. ভার এবং ইহা AD-র দিকে

AC এবং AE বরাবর $\sqrt{3}$ পা. ভার বল দুইটির লব্ধি $= 2.\sqrt{3}\cos 30°$

$= 2\sqrt{3}.\ \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$ পা. ভার এবং ইহা AD-র দিকে।

অতএব বল সমূহের লব্ধি AD-র দিকে এবং ইহার মান $= 2 + 3 + 5 = 10$ পা. ভার।]

উদা. 41. একটি সম-ষড়ভুজের একটি কৌণিক বিন্দুতে 2, 3, 4, 5 এবং 6 কিলোগ্রাম ভারের বল যথাক্রমে অপর পাঁচটি কৌণিক বিন্দুর দিকে ক্রিয়া করিতেছে ; ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

দুই গ্রাম ভার বলের দিকে এবং তাহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ কর ; এই দুই দিকে বিশ্লেষিতাংশ সমূহের সমষ্টি যথাক্রমে X এবং Y ধর। তাহা হইলে

$X = 2 + 3\cos 30° + 4\cos 60° + 5\cos 90° + 6\cos 120°$

$= 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + 4 \times \frac{1}{2} + 5 \times 0 - 6 \times \frac{1}{2} = 1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + 3\sqrt{3}}{2}.$

$Y = 0 + 3\sin 30° + 4\sin 60° + 5\sin 90° + 6\sin 120°$

$= 3 \times \frac{1}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{2} + 5 + \frac{6\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + 5 + \frac{10\sqrt{3}}{2} = \frac{13 + 10\sqrt{3}}{2}.$

$R^2 = \frac{1}{4}(4 + 27 + 169 + 300 + 2 \times 6\sqrt{3} + 2 \times 130\sqrt{3})$

$= \frac{1}{4}(500 + 272\sqrt{3}) = 125 + 68\sqrt{3}$

$R = \sqrt{125 + 68}\sqrt{3}$ কিগ্রা ; $\qquad \tan\theta = \frac{13 + 10\sqrt{3}}{2 + 3\sqrt{3}}.$

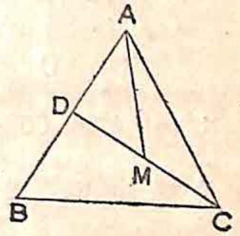
উদা. 42. অনুভূমিক সরলরেখার উপর দুইটি বিন্দুতে সংলগ্ন দুইটি সমান দড়ির সাহায্যে একটি ভার ঝুলান হইয়াছে। দেখাও যে দড়ি দুইটির দৈর্ঘ্য বাড়াইলে দড়ির উপর টান কমে।

প্রতিসাম্য অবস্থা হইতে বুঝা যায় যে দড়ি দুইটির উপর সমান টান পড়ে। ধর, প্রত্যেক দাড়তে টান T, এবং দড়ি দুইটির মধ্যে কোণ α.

তাহা হইলে, $2T\cos\frac{\alpha}{2}=W$. বা, $T=\frac{W}{2}\sec\frac{\alpha}{2}$

দড়ির দৈর্ঘ্য বাড়াইলে α কমে অতএব $\sec\frac{\alpha}{2}$ কমে। সুতরাং টান কমে।

উদা. 43· ABC সমবাহু ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু D ; দেখাও যে $\vec{AD}$ এবং $\vec{AC}$-র দ্বারা প্রদর্শিত দুইটি বলের মান $\sqrt{7}\ \vec{AD}$-র দ্বারা প্রদর্শিত হইবে।



$\vec{AD}$ এবং $\vec{AC}$-র দ্বারা প্রদর্শিত বলের লব্ধি $2\vec{AM}$, M বিন্দু CD-র মধ্যবিন্দু। যদি ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a হয় তাহা হইলে, $AM^2=AD^2+DM^2$

[$\because$ CD সরলরেখা AB-র উপর লম্ব]

$$=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\tfrac{1}{4}\times\tfrac{3}{4}a^2=\frac{a^2}{4}+\tfrac{3}{16}a^2=\tfrac{7}{16}a^2$$

$$\therefore\ AM=\frac{\sqrt{7}}{4}a$$

অতএব লব্ধি $=2AM=\sqrt{7}\times\frac{a}{2}=\sqrt{7}AD$

প্রশ্নমালা II

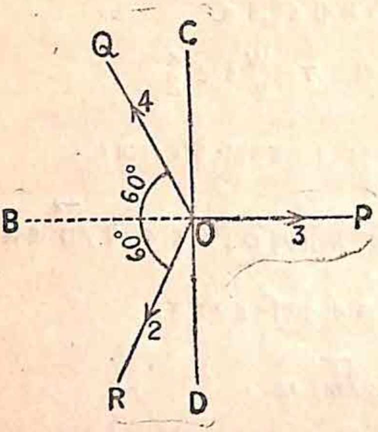
1. বলের দিকের সঙ্গে 60° কোণে এবং তাহার লম্বাভিমুখে 10 পা. ভার বলের বিশ্লেষিতাংশ নির্ণয় কর।

2. 16 পাউণ্ড ভারের বল একটি প্রদত্ত দিকের সঙ্গে 135° কোণ করিয়া আছে। উক্ত দিকে এবং উহার লম্বাভিমুখে বলটির বিশ্লেষিতাংশ নির্ণয় কর।

3. একটি বিন্দুতে 3 পা., 4 পা. এবং 2 পা. ভারের বল প্রযুক্ত হইয়াছে। যে কোন দুইটি বলের অন্তর্ভূত কোণ 120°। বলগুলি প্রথমে 3 পা. ভারের বলের দিকে এবং তাহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ কর, পরে তাহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত : মনে কর, 3 পা., 4 পা. এবং 2 পা. ভার বল যথাক্রমে $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$ এবং $\vec{OR}$ বরাবর ক্রিয়া করিতেছে এবং ইহারা পরস্পর 120° কোণ করিয়া আছে।

PO-কে B পর্যন্ত বর্ধিত কর এবং OP-এর উপর COD লম্ব অঙ্কিত কর।



এখন $\angle BOQ = \angle BOR = 60°$.

OB এবং OC-র দিকে 4 পা. ভার বলের বিশ্লেষিতাংশ $4 \cos 60°$ এবং $4 \sin 60°$.

OB এবং OD-র দিকে 2 পা. ভার বলের বিশ্লেষিতাংশ $2 \cos 60°$ এবং $2 \sin 60°$.

মনে কর OP এবং OC-র দিকে বিশ্লেষিতাংশ সমূহের সমষ্টি X ও Y. তাহা হইলে,

$$X = 3 - 4 \cos 60° - 2 \cos 60° = 3 - 6 \cos 60° = 3 - 6 \times \tfrac{1}{2} = 0$$

$$Y = 4 \sin 60° - 2 \sin 60° = 2 \sin 60° = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ পা. ভার}$$

∴ নির্ণেয় লব্ধি OC-এর দিকে $\sqrt{3}$ পা. ভার বল।]

4. 200 গ্রাম ভার একটি বলকে তাহার উভয় দিকে পরস্পরের সহিত 120° কোণ করিয়া থাকে এমন দুইটি সমান বলে বিশ্লেষণ কর।

5. দেখাও যে যদি 10, 20 এবং 30 পা. ভার বলের ক্রিয়ার ফলে কোন বিন্দু স্থিরাবস্থায় থাকে তাহা হইলে তাহারা একই সরলরেখায় ক্রিয়া করিবে।

6. 120° কোণে ক্রিয়মাণ দুইটি বলের লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলের লম্বাভিমুখী। বৃহত্তর উপাংশটি 100 গ্রাম ভারের সমান ; অপর উপাংশ এবং লব্ধি নির্ণয় কর।

7. যদি একটি বল F কে দুইটি উপাংশ P এবং Q তে বিশ্লেষণ করা হয় এবং P যদি F এর লম্বাভিমুখে থাকে এবং তাহার মান F এর সমান হয় তাহা হইলে Q-এর মান এবং দিক্ নির্ণয় কর। [U. P. 1938]

8. দুইটি বল এক বিন্দুতে ক্রিয়া করে। একটি বলকে দ্বিগুণ করা হইল এবং অন্য বলকে 20 পা ভার বাড়ানো হইল। যদি ইহাতে লব্ধির দিক্ অপরিবর্তিত থাকে তাহা হইলে দ্বিতীয় বল নির্ণয় কর। [H. S. 1960]

9. দুইটি বল P এবং Q-এর লব্ধি $\sqrt{3}Q$ এবং P বলের সঙ্গে 30° কোণ করে, দেখাও যে হয় P বল Q বলের সমান অথবা P বল Q বলের দ্বিগুণ।

10. একটি প্রদত্ত কোণে নত P ও Q পরিমাপের দুইটি বলের লব্ধি বল R,

P-বলের সহিত θ কোণে নত হইলে, প্রমাণ কর যে, একই কোণে নত P+R ও Q পরিমাপের দুইটি বলের লব্ধি বল P+R বলের সহিত $^1/_2\theta$ কোণে নত হইবে।

[B. U. 1926, '29 ; B. E. '32]

11. দুইটি সমান পরিমাপের বল 2θ কোণে নত হইলে উহাদের লব্ধি বল হয় P, আবার বল দুইটি যখন 2α কোণে নত হয় তখন উহাদের লব্ধি হয় Q. প্রমাণ কর যে, $2P=Q$ হইলে $\cos\alpha=2\cos\theta$ হইবে।

12. দুইটি বল P ও Q, θ-কোণে নত। যদি P ও Q-এর ক্রিয়া রেখা পারস্পরিক পরিবর্তিত হয়, তবে দেখাও যে লব্ধি বলটি θ পরিমাপ কোণ ঘুরিয়া যাইলে, $\tan\frac{\phi}{2}=\frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\theta}{2}$. [P. U. 1929]

13. একটি কণার উপর ক্রিয়মাণ দুইটি বল P ও Q যখন α কোণে নত, তখন উহাদের লব্ধি বলের পরিমাণ $(2k+1)\sqrt{P^2+Q^2}$. আবার বল দুইটি যদি $90°-\alpha$ কোণে নত হয়, তখন লব্ধি বলের পরিমাপ হয় $(2k-1)\sqrt{P^2+Q^2}$; প্রমাণ কর যে, $\tan\alpha=\frac{k-1}{k+1}$. [B. H. U. 1946]

14. α-কোণে নত দুইটি বল P ও Q-র লব্ধি বল R, যদি P ও Q প্রত্যেকটির পরিমাপ R বৃদ্ধি পায়, তবে দেখাও যে নূতন লব্ধি বলের ক্রিয়া রেখা R-এর সহিত যে কোণে নত হয় তাহার ট্যানজেন্ট, $\frac{(P-Q)\sin\alpha}{P+Q+R+(P+Q)\cos\alpha}$.

[P. U. 1943 ; B. H. U. 1943]

15. α কোণে নত দুইটি বল P ও Q এর লব্ধি বল R_1, P বলের ক্রিয়ারেখার সহিত θ কোণে নত। P এবং Q-এর ক্রিয়ারেখায় ক্রিয়াশীল দুইটি বল P ও Q'-এর লব্ধি বল R_2, P এর ক্রিয়ারেখার সহিত ϕ কোণে নত হইলে প্রমাণ কর যে, $R_2\sin(\alpha-\phi)=R_1\sin(\alpha-\theta)$ হইবে যদি $\alpha\neq\pi$ হয়।

16. 2α কোণে নত P+Q ও P−Q পরিমাপের দুইটি বলের লব্ধি বল উহাদের অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সহিত θ কোণে নত। প্রমাণ কর যে, $P\tan\theta=Q\tan\alpha$. [P. U. 1931]

17. P ও Q পরিমাপের দুইটি বলের লব্ধি বল P বলের সহিত সমকোণ উৎপন্ন করে। P' ও Q' পরিমাপের দুইটি বলের ক্রিয়ারেখা যথাক্রমে P ও Q বল দুইটির ক্রিয়ারেখা এবং উহাদের লব্ধি বল Q' বলের সহিত সমকোণে নত। প্রমাণ কর যে $PP'=QQ'$.

18. একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বল P ও Q-এর লব্ধি বল R; Q-বলকে দ্বিগুণিত করিলে R-বলও দ্বিগুণিত হয়। আবার, Q-এর বিপরীত অভিমুখিতা হইলেও R-বল দ্বিগুণিত হয়। দেখাও যে, $P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

[Bombay 1934]

19. θ-কোণে নত দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় ক্রিয়াশীল দুইটি বল R ও S-র লব্ধিবল F এবং ঐ দুই সরলরেখায় ক্রিয়মান দুইটি বল R′ ও S′-এর লব্ধিবল F. যদি F ও F′-এর ক্রিয়ারেখা দুইটির নতি হয় ϕ; তবে দেখাও যে,

$$(1-\cos\phi)(1+\cos\phi)=\frac{(R'^2S^2-2RR'SS'+R'^2S^2)(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{F^2F'^2}$$

[C. U. 1946]

20. একটি ত্রিভুজ ABC-র ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহুত্রয়ের সমান্তরালও অভিমুখিতাবিশিষ্ট P-পরিমাপের তিনটি সমান বল একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত হইল। প্রমাণ কর যে, বল তিনটির লব্ধি বল, $P\sqrt{3-2\cos A-2\cos B-2\cos C}$.

21. একই সমতলে প্রযুক্ত P, Q, R তিনটি সমবিন্দু বল। (Q, R), (R, P) এবং (P, Q) বলগুলির অন্তর্ভূত কোণগুলি যথাক্রমে α, β ও γ. প্রমাণ কর যে বলগুলির লব্ধি বলের পরিমাপ

$$\sqrt{P^2+Q^2+R^2+2QR\cos\alpha+2RP\cos\beta+2PQ\cos\gamma}.$$

22. P ও Q দুইটি বল একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করিতেছে। P বলের মান ও দিক মান ও দিক উভয়েই দেওয়া আছে। কিন্তু Q বলের শুধু মান দেওয়া আছে। তাহা হইলে লব্ধি বলের প্রান্তবিন্দুর সঞ্চার পথ নির্ণয় কর।

23. AB ও CD একটি বৃত্তের দুইটি সমান ও সমান্তরাল জ্যা এবং P ঐ বৃত্তের উপরিস্থিত একটি বিন্দু। A ও B হইতে P সমদূরবর্তী হইলে দেখাও যে P বিন্দুতে প্রযুক্ত $\vec{PA}$, $\vec{PB}$, $\vec{PC}$, এবং $\vec{PD}$ বলের লব্ধি বল ধ্রুবক।

[C. U. 1943]

24. একটি বৃত্তের পরিধিস্থ A, B ও C তিনটি বিন্দু। $\vec{AB}$ এবং $\vec{AC}$ রেখায় AB ও AC-র সহিত ব্যস্তানুপাতিক দুইটি বল ক্রিয়াশীল। প্রমাণ কর যে বল দুইটির লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা B বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক।

[U. P. 1941]

25. ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O. প্রমাণ কর যে $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ ও $\vec{OC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল এবং যথাক্রমে BC, CA ও AB দৈর্ঘ্যত্রয়ের সহিত সমানুপাতিক তিনটি বলের লব্ধিবলের ক্রিয়ারেখা ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্র দিয়া যায়।

26. PQRS একটি চতুর্ভুজ। প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{PS}$ ও $\overrightarrow{SR}$ দ্বারা প্রকাশিত বল চারিটির লব্ধিবলের মান, দিক ও অভিমুখিতা $2\,\overrightarrow{PR}$ দ্বারা প্রকাশিত হয় এবং লব্ধি বলটির ক্রিয়ারেখা $\overrightarrow{QS}$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [C. U. 1941]

27. ABCD বর্গক্ষেত্রের বাহু $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$ গুলি P বল দ্বারা প্রকাশিত হয়। তাহা হইলে লব্ধি বল নির্ণয় কর।

28. AB ও CD দুইটি জ্যা কোন বৃত্তে লম্বভাবে P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ এবং $\overrightarrow{PD}$ বলের লব্ধিবল $2\,\overrightarrow{PC}$, বৃত্তের কেন্দ্র O নির্দেশ করে।

29. একটি ত্রিভুজ ABC-র সমতলে P একটি বিন্দু এবং O ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্র। প্রমাণ কর যে $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ ও $\overrightarrow{PC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল যথাক্রমে PA sin A, PB sin B ও PC sin C পরিমাপের তিনটি বলের লব্ধিবল $\overrightarrow{PO}$ রেখায় ক্রিয়াশীল একটি বল যাহার পরিমাপ $4\,PO \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$.

30. ধরিয়া লও যে বলের দিকই কেবল বলের সামান্তরিক সূত্র মানিয়া চলে। প্রমাণ কর যে, বলের মানও ঐ সূত্র মানিয়া চলে।

৩

একবিন্দুতে ক্রিয়মাণ তিনটি বলের সাম্যাবস্থা

(Equilibrium of three force acting at a point)

প্রয়োজনীয় জ্ঞাতব্য বিষয়ঃ

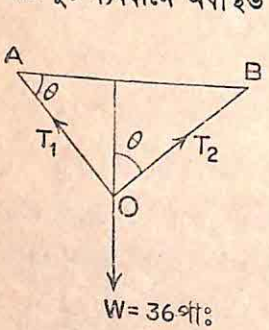
(i) **ল্যামির সূত্র ঃ** একটি বিন্দু O-তে প্রযুক্ত তিনটি বল P, Q, R সাম্যাবস্থায় থাকিলে, $\dfrac{P}{\sin QOR}=\dfrac{Q}{\sin ROP}=\dfrac{R}{\sin POQ}$,

(ii) O বিন্দুতে ক্রিয়মাণ দুইটি বল $m.\vec{OA}$ এবং $n.\vec{OB}$ দ্বারা প্রদর্শিত হইলে তাহাদের লব্ধি $(m+n).\vec{OC}$-র দ্বারা প্রদর্শিত হয় ; এখানে C বিন্দু AB-কে এমনভাবে ভাগ করে যেন $m.AC=n.BC$.

অনুসিদ্ধান্ত ঃ দুইটি বল OA এবং OB-র দ্বারা প্রদর্শিত হইলে তাহাদের লব্ধি 2OC, এখানে C বিন্দু AB সরলরেখার মধ্যবিন্দু।

উদাহরণমালা—III

উদা॰ 1. 12 ফুট এবং 16 ফুট দীর্ঘ দুইটি দড়ির সাহায্যে 36 পাউণ্ড ভারের একটি বস্তু ঝুলাইয়া রাখা হইয়াছে ; দড়ি দুইটির অপর প্রান্তদ্বয় অনুভূমিক সরলরেখার উপর 20 ফুট ব্যবধানে অবস্থিত দুই বিন্দুতে সংলগ্ন আছে। দড়ি দুইটির উপর টান নির্ণয় কর।



A এবং B একই অনুভূমিক রেখার উপর দুইটি বিন্দুতে দড়ি দুইটির প্রান্ত সংলগ্ন আছে। O বিন্দু হইতে ভার ঝুলান আছে।

$AC=12$ ফুট, $OB=16$ ফুট, এবং $AB=20$ ফুট,

যেহেতু $20^2=12^2+16^2$

অর্থাৎ $AB^2=AO^2+BO^2$

$\therefore$ AOB কোণ সমকোণ

ধর, O-র ভিতর দিয়া উল্লম্ব রেখা BO-র সঙ্গে θ কোণ করে ; OA এবং OB দড়িতে টান যথাক্রমে T_1 এবং T_2.

এখন ল্যামির সূত্র অনুসারে

$$\frac{T_1}{\sin(180^\circ-\theta)}=\frac{T_2}{\sin(90^\circ+\theta)}=\frac{36}{\sin 90^\circ};\ \text{বা,}\ \frac{T_1}{\sin\theta}=\frac{T_2}{\cos\theta}=36$$

$$\therefore\ T_1=36\sin\theta=36\times\frac{BO}{AB}=36\times\tfrac{16}{20}=\tfrac{144}{5}=28\tfrac{4}{5}\ \text{পা: ভার।}$$

$$\therefore\ T_2=36\cos\theta=36\times\frac{AO}{AB}=36\times\tfrac{12}{20}=\tfrac{108}{5}=21\tfrac{3}{5}\ \text{পা: ভার।}$$

উদা. 2. 17 কিলোগ্রাম ভারের একটি বস্তু 16 সে. মি. এবং 30 সে. মি. দীর্ঘ দুইটি দড়ির সাহায্যে ঝুলাইয়া রাখা হইয়াছে। দড়ি দুইটির অপর প্রান্তদ্বয় অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত 34 সে. মি. ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে সংযুক্ত আছে। দড়ি দুইটির টান নির্ণয় কর।

[নিজে পূর্ব প্রশ্নের মত চিত্র আঁক]

AO = 16 সে. মি. ; BO = 30 সে. মি. ; AB = 34 সে. মি.

যেহেতু $34^2=16^2+30^2$ অর্থাৎ $AB^2=AO^2+BO^2$ $\therefore\ \angle AOB=90^\circ$.

ধর, O-র ভিতর দিয়া উল্লম্ব রেখা BO-র সঙ্গে θ কোণ করে ; OA এবং OB দড়িতে টান যথাক্রমে T_1 এবং T_2.

এখন ল্যামির সূত্র অনুসারে

$$\frac{T_1}{\sin(180^\circ-\theta)}=\frac{T_2}{\sin(90^\circ+\theta)}=\frac{17}{\sin 90^\circ}\ \text{বা,}\ \frac{T_1}{\sin\theta}=\frac{T_2}{\cos\theta}=17$$

$$\therefore\ T_1=17\sin\theta=17\times\frac{BO}{AB}=17\times\frac{30}{34}=15\ \text{কিলোগ্রাম ভার}$$

$$T_2=17\cos\theta=17\times\frac{16}{34}=8\ \text{কিলোগ্রাম ভার।}$$

উদা. 3. 100 পা. ভারের একটি বস্তুকে 25 ফুট দীর্ঘ একটি অনুভূমিক দণ্ডের দুই প্রান্ত সংলগ্ন দুইটি দড়িতে বাঁধিয়া ঝুলান হইয়াছে। যদি দড়ি দুইটির দৈর্ঘ্য 7 ফুট এবং 24 ফুট হয়, তাহা হইলে দড়ি দুইটিতে কত টান পড়ে ?

যেহেতু $25^2=7^2+24^2$ $\therefore\ \angle AOB=90^\circ$

$$T_1=100\sin\theta=100\times\frac{24}{25}=96\ \text{পা. ভার}$$

$$T_2=100\cos\theta=100\times\frac{7}{25}=28\ \text{পা ভার।}$$

উদা. 4. একটি দড়ি ABC-র দুইপ্রান্ত একই অনুভূমিক রেখাস্থ A এবং B বিন্দুতে সংলগ্ন আছে ; দড়ির C বিন্দুতে W ভার বাঁধিয়া দেওয়া হইয়াছে। প্রমাণ কর যে দড়ির CA অংশে টান$=\dfrac{Wb}{4c\Delta}(c^2+a^2-b^2)$.

যেখানে, ABC ত্রিভুজের বাহুত্রয় a, b, c এবং ক্ষেত্রফল Δ.

[নিজ চিত্র অঙ্কন কর]

ধর, C-র ভিতর দিয়া উল্লম্ব রেখা CB-র সঙ্গে θ কোণ করে ;

CA দড়িতে টান T_1 মনে কর, তাহা হইলে

$$\frac{T_1}{\sin(180^\circ-\theta)}=\frac{W}{\sin C} \quad \text{এখানে } \theta=90^\circ-B$$

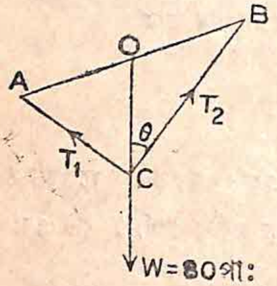
$$\therefore \quad \frac{T_1}{\sin(90^\circ+B)}=\frac{W}{\sin C} \quad \text{অথবা,} \quad \frac{T_1}{\cos B}=\frac{W}{\sin C}$$

$$\therefore \quad T_1=\frac{W\cos B}{\sin C}=W.\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca\sin C}$$

$$=W\frac{(c^2+a^2-b^2)ab}{2ca2\Delta}=\frac{Wb(c^2+a^2-b^2)}{4c\,\Delta}, \quad [ab\sin C=2\Delta]$$

উদা. 5. 6 ফুট এবং 8 ফুট দীর্ঘ দুইটি দড়িতে বাঁধিয়া একটি 80 পাউণ্ড ভরের বস্তু ঝুলান হইয়াছে ; দড়ি দুইটির অপর প্রান্তদ্বয় 10 ফুট দীর্ঘ একটি দণ্ডের দুই প্রান্তে যুক্ত হইয়াছে। যদি দণ্ডটি এরূপভাবে রাখা হয় যে বস্তুটি দণ্ডের মধ্যবিন্দুর খাড়া নীচে থাকে তাহা হইলে দড়ি দুইটিতে কি টান পড়ে ?

যেহেতু $10^2=6^2+8^2$ $\quad\therefore\quad \angle ACB=90^\circ$



প্রশ্ন অনুসারে C বিন্দুর ভিতর দিয়া উল্লম্ব সরলরেখা AB দণ্ডের মধ্যবিন্দু O-র ভিতর দিয়া যায়

$\therefore \quad \theta=\angle B.$

ধর, CA এবং CB দড়িতে টান যথাক্রমে T_1 এবং T_2 তাহা হইলে

$$\frac{T_1}{\sin(180^\circ-\theta)}=\frac{T_2}{\sin(90^\circ+\theta)}=\frac{80}{\sin 90^\circ}$$

বা, $\dfrac{T_1}{\sin\theta}=\dfrac{T_2}{\cos\theta}=80$; বা, $\dfrac{T_1}{\sin B}=\dfrac{T_2}{\cos B}=80$

$\therefore \quad T_1=80\sin B=80\times\dfrac{6}{10}=48$ পা. ভার।

$T_2=80\cos B=80\times\dfrac{8}{10}=64$ পা. ভার।

উদা. 6. দুই ব্যক্তি 100 কিলোগ্রাম ভারের বস্তু দুইটি দড়ির সাহায্যে বহন করিতেছে। একটি দড়ি উল্লম্বের সহিত 45° এবং অন্যটি 30° কোণ করিয়া আছে। দড়ি দুইটিতে টান নির্ণয় কর।

ধর, যে দড়ি 45° কোণ করে তাহার টান T_1 এবং অপর দড়ির টান T_2, সাম্যাবস্থার জন্য ল্যামির সূত্র ব্যবহার করিয়া

$$\frac{T_1}{\sin(180^\circ-30^\circ)}=\frac{T_2}{\sin(180^\circ-45^\circ)}=\frac{W}{\sin(45^\circ+30^\circ)}$$

বা, $$\frac{T_1}{\sin 30^\circ}=\frac{T_2}{\sin 45^\circ}=\frac{W}{\sin(45^\circ+30^\circ)}$$

বা, $$\frac{T_1}{\sin 30^\circ}=\frac{T_2}{\sin 45^\circ}=\frac{W}{\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ}$$

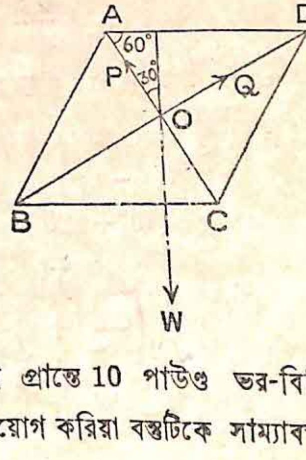
$$\therefore\ T_1=\frac{100\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{100\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$=50(\sqrt{6}-\sqrt{2})\text{ কিলোগ্রাম।}$$

$$T_2=\frac{100\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{100\times 2(\sqrt{3}-1)}{2}=100(\sqrt{3}-1)\text{ কিলোগ্রাম}$$

উদা. 7. রম্বসাকৃতি একটি সমপাতের একটি কোণ 120°; কেন্দ্রে দুই কর্ণের দিকে P এবং Q বল প্রয়োগ করিয়া ইহার এক বাহু অনুভূমিকভাবে রক্ষিত হইয়াছে। P যদি বৃহত্তর বল হয় প্রমাণ কর যে $P^2=3Q^2$.

সাম্যাবস্থার জন্য P এবং Q বলের লব্ধি রম্বসের ভার W-এর সমান ও বিপরীতমুখী। যেহেতু লব্ধির নতি বৃহত্তর বলের দিকেই বেশি অতএব P উল্লম্বের সহিত 30° কোণ করে। (রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে বলিয়া $\angle AOD=90^\circ$)

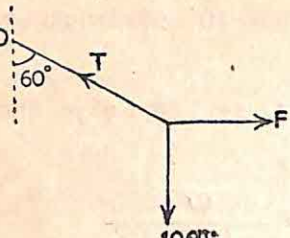


এখন $\frac{P}{\sin 60^\circ}=\frac{Q}{\sin 30^\circ}$ বা $\frac{P}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{Q}{\frac{1}{2}}$.

$\therefore\ P=\sqrt{3}Q$ অথবা $P^2=3Q^2$.

উদা. 8. উপরের প্রান্ত আবদ্ধ একটি দড়ির অপর প্রান্তে 10 পাউণ্ড ভর-বিশিষ্ট একটি বস্তু বাঁধা হইয়াছে। অনুভূমিক দিকে F বল প্রয়োগ করিয়া বস্তুটিকে সাম্যাবস্থায়

রাখা হইয়াছে এবং দড়িটি উল্লম্বের সঙ্গে 60°কোণ করে। F এবং দড়ির টান নির্ণয় কর।



ল্যামির সূত্র ব্যবহার করিয়া,

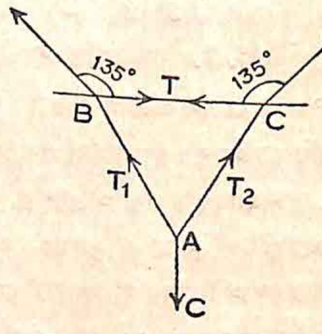
$$\frac{F}{\sin 120^\circ} = \frac{T}{\sin 90^\circ} = \frac{10}{\sin 150^\circ}$$

$$\text{বা,} \frac{F}{\sin 60^\circ} = T = \frac{10}{\sin 30^\circ}$$

$$\therefore \quad F = 10 \times \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = 10 \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 10\sqrt{3} \text{ পা. ভার}$$

$$T = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20 \text{ পা. ভার।}$$

উদা. 9. তিনটি সমান দৈর্ঘ্যের ভারহীন দড়ি গ্রন্থি দিয়া একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC করা হইয়াছে এবং A হইতে W ভার ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে। B এবং C-তে অপর দুইটি দড়ি প্রত্যেকে BC-র সঙ্গে 135° কোণ করিয়া ভারসহ ত্রিভুজটিকে যদি এরূপভাবে রাখে যে, BC অনুভূমিক থাকে, তাহা হইলে দেখাও যে, BC দড়িতে টান $\frac{W}{6}(3-\sqrt{3})$.



ধর, AB এবং AC দড়িতে টান T_1 এবং T_2.

A বিন্দুর সাম্যাবস্থার জন্য ল্যামির সূত্র হইতে

$$\frac{T_1}{\sin 150^\circ} = \frac{T_2}{\sin 150^\circ} = \frac{W}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore \quad T_1 = T_2 = W\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{W}{\sqrt{3}}.$$

আবার মনে কর BC দড়িতে টান T.

B বিন্দুর সাম্যাবস্থার জন্য ল্যামির সূত্র হইতে

$$\frac{T}{\sin(45^\circ + 120^\circ)} = \frac{T_1}{\sin 135^\circ}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{T_1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\;\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{T_1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{W}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$$

$$\therefore \quad T = \frac{W}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1) = \frac{W}{6}(3-\sqrt{3}).$$

উদা. 10. I বিন্দু ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ; I বিন্দুতে IA, IB এবং IC বরাবর তিনটি বল P, Q এবং R সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে—

$$\frac{P}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{Q}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{R}{\cos\frac{C}{2}}$$

ল্যামির সূত্র প্রয়োগ করিয়া

$$\frac{P}{\sin\left(190^\circ-\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)}=\frac{Q}{\sin\left(180^\circ-\frac{C}{2}-\frac{A}{2}\right)}=\frac{R}{\sin\left(180^\circ-\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)}$$

বা, $$\frac{P}{\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}=\frac{Q}{\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{A}{2}\right)}=\frac{R}{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)}$$

বা, $$\frac{P}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{Q}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{R}{\cos\frac{C}{2}}\quad\left[\text{যেহেতু } \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ\right]$$

উদা. 11. O বিন্দু ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ; $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ বরাবর তিনটি বল P, Q এবং R সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে

$$\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)}=\frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)}=\frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$$

সাম্যাবস্থার জন্য ল্যামির সূত্র প্রয়োগ করিয়া

$$\frac{P}{\sin 2A}=\frac{Q}{\sin 2B}=\frac{R}{\sin 2C}$$

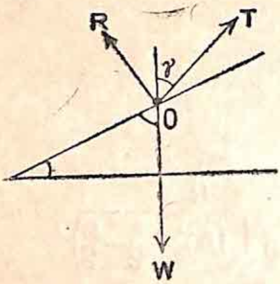
বা, $$\frac{P}{2\sin A\cos A}=\frac{Q}{2\sin B\cos B}=\frac{R}{2\sin C\cos C}$$

বা, $$\frac{P}{2a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{Q}{2b\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}=\frac{R}{2c\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$

বা, $$\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)}=\frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)}=\frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$$

উদা. 12. উল্লম্বের সহিত γ কোণে একটি দড়ির সাহায্যে α নতি-বিশিষ্ট নততলে একটি ভার ধরিয়া রাখা হইয়াছে। যদি তলের নতি বাড়াইয়া β করা হয় এবং দড়ির

নতি পূর্বের মত থাকে তবে ভারটিকে ধরিয়া রাখিবার জন্য দড়ির পূর্বের দ্বিগুণ টান প্রয়োজন হয়। প্রমাণ কর যে, $\cos\alpha - 2\cot\beta = \cot\gamma$. [C. U. 1945]



বস্তুটি তিনটি বলের ক্রিয়ার ফলে সাম্যাবস্থায় আছে। বস্তুর ভার W প্রযুক্ত টান T এবং মসৃণ নততলের প্রতিক্রিয়া R তলের লম্বাভিমুখে।

এখন ল্যামির সূত্র প্রয়োগ করিয়া

যখন তলের নতি α

$$\frac{T}{\sin(180^\circ-\alpha)} = \frac{W}{\sin(\alpha+\gamma)} \cdots \qquad \cdots(i)$$

যখন তলের নতি β, $\dfrac{2T}{\sin(180^\circ-\beta)} = \dfrac{W}{\sin(\beta+\gamma)} \cdots \qquad \cdots(ii)$

(i) এবং (ii) হইতে, $\dfrac{W\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)} = \dfrac{W\sin\beta}{2\sin(\beta+\gamma)}$

বা, $2\sin\alpha\,(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma)$

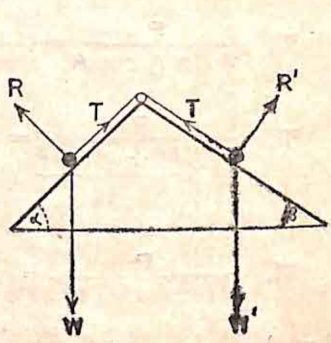
$= \sin\beta\,(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma)$

বা, $2\cot\gamma + 2\cot\beta = \cot\gamma + \cot\alpha$, বা, $\cot\gamma = \cot\alpha - 2\cot\beta$.

উদা. 13. দুইটি কণা পিঠাপিঠি রক্ষিত দুই নততলে অবস্থিত। কণা দুইটি একটি দড়ি দিয়া আটকান আছে এবং দড়িটি তলের শীর্ষদেশে একটি কপিকলের উপর দিয়া গিয়াছে। দেখাও যে কণা দুইটির ভার এই দুই নততলের দৈর্ঘ্যের অনুপাতে।

মনে কর, নততলদ্বয়ের দৈর্ঘ্য l এবং l', নতি α এবং β। ধর রক্ষিত কণাদ্বয়ের ভার W এবং W'.

প্রত্যেক কণার উপর তিনটি বল ক্রিয়া করে—(a) তাহার ভার, (b) দড়ির টান, (c) নততলের প্রতিক্রিয়া,



ল্যামির সূত্র হইতে—

প্রথম কণার সাম্যাবস্থার জন্য

$$\frac{W}{\sin 90^\circ} = \frac{T}{\sin(180^\circ-\alpha)}$$

$$\therefore \frac{W}{T} = \frac{1}{\sin\alpha} \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots(i)$$

দ্বিতীয় কণার সাম্যাবস্থার জন্য

$$\frac{W'}{\sin 90^\circ}=\frac{T}{\sin(180^\circ-\beta)};\quad \frac{W'}{T}=\frac{1}{\sin\beta}\quad\cdots(ii)$$

(i) এবং (ii) হইতে ভাগ করিয়া $\frac{W}{W'}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{l}{l'}$.

উদা. 14. একটি ভার P, একই অনুভূমিক সরলরেখার উপর A এবং B বিন্দুতে সংলগ্ন দুইটি দড়ির সাহায্যে ঝুলান আছে। দড়ি দুইটি সমান শক্ত কিন্তু তাহাদের দৈর্ঘ্য সমান নয়। টান 4000 পাউণ্ড-ভারের অধিক হইলে দড়ি ছিঁড়িয়া যায় এবং AB = 20 ফুট, PA = 16 ফুট, PB = 12 ফুট হইলে সর্বাধিক কি পরিমাণ ভার ঝুলান যায়? [B. E. Pre, 1967]

ধর, PA দড়িতে টান T_1 এবং PB দড়িতে টান T_2

যেহেতু টান $20^2=16^2+12^2$ অর্থাৎ $AB^2=AP^2+BP^2$

$\therefore\ \angle APB=90^\circ$.

P-এর ভিতর দিয়া উলম্ব রেখা AB কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

$\angle APD=90^\circ-A=B,\ \angle BPD=A$

ল্যামির সূত্র হইতে

$$\frac{T_1}{\sin(180^\circ-BPD)}=\frac{T_2}{\sin(180^\circ-APD)}=\frac{W}{\sin 90^\circ}$$

বা, $\frac{T_1}{\sin BPD}=\frac{T_2}{\sin APD}=W$; $\therefore\ T_1=W\sin BPD=W\sin A$

এবং $T_2=W\sin APD=W\sin B$.

কিন্তু $\angle B$ (বৃহত্তর বাহুর বিপরীত) $>\angle A$

$\therefore\ \sin B>\sin A\quad\therefore\ T_2>T_1$

অতএব যখন ভার সর্বাধিক তখন $T_2=4000$ পা. ভার, তাহা হইলে

$4000=W\sin B=W\times\frac{16}{20}$; $\quad\therefore\ W=\frac{4000\times 5}{4}=5000$ পা. ভার।

উদা. 15. এক বিন্দুতে ক্রিয়মাণ তিনটি বল P, Q, R সাম্যাবস্থায় আছে। P এবং Q-এর অন্তর্ভূক্ত কোণ P এবং R-এর অন্তর্ভূক্ত কোণের দ্বিগুণ; দেখাও যে $R^2=Q(Q-P)$.

মনে কর, P এবং R এর অন্তর্ভুক্ত কোণ α, তাহা হইলে P এবং Q-এর অন্তর্ভূক্ত কোণ 2α.

$\therefore$ Q এবং R এর অন্তর্ভূক্ত কোণ $=360^\circ-(\alpha+2\alpha)=360^\circ-3\alpha$.

ল্যামির সূত্র অনুসারে, $\dfrac{P}{\sin(360^\circ-3\alpha)}=\dfrac{Q}{\sin\alpha}=\dfrac{R}{\sin 2\alpha}$

বা, $\dfrac{P}{-\sin 3\alpha}=\dfrac{Q}{\sin\alpha}=\dfrac{R}{\sin 2\alpha}$.

বা, $\dfrac{P}{-(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)}=\dfrac{Q}{\sin\alpha}=\dfrac{R}{2\sin\alpha\cos\alpha}$

বা, $\dfrac{P}{4\sin^2\alpha-3}=\dfrac{Q}{1}=\dfrac{R}{2\cos\alpha}$. [$\because$ $\sin\alpha\neq 0$]

বা, $\dfrac{P}{4(1-\cos^2\alpha)-3}=\dfrac{Q}{1}=\dfrac{R}{2\cos\alpha}$.

বা, $\dfrac{P}{1-4\cos^2\alpha}=\dfrac{Q}{1}=\dfrac{R}{2\cos\alpha}=\dfrac{Q-P}{4\cos^2\alpha}$

$\therefore$ $Q=\dfrac{R}{2\cos\alpha}$, $Q-P=2R\cos\alpha$. [$\because$ $\cos\alpha\neq 0$]

$$Q(Q-P)=\frac{R}{2\cos\alpha}\times 2R\cos\alpha=R^2$$

উদা. 16. দুইটি বল P এবং Q যথাক্রমে কোনও নততলের দৈর্ঘ্যের এবং ভূমির সমান্তরাল দিকে ক্রিয়া করিলে প্রত্যেকে পৃথক্‌ভাবে নততলে রক্ষিত একটা ভার W-কে স্থিরাবস্থায় রাখিতে পারে ; দেখাও যে $\dfrac{1}{P^2}-\dfrac{1}{Q^2}=\dfrac{1}{W^2}$.

প্রথম ক্ষেত্রে নততল বরাবর বিশ্লেষণ করিলে $P=W\sin\alpha$. ...(i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ল্যামির সূত্রের সাহায্যে

$\dfrac{Q}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\dfrac{W}{\sin(90^\circ+\alpha)}$; $\therefore$ $Q=W\tan\alpha$.

এখন, $\dfrac{1}{P^2}-\dfrac{1}{Q^2}=\dfrac{1}{W^2}(\operatorname{cosec}^2\alpha-\cot^2\alpha)=\dfrac{1}{W^2}$.

প্রশ্নমালা—III

1. 48 পাউণ্ড ভারের একটি বস্তু 3 ফুট এবং 4 ফুট দীর্ঘ দুইটি দড়ির সাহায্যে ঝুলাইয়া রাখা হইয়াছে ; দড়ি দুইটির উপর দুই প্রান্ত অনুভূমিক রেখার উপর 5 ফুট ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে বাঁধিয়া দেওয়া হইয়াছে। প্রত্যেক দড়িতে কি টান পড়ে ?

[C. U. 1913]

2. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বলের পরিমাপের অনুপাত 3 : 2 : 1. কোন অবস্থাতে বল তিনটির সাম্যাবস্থা সম্ভব কিনা বল। [C. U. 1943]

3. I বিন্দু ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র এবং $\vec{IA}$, $\vec{IB}$ ও $\vec{IC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল তিনটি বল P, Q, R সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে $\frac{P}{\cos A/_2}=\frac{Q}{\cos B/_2}=\frac{R}{\cos C/_2}$.

4. 3 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু কোন স্থির বিন্দু হইতে 25 ইঞ্চি হাল্‌কা দড়িতে বাঁধা আছে। অনুভূমিক বল F প্রযুক্ত হইয়া ইহা ঐ স্থির বিন্দুর উল্লম্ব রেখা হইতে 20 ইঞ্চি দূরে স্থিরাবস্থায় আছে। F বলের মান এবং দড়ির টান বাহির কর।

[H. S. 1964]

5. $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ একই সমতলে অবস্থিত তিনটি সমান দৈর্ঘ্যের রেখাংশ এবং O বিন্দুগামী কোন সরলরেখার একই পার্শ্বে রেখাংশগুলি অবস্থিত নয়। এই রেখাত্রয়ে ক্রিয়াশীল তিনটি বল P, Q, R এরূপ যে, $\frac{P}{\Delta OBC}=\frac{Q}{\Delta OCA}=\frac{R}{\Delta AOB}$. প্রমাণ কর যে, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে।

6. O বিন্দুতে নির্দিষ্ট দিকে ক্রিয়মান তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে। যদি O বিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত বল সমূহের ক্রিয়া রেখাকে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, বলসমূহ ABC ত্রিভুজের বাহুর সমানুপাতিক।

[H. S. 1965]

7. O বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি নির্দিষ্ট রেখায় ক্রিয়াশীল O বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে। যদি O বিন্দুগামী কোন বৃত্ত এই ক্রিয়ারেখা তিনটিকে A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে বলগুলির পরিমাপ ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির সহিত সমানুপাতিক।

8. 7 এবং 24 ইঞ্চি দীর্ঘ দুইটি ভারহীন দড়ি 25 ইঞ্চি দীর্ঘ একটি দণ্ডের দুই প্রান্তে বাঁধিয়া 10 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুকে এমনভাবে ঝুলাইয়া রাখা হইয়াছে যে বস্তুটি দণ্ডের মধ্যবিন্দুর অব্যবহিত নিম্নে অবস্থিত। দড়ি দুইটির টান নির্ণয় কর।

[H. S. 1966]

9 O বিন্দু ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র এবং $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ ও $\vec{OC}$ রেখায় ক্রিয়াশীল তিনটি বল P, Q, R সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে,

$$\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)}=\frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)}=\frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}.$$

10. 10 ফুট দীর্ঘ এবং 25 পাউণ্ড ভারের একটি সমদণ্ডের একপ্রান্ত একটি কব্জায় আট্‌কান আছে এবং অপর প্রান্তে 16 ফুট দীর্ঘ একটি দড়িতে যুক্ত করিয়া কব্জার সোজা 10 ফুট উপরে একটি বিন্দুতে বাঁধিয়া দেওয়া হইয়াছে। দড়ির টান এবং কব্জার প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর। [H. S. 1967]

11. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বলসমূহের মান ও দিক ABCD চতুর্ভুজের $2\vec{AB}$, ও $3\vec{BC}$, $2\vec{CD}$, $\vec{DA}$, $\vec{CA}$ এবং $\vec{DB}$ হইলে, প্রমাণ কর যে বলগুলি সাম্যাবস্থায় আছে। [C. U. 1937]

12. l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি দড়ির দুই প্রান্ত একটি অনুভূমিক দণ্ডের a $(a<l)$ দূরত্বে A এবং B বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। ইহাতে W ভারের একটি আংটি গড়াইয়া চলিতে পারে এবং অনুভূমিক বল P প্রযুক্ত হইয়া ইহা B বিন্দুর সোজা নীচে স্থিরাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে $P=a\frac{W}{l}$. [H. S. (comp) 1967]

13. রম্বসাকার একটি সমপাত কর্ণদ্বয় বরাবর উহার কেন্দ্রে প্রযুক্ত দুইটি বল P ও Q $(P>Q)$ দ্বারা স্থিরাবস্থায় আছে। যদি পাতটির একটি প্রান্তরেখা অনুভূমিক রেখায় থাকে এবং একটি কোণের পরিমাপ 120° হয়, তবে প্রমাণ কর যে $P^2=3Q^2$.

14. সাম্যাবস্থায় স্থিত তিনটি বল ABC ত্রিভুজের বাহুর উপর লম্বভাবে ক্রিয়া করে। দেখাও যে বল সমূহের অনুপাত $\sin A : \sin B : \sin C$.

[H. S. 1968].

15. একটি দড়ি ACB-র দুই প্রান্ত একই অনুভূমিক রেখায় A এবং B দুইটি বিন্দুতে আবদ্ধ ; দড়ির C বিন্দু হইতে W ভার ঝোলান আছে। প্রমাণ কর যে, দড়ির CA অংশের টান, $\frac{Wb}{4c\Delta}$ $(c^2+a^2-b^2)$, যেখানে a, b, c এবং Δ হইল যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও ক্ষেত্রফল।

সমান্তরাল বল
(Parallel Forces)

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

(*i*) সদৃশ সমান্তরাল বল P ও Q একটি বস্তুর যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে প্রযুক্ত হইলে উহাদের লব্ধি R, AB-র উপর C বিন্দু দিয়া ক্রিয়া করিলে,

$$R = P + Q \;;\; P.AC = Q.BC.$$

(ii) বল দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল হইলে

$R = P - Q$ [যদি $P > Q$]

$P.AC = Q.BC$ [C বিন্দু বর্ধিত BA রেখার উপরে]

(iii) $\dfrac{P}{BC} = \dfrac{Q}{AC} = \dfrac{R}{AB}.$

উদাহরণমালা—IV

উদা. **1.** সদৃশ সমান্তরাল বল হইলে লব্ধির মান ও অবস্থান নির্ণয় কর :

(*i*) $P = 8, Q = 2, AB = 10$ ফুট ; (ii) $P = 10, Q = 40, AB = 20$ সেমি.।

সমাধান ঃ (*i*) $R = P + Q = 8 + 2 = 10.$

$$AC = \frac{Q}{P+Q} \times AB = \frac{2}{10} \times 10 = 2 \text{ ফুট।}$$

বিকল্পে $8AC = 2BC = 2(AB - AC)$

বা, $10AC = 2AB$ $\therefore$ $AC = \frac{2}{10}AB = \frac{1}{5}AB = 2$ ফুট।

(ii) $R = 10 + 40 = 50$;

$$AC = \frac{Q}{P+Q} \times AB = \tfrac{40}{50}AB = \tfrac{4}{5} \times 20 = 16 \text{ সেমি.}$$

উদা. **2.** P ও Q অসদৃশ সমান্তরাল বল হইলে লব্ধির মান ও অবস্থান নির্ণয় কর ঃ

(i) $P = 27, Q = 7, AB = 20$ ফুট ; (ii) $P = 30, Q = 10, AB = 12$ সেমি. ;

(iii) $P = 2, Q = 10, AB = 12$ সেমি.

সমাধান :—(i) $R = P - Q = 27 - 7 = 20$;

$$AC = \frac{Q}{P-Q} \times AB = \frac{7}{20} \times 20 = 7 \text{ ফুট।}$$

লব্ধির মান 20 এবং ইহা P-এর বাহিরে AB-কে 7 ফুট দূরে ছেদ করে।

(ii) $R = P - Q = 30 - 10 = 20.$

$$AC = \frac{Q}{P-Q} \times AB = \frac{10}{30-10} \times 12 = 6 \text{ সেমি.।}$$

(iii) $R = Q - P = 10 - 2 = 8$ (ইহা Q-এর সমান্তরাল অভিমুখে)

ইহা বর্ধিত ABকে Q এর দিকে C বিন্দুতে ছেদ করে যেন

$P.AC = Q.BC$; বা, $P(AB + BC) = Q.BC$; $P.AB = (Q - P)BC$

বা, $2 \times 12 = 8.BC \quad \therefore \quad BC = 3$ সেমি.।

উদা. 3. বল দুইটি সদৃশ সমান্তরাল এবং

(i) $P = 10$, $R = 16$, $AC = 3$ ফুট ; Q এবং AB নির্ণয় কর।

(ii) $Q = 20$, $AC = 12$ সেমি, $AB = 18$ সেমি, P এবং R নির্ণয় কর।

(iii) $P = 12$, $AC = 9$ সেমি., $CB = 6$ সেমি., Q এবং R নির্ণয় কর।

সমাধান :—(i) $10 + Q = 16$; $\therefore \quad Q = 6.$

$$AC = \frac{Q}{P+Q} \times AB \ ; \ \therefore \ 3 = \frac{6}{16} \times AB \ ; \text{ বা, } AB = \frac{48}{6} = 8 \text{ ফুট।}$$

(ii) $P + Q = R$; বা, $P + 20 = R$

$$P.AC = Q.AB \ ; \text{ বা, } P \times 12 = 20 \times 6, \ \therefore \ P = \frac{120}{12} = 10$$

এখন $R = 10 + 20 = 30.$

(iii) $12 + Q = R$ এবং $12 \times 9 = Q.6$,

$$\therefore \ Q = \frac{108}{6} = 18 \ ; \text{ এখন } R = 12 + 18 = 30.$$

উদা. 4. বল দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল এবং

(i) $P = 12$, $R = 9$, $AC = -4$ ইঞ্চি, Q এবং AB নির্ণয় কর।

(ii) $Q = 5$, $AC = -10$ সেমি., $AB = 14$ সেমি., P এবং R নির্ণয় কর।

(iii) $P = 6$, $AC = -9$ সেমি., $AB = 9$ সেমি., Q এবং R নির্ণয় কর।

সমাধান : (i) C বিন্দু P বলের বাহিরের দিকে, অতএব P বল Q অপেক্ষা বড়

$R = P - Q$; বা, $9 = 12 - Q$; $\therefore \ Q = 3.$

এখন $P.AC = Q.BC$

বা, $12 \times 4 = 3(AB + 4)$; বা, $16 = AB + 4 \quad \therefore \quad AB = 12$ ইঞ্চি।

(ii) C বিন্দু P বলের বাহিরের দিকে, অতএব, P বল Q অপেক্ষা বড়

এখন $R = P - Q = P - 5.$

এবং $P.AC = Q.BC$; বা, $P \times 10 = 5 \times 24 \quad \therefore \quad P = 12$

$\therefore \ R = P - Q = 12 - 5 = 7.$

(iii) $P \times 9 = Q \times 18$; বা, $6 \times 9 = 18Q$ $\therefore$ $Q = 3$.

$\therefore$ $R = P - Q = 6 - 3 = 3$

উদা. 5. 16 ইঞ্চি ব্যবধানে অবস্থিত A এবং B বিন্দুতে ক্রিয়মাণ 20 পা. এবং 10 পা. ভারের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধির মান ও ক্রিয়া রেখা নির্ণয় কর।

ধর, বল দুইটি A এবং B বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং লব্ধির ক্রিয়া রেখা ABকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

$$R = 20 + 10 = 30 \text{ পা. ভার ; } AC = \frac{Q}{P+Q} \times AB = \frac{10}{30} \times 16 = 5\tfrac{1}{3} \text{ ইঞ্চি।}$$

উদা. 6. 16 ইঞ্চি ব্যবধানে অবস্থিত A এবং B বিন্দুতে ক্রিয়মাণ 20 এবং 10 পাউণ্ড ভারের দুই অসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধির মান ও ক্রিয়া-রেখা নির্ণয় কর।

$R = 20 - 10 = 10$ পাউণ্ড ভার।

লব্ধির ক্রিয়া-রেখা বর্ধিত BA কে C বিন্দুতে ছেদ করিলে

$$AC = \frac{Q}{P-Q} \times AB = \frac{10}{10} \times 16 = 16 \text{ ইঞ্চি।}$$

উদা. 7. দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি 20 পাউণ্ড-ভার বল। যদি বল দুইটি 2 ফুট ব্যবধানে থাকে এবং একটি বল লব্ধি হইতে 9 ইঞ্চি দূরে অবস্থিত হয়, তাহা হইলে বল দুইটি নির্ণয় কর।

ধর, P এবং Q দুইটি বল এবং P বল প্রদত্ত লব্ধি বল হইতে 9 ইঞ্চি দূরে, তাহা হইলে অপর বল Q, 15 ইঞ্চি দূরে।

এখন $P + Q = 20$......(i) এবং $P \times 9 = Q \times 15$; বা, $P = \frac{5}{3}Q$

(i) হইতে $\frac{5}{3}Q + Q = 20$; বা, $\frac{8}{3}Q = 20$ $\therefore$ $Q = \frac{60}{8} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ পা. ভার।

উদা. 8. দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি 90 গ্রাম-ভার। যদি বল দুইটি 30 সেমি. ব্যবধানে থাকে এবং বৃহত্তর বলটি প্রদত্ত বল হইতে 10 সেমি. দূরে থাকে তাহা হইলে ঐ বল দুইটি নির্ণয় কর।

ধর, অসদৃশ সমান্তরাল বল দুইটির মান P এবং Q এবং ইহাদের মধ্যে বৃহত্তর P বল প্রদত্ত 90 গ্রাম ভার বল হইতে 10 সেমি. দূরে। তাহা হইলে

$P - Q = 90$ এবং $P \times 10 = Q(30 + 10)$ বা, $P = 4Q$

$\therefore$ $4Q - Q = 90$ অর্থাৎ $3Q = 60$; $Q = 30$ গ্রাম ভার,

$P = 4Q = 4 \times 30 = 120$ গ্রাম ভার।

উদা. 9. দুইজন লোক একটি সরল সমদণ্ড বহন করিতেছে। ইহার ভার 160 পাউণ্ড এবং ইহা 16 ফুট দীর্ঘ। যদি একজন লোক এক প্রান্ত হইতে 2 ফুট

দূরে এবং অপর লোক অন্য প্রান্ত হইতে 3 ফুট দূরে থাকিয়া দণ্ডটি বহন করে তাহা হইলে প্রত্যেকে কত ভার বহন করে ?

ধর, দুইজন লোক P এবং Q ভার বহন করে, তাহা হইলে $P+Q=160$

দণ্ডের ভার মধ্য বিন্দুতে ক্রিয়া করে ; প্রথম ব্যক্তি মধ্যবিন্দু হইতে 6 ফুট দূরে এবং দ্বিতীয় ব্যক্তি 5 ফুট দূরে ;

$6P=5Q \quad \therefore P=\frac{5}{6}Q$ এখন $\frac{5}{6}Q+Q=160$ অর্থাৎ $\frac{11}{6}Q=160$

$$\therefore \quad Q=\frac{160\times 6}{11}=\frac{960}{11}=87\tfrac{3}{11}$$ পাউণ্ড ভার।

এবং $P=\frac{5}{6}\times\frac{960}{11}=\frac{800}{11}=72\tfrac{8}{11}$ পাউণ্ড ভার।

উদা. 10. দুই ব্যক্তি 5 মিটার দীর্ঘ একটি ভারহীন দণ্ডের একটি বিন্দু হইতে 50 কিলোগ্রাম ভারের একটি বোঝা ঝুলাইয়া দুই প্রান্তে বহন করিতেছে। একজন যে প্রান্তে আছে তাহার দূরত্ব ভার হইতে 3 মিটার। প্রত্যেকে কি পরিমাণ ভার বহন করে ?

ধর, যে ব্যক্তি প্রদত্ত ভার হইতে 3 মিটার দূরের প্রান্তে আছে তাহার উপর P পরিমাণ ভার পড়ে এবং অপর ব্যক্তির উপর Q পরিমাণ ভার পড়ে। তাহা হইলে

$P+Q=50$; আবার $3P=2Q$; বা, $P=\frac{2}{3}Q$

$\therefore \frac{2}{3}Q+Q=50$; বা, $\frac{5}{3}Q=50$; $\therefore Q=\frac{50\times 3}{5}=30$ কিলোগ্রাম ভার।

সুতরাং $P=50-30=20$ কিলোগ্রাম ভার।

উদা. 11. 8 ফুট দীর্ঘ একটি সরল ভারহীন, বাঁশের দণ্ডের দুই প্রান্ত দুইটি অনুভূমিক কীলক P এবং Q-এর উপর অবস্থিত ; দণ্ডের R বিন্দুতে একটি ভারী বস্তু বাঁধা আছে। যদি $PR=3RQ$ হয়, এবং P অপেক্ষা Q-তে 325 পাউণ্ড বেশি ভার পড়ে, তাহা হইলে বস্তুটির ভার নির্ণয় কর। [C. U. 1941]

ধর, P এর উপর W পা. ভার পড়ে, তাহা হইলে Q-এর উপর W+325 পা. ভার পড়ে। যদি বোঝাটির ভার W′ হয়, তাহা হইলে $W+(W+325)=W'$ .... (i)

এবং $W.PR=(W+325)\,QR$; বা, $W.3RQ=(W+325)RQ$

$3W=W+325$ বা, $2W=325$

এখন (i) হইতে $325+325=W' \quad \therefore W'=650$ পা. ভার।

উদা. 12. 6 ফুট দীর্ঘ এবং 30 পাউণ্ড ভার-বিশিষ্ট একটি সমদণ্ড এক টেবিলের উপর রাখা হইয়াছে। ইহার এক প্রান্ত টেবিলের এক কিনারা হইতে এক ফুট বাহিরে

আছে। সাম্যাবস্থা নষ্ট না হয় এরূপভাবে সর্বাধিক কত ভার এই প্রান্ত হইতে ঝুলান যায় ?

যখন দণ্ডটি উল্টাইয়া যাইতেছে তখন দণ্ডের ভার এবং ঝুলান ভারের লব্ধি টেবিলের কিনারাতে ক্রিয়া করে। ঝুলান ভার W হইলে, যেহেতু দণ্ডের ভার দণ্ডের মধ্য-বিন্দুতে ক্রিয়া করে,

$\therefore \quad 30 \times 2 = W.$ বা, $W = 60$ পা. ভার।

উদা. 13. এক ব্যক্তি একটি লাঠির প্রান্তে একটি বোঝা ঝুলাইয়া ইহা কাঁধের উপর বহন করিতেছে। সে লাঠির অপর প্রান্ত হাত দিয়া চাপিয়া ধরিয়াছে। কাঁধ ও হাতের মধ্যে দূরত্ব পরিবর্তন করিলে কি ভাবে কাঁধের উপর চাপের পরিবর্তন হয়।

লাঠির উপর ক্রিয়মাণ বল

(1) ঝুলান বোঝার ভার W নিম্নাভিমুখে, (2) কাঁধের প্রতিক্রিয়া R উর্ধ্বাভিমুখে,

(3) হাতের চাপ P নিম্নাভিমুখে,

ধর, কাঁধ ও হাতের মধ্যে দূরত্ব x এবং লাঠির দৈর্ঘ্য l

সাম্যাবস্থার জন্য R এবং W অসদৃশ সমান্তরাল বল দুইটির লব্ধি P-এর সমান ও বিপরীতমুখী

$$\therefore \quad Rx = Wl; \quad \text{বা}, \quad R = \frac{Wl}{x}.$$

$\therefore$ কাঁধের উপর চাপ কাঁধ ও হাতের মধ্যে দূরত্বের বিপরীত অনুপাতে পরিবর্তিত হয়।

উদা. 14. এক ব্যক্তি 12 ফুট দীর্ঘ একটি ভারহীন দণ্ডের দুই প্রান্তে দুইটি বস্তু ঝুলাইয়া কাঁধের উপর বহন করিতেছে। যদি তাহার কাঁধের উপর 154 পাউণ্ড-ভার পড়ে, এবং তাহার কাঁধ হইতে একপ্রান্ত 4 ফুট দূরে হয় তাহা হইলে বস্তু দুইটির ভার নির্ণয় কর।

মনে কর, ভার দুইটি W_1 ও W_2 এবং W_1 ভার কাঁধ হইতে 4 ফুট দূরের প্রান্তে থাকে তাহা হইলে

$W_1 + W_2 = 154 \;\cdots$ (i) এবং $4W_1 = 8W_2$; বা, $W_1 = 2W_2$

এখন (i) হইতে $3W_2 = 154 \quad \therefore \quad W_2 = \frac{154}{3} = 51\frac{1}{3}$ পা. ভার

$W_1 = 154 - 51\frac{1}{3} = 102\frac{2}{3}$ পা. ভার।

উদা. 15. দুই ব্যক্তি একটি 6 ফুট দীর্ঘ তক্তার উপর 300 পাউণ্ড ভারের একটি বোঝা রাখিয়া বহন করিতেছে। ইহাদের মধ্যে একজন 170 পাউণ্ড ভার বহনে সমর্থ। বোঝাটি কোন্ অবস্থানে রাখিলে তাহার উপর ঠিক এই পরিমাণ ভার পড়িবে ?

মনে কর, বোঝাটি 170 পা. ভার বহনক্ষম ব্যক্তি হইতে x ফুট দূরে রক্ষিত হয়। তাহা হইলে $170x = (300 - 170\ (6 - x)$

বা, $17x = 13(6 - x) = 78 - 13x$; বা, $30x = 78$

$\therefore\ x = \frac{78}{30} = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$ ফুট।

উদা. 16. দুই ফুট দীর্ঘ একটি ভারহীন দণ্ড 3 ইঞ্চি ব্যবধানে দুইটি কীলকের উপর আছে। একটি কীলক দণ্ডের একপ্রান্তে এবং দণ্ডের অপর প্রান্তে 5 পাউণ্ড ভার ঝুলান আছে। কীলক দুইটির উপর চাপ নির্ণয় কর। [C. U. 1956]

এখানে দণ্ডের প্রান্তে কীলকের উপর চাপ উর্ধ্বাভিমুখে, অপর কীলকের উপর চাপ নিম্নাভিমুখে।

কীলকদ্বয়ের উপর চাপের প্রতিক্রিয়া এবং ঝুলান ভার 5 পাউণ্ড দণ্ডটিকে সাম্যাবস্থায় রাখিয়াছে। কীলকদ্বয়ের প্রতিক্রিয়া P_1 এবং P_2 হইলে

$P_1 + 5 = P_2 \cdots$ (i) $\quad P_1 \times 3 = 5 + 21$; বা, $P_1 = 35$ পা. ভার।

এখন (i) হইতে $P_2 = 35 + 5 = 40$ পা. ভার।

উদা. 17 দুই ব্যক্তি একটি ভারহীন দণ্ড হইতে 50 কিলোগ্রাম ভারের একটি বোঝা ঝুলাইয়া বহন করিতেছে। দণ্ডটি 2 মিটার দীর্ঘ এবং উহার দুই প্রান্ত এই দুইজনের কাঁধের উপর। যে বিন্দু হইতে বোঝা ঝুলান হইয়াছে উহা একজনের নিকট হইতে যতদূরে অন্য জনের নিকট হইতে 10 সেন্টিমিটার কম দূরে। প্রত্যেকের স্কন্ধে কি পরিমাণ চাপ পড়ে ?

মনে কর, একজনের কাঁধ হইতে বোঝার দূরত্ব x সেমি; তাহা হইলে অপর ব্যক্তির কাঁধ হইতে দূরত্ব $(x - 10)$ সেমি.

এখন $2x - 10 = 200$ সেমি. $2x = 210$ সেমি. $\therefore\ x = 105$ সেমি.

দুই ব্যক্তির কাঁধের উপর চাপ যথাক্রমে P_1 এবং P_2 হইলে,

$P_1 + P_2 = 50$ কি. গ্রা,.........(i)

এবং $P_1 \times 105 = P_2 \times 95$; বা, $21P_1 = 19P_2$; বা, $P_1 = \frac{19}{21}P_2$.

(i) হইতে $\frac{19}{21}P_2 + P_2 = 50$; বা. $\frac{40}{21}P_2 = 50$

$\therefore\ P_2 = \frac{50 \times 21}{40} = \frac{105}{4} = 26{\cdot}25$ কি. গ্রা.

$\therefore\ P_1 = 50 - 26{\cdot}25 = 23{\cdot}75$ কি. গ্রা.।

উদা. 18. দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P এবং Q একটি দৃঢ় বস্তুর দুইটি বিন্দু A এবং Bতে ক্রিয়া করে।

(i) দেখাও যে বল দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করিলে লব্ধির ক্রিয়া রেখা এবং Q কে $\frac{P^2}{Q}$ তে পরিবর্তন করিলে যে লব্ধি পাওয়া যায় তাহার ক্রিয়া রেখা এক।

(ii) যদি P এবং Q স্থান বিনিময় করে, দেখাও যে লব্ধির প্রয়োগবিন্দু AB-র উপর d পরিমাণ সরে, যেন $d=\frac{P-Q}{P+Q}\times AB$ হয়।

সমাধান ঃ (i) মনে কর, যখন সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় P এবং $\frac{P^2}{Q}$, তখন A বিন্দু হইতে AB রেখার উপর লব্ধির প্রয়োগবিন্দুর দূরত্ব x. তাহা হইলে

$$\left(P+\frac{P^2}{Q}\right)x=\frac{P^2}{Q}\times AB\ ;\quad x=\frac{P}{P+Q}\times AB$$

আবার, যখন A এবং B বিন্দুতে Q এবং P সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে তখন A হইতে লব্ধির প্রয়োগ বিন্দুর দূরত্ব y হইলে

$$(P+Q)y=P.AB \qquad \therefore\ y=\frac{P.AB}{P+Q} \qquad \therefore\ x=y.$$

(ii) মনে কর, প্রথম ক্ষেত্রে লব্ধির ক্রিয়া রেখা AB-কে A হইতে x দূরে ছেদ করে। তাহা হইলে

$$x=\frac{Q}{P+Q}\times AB.\ \ [\text{কারণ. } Px=Q(AB-x)]$$

যদি দ্বিতীয় ক্ষেত্রে লব্ধির ক্রিয়া রেখা AB-কে A হইতে y দূরে ছেদ করে, তাহা হইলে

$$y=\frac{P}{P+Q}\times AB.\ \ [\text{ কারণ, } Q.x=P(AB-x)]$$

$$d=y-x=\frac{P-Q}{P+Q}AB.$$

উদা. 19. তিনটি সমান্তরাল বল P, Q এবং R সাম্যাবস্থায় আছে। ইহাদের ক্রিয়া রেখাকে A, B এবং C বিন্দুতে ছেদ করিয়া একটি সরলরেখা টানা হইল। দেখাও যে $\frac{P}{BC}=\frac{Q}{CA}=\frac{R}{AB}$.

সাম্যাবস্থার জন্য দুইটি সমান্তরাল বলের লব্ধি তৃতীয় বলের সমান ও বিপরীত। ধর, P এবং Q-এর লব্ধি R -এর সমান ও বিপরীতমুখী, তাহা হইলে

$$\frac{P}{BC}=\frac{Q}{AC}=\frac{P\pm Q}{BC\pm AC}=\frac{R}{AB}.$$

উদা. 20. একটি লৌহদণ্ডের ভার প্রতিফুটে 4 পাউণ্ড। একপ্রান্ত হইতে 5 পাউণ্ড ভার ঝুলাইলে সেখান হইতে 2 ফুট দূরে লব্ধি বল ক্রিয়া করে। দণ্ডটির দৈর্ঘ্য কত? [C. U. 1924]

ধর, দণ্ডের দৈর্ঘ্য x ফুট, তাহা হইলে দণ্ডের ভার $4x$ পাউণ্ড। এই $4x$ পাউণ্ড এবং 5 পাউণ্ড ভারের লব্ধি প্রান্ত হইতে 2 ফুট দূরে

$$4x\left(\frac{x}{2}-2\right)=5\times 2\;;\text{ বা, }\;2x(x-4)=10$$

বা, $2x^2-8x-10=0$ অর্থাৎ $x^2-4x-5=0$

অর্থাৎ $(x-5)(x+1)=0$; $\therefore\;x=5$ ফুট ; [$x=-1$ গ্রহণযোগ্য নয়]।

উদা. 21. দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বলের মান P এবং Q $(P>Q)$। যদি P এবং Q উভয়কে একই পরিমাণ বৃদ্ধি করা হয় তাহা হইলে লব্ধি বলের ক্রিয়া রেখা P হইতে আরও দূরের দিকে যাইবে।

ধর, P এবং Q যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে ক্রিয়া করে। প্রথম ক্ষেত্রে লব্ধি P−Q বর্ধিত BA-র উপর C বিন্দুতে ক্রিয়া করে। উভয় বল x পরিমাণ বৃদ্ধি করা হইলে তাহাদের লব্ধি $(P+x)-(Q+x)$ অর্থাৎ $P-Q$ যেন C′ বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

প্রথম ক্ষেত্রে, $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{Q}{P-Q}$; দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{Q+x}{P-Q}$

$\therefore\;AC'-AC=\dfrac{x}{P-Q}\cdot AB$, অতএব লব্ধির ক্রিয়া রেখা P হইতে আরও দূরের দিকে সরিয়া যায়।

উদা. 22. একটি সমভার তক্তার দৈর্ঘ্য $2a$ এবং ভার w। ইহাকে অনুভূমিক ভাবে b ব্যবধানে দুইটি কীলকের উপর রাখা হইয়াছে। দুইপ্রান্তে পর্যায়ক্রমে বৃহত্তম ভার w_1 এবং w_2 রাখা যায়। দেখাও যে,

$$\frac{w_1}{w+w_1}+\frac{w_2}{w+w_2}=\frac{b}{a}.$$

ধর, মধ্যবিন্দু হইতে কীলকদ্বয়ের দূরত্ব x এবং y ; তাহা হইলে $x+y=b$.

$wx=w_1(a-x)\quad\therefore\;x=\dfrac{w_1a}{w+w_1}$ অনুরূপে $y=\dfrac{w_2a}{w+w_2}$

এখন $\;b=x+y=\dfrac{w_1a}{w+w_1}+\dfrac{w_2a}{w+w_2}$

$$\therefore\;\frac{w_1}{w+w_1}+\frac{w_2}{w+w_2}=\frac{b}{a}.$$

উদা. 23. তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q, R একটি ত্রিভুজ ABC-র কৌণিক বিন্দুতে ক্রিয়া করে, প্রমাণ কর যে বল তিনটি যে অভিমুখেই থাকুক না কেন P=Q=R হইলে লব্ধির ক্রিয়া-রেখা ভরকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়।

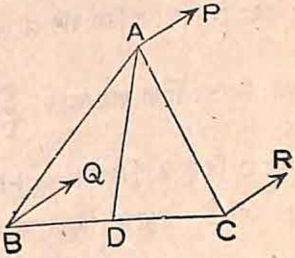
B এবং C বিন্দুতে দুইটি সমান সদৃশ সমান্তরাল বল প্রত্যেকে P প্রযুক্ত হইলে তাহাদের ক্রিয়ারেখা BC ভূমির মধ্যবিন্দু D-র ভিতর দিয়া যায়। লব্ধির মান=2P.

এখন, A বিন্দুতে ক্রিয়মাণ P এবং D বিন্দুতে ক্রিয়মাণ 2P-এর লব্ধি G বিন্দুতে ক্রিয়া করে যেন $\frac{AG}{DG}=\frac{2P}{P}=\frac{2}{1}$.

কিন্তু ভরকেন্দ্র AD মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে ছেদ করে। অতএব তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি ভরকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়।

উদা. 24. তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q এবং R একটি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুতে ক্রিয়া করে। যদি তাহাদের লব্ধির ক্রিয়ারেখা ত্রিভুজের ভর-কেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায় তাহা হইলে P=Q=R.

B এবং C বিন্দুতে ক্রিয়মাণ Q এবং R সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি Q+R যদি D বিন্দুর ভিতর দিয়া যায়,



তাহা হইলে $\frac{BD}{DC}=\frac{R}{Q}$,......(i)

এখন D বিন্দুতে ক্রিয়মাণ Q+R এবং A বিন্দুতে ক্রিয়মাণ P বলের লব্ধি AD-র উপরে একটি বিন্দু G-র ভিতর দিয়া যাইবে। কিন্তু প্রদত্ত শর্ত অনুসারে এই বিন্দুটি ত্রিভুজের ভর-কেন্দ্র।

সুতরাং AD একটি মধ্যমা। ∴ BD=DC

তাহা হইলে (i) হইতে R=Q,

অনুরূপে Q=P ∴ P=Q=R.

উদা. 25. তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q এবং R একটি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুতে ক্রিয়া করে। যদি তাহাদের লব্ধি ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায় তাহা হইলে $\frac{P}{\sin A}=\frac{Q}{\sin B}=\frac{R}{\sin C}$ $\left[\text{অথবা } \frac{P}{a}=\frac{Q}{b}=\frac{R}{c}\right]$.

B এবং C বিন্দুতে ক্রিয়মাণ Q এবং R সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি Q+R যদি D বিন্দুতে ক্রিয়া করে তবে

$$\frac{BD}{DC}=\frac{R}{Q}......(i)$$

এখন D বিন্দুতে ক্রিয়মাণ Q+R এবং A বিন্দুতে ক্রিয়মাণ P বলের লব্ধি AD-র উপর একটি বিন্দুর ভিতর দিয়া যাইবে। কিন্তু প্রদত্ত শর্তানুসারে ইহা ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র। ∴ AD সরলরেখা A কোণের সমদ্বিখণ্ডক, তাহা হইলে,

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}$$

∴ (i) হইতে, $\frac{R}{Q}=\frac{BD}{DC}=\frac{\sin C}{\sin B}$ অর্থাৎ $\frac{R}{\sin C}=\frac{Q}{\sin B}$

অনুরূপে, $\frac{Q}{\sin B}=\frac{P}{\sin A}$ ∴ $\frac{P}{\sin A}=\frac{Q}{\sin B}=\frac{R}{\sin C}$.

উদা. 26. তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q, R একটি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুতে ক্রিয়া করে। যদি তাহাদের লব্ধি ত্রিভুজের লম্ব-বিন্দুর ভিতর দিয়া যায় তাহা হইলে $\frac{P}{\tan A}=\frac{Q}{\tan B}=\frac{R}{\tan C}$.

[বা, $P(b^2+c^2-a^2)=Q(c^2+a^2-b^2)=R(a^2+b^2-c^2)$].

B এবং C বিন্দুতে ক্রিয়মাণ Q এবং R সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি Q+R যদি D বিন্দুর ভিতর দিয়া যায় তবে $\frac{BD}{DC}=\frac{R}{Q}$ ......(i)

এখন D বিন্দুতে ক্রিয়মাণ Q+R এবং A বিন্দুতে ক্রিয়মাণ P বলের লব্ধি AD-র উপরিস্থ একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে। প্রদত্ত শর্তানুসারে ইহা ABC ত্রিভুজের পাদবিন্দু। ∴ AD সরল রেখা BC-র উপর লম্ব ; তাহা হইলে

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AD\cot B}{AD\cot C}=\frac{\cot B}{\cot C}=\frac{\tan C}{\tan B}$$

∴ (i) হইতে $\frac{R}{Q}=\frac{BD}{DC}=\frac{\tan C}{\tan B}$; বা, $\frac{R}{\tan C}=\frac{Q}{\tan B}$

অনুরূপে, $\frac{Q}{\tan B}=\frac{P}{\tan A}$ ∴ $\frac{P}{\tan A}=\frac{Q}{\tan B}=\frac{R}{\tan C}$.

[$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{K.a.2bc}{b^2+c^2-a^2}$, $\tan B=\frac{K.2abc}{c^2+a^2-b^2}$,

$\tan C=\frac{K\,2abc}{a^2+b^2-c^2}$]

∴ $P(b^2+c^2-a^2)=Q(c^2+a^2-b^2)=R(a^2+b^2-c^2)$]

উদা. 27. তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q, R একটি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু তিনটিতে ক্রিয়া করে। যদি তাহাদের লব্ধি ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়, তাহা হইলে

$$\frac{P}{\sin 2A}=\frac{Q}{\sin 2B}=\frac{R}{\sin 2C}\quad \left[\text{বা,}\quad \frac{P}{a\cos A}=\frac{Q}{b\cos B}=\frac{R}{c\cos C}\right].$$

B এবং C বিন্দুতে ক্রিয়মাণ Q এবং R সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি Q+R যদি D বিন্দুতে ক্রিয়া করে তাহা হইলে

$$\frac{BD}{DC}=\frac{R}{Q}\quad \ldots \quad (i)$$

এখন D বিন্দুতে ক্রিয়মাণ Q+R বল এবং A বিন্দুতে ক্রিয়মাণ P বলের লব্ধি AD-র উপরিস্থ একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে। কিন্তু প্রদত্ত শর্তানুসারে ইহা ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, তাহা হইলে AO-কে বর্ধিত করিয়া দিলে ইহা BCকে এই D বিন্দুতে ছেদ করিবে।

এখন $\frac{BD}{DC}=\frac{BD}{OD}\times\frac{OD}{DC}=\frac{\sin BOD}{\sin OBD}\cdot\frac{\sin OCD}{\sin DOC}$ কিন্তু $\angle OBD=\angle OCD$.

এবং $\angle BOD=180°-2C$, $\angle DOC=180°-2B$

$$\therefore \frac{BD}{DC}=\frac{\sin(180°-2C)}{\sin(180°-2B)}=\frac{\sin 2C}{\sin 2B}$$

এখন (i) হইতে $\frac{R}{Q}=\frac{BD}{DC}=\frac{\sin 2C}{\sin 2B}$ $\therefore \frac{R}{\sin 2C}=\frac{Q}{\sin 2B}$.

অনুরূপে, $\frac{Q}{\sin 2B}=\frac{P}{\sin 2A}$; $\therefore \frac{P}{\sin 2A}=\frac{Q}{\sin 2B}=\frac{R}{\sin 2C}$.

$$\left[\frac{P}{2\sin A\cos A}=\frac{Q}{2\sin B\cos B}=\frac{R}{2\sin C\cos C}\right.$$

$$\left.\text{বা,}\quad \frac{P}{a\cos A}=\frac{Q}{b\cos B}=\frac{R}{c\cos C}\right]$$

প্রশ্নমালা—IV

1. 5 ফুট দীর্ঘ একটি ভারহীন দণ্ডের একপ্রান্ত হইতে 3 ফুট দূরে 50 পাউণ্ড ভারের একটি বোঝা ঝুলাইয়া লাঠির দুই প্রান্তে দুইজন লোক উহা কাঁধে করিয়া বহন করিতেছে। কাহার কাঁধে কত চাপ পড়িতেছে?

2. একজন লোক কাঁধের উপর 3 ফুট লম্বা একটি লাঠির প্রান্তে 24 পাউণ্ড ভার বহন করিতেছে। লাঠির অপর প্রান্ত সে হাত দিয়া চাপিয়া ধরিয়াছে।

(i) বোঝাটি কাঁধের পিছনে 1 ফুট দূরে থাকিলে কাঁধে কত চাপ পড়ে ?

(ii) বোঝাটি কাঁধের পিছনে 2 ফুট দূরে থাকিলে কাঁধে কত চাপ পড়ে ?

3. দুই ব্যক্তি একটি ভারহীন তক্তার উপর 311 পাউণ্ড ভারের একটি পাথরখণ্ড রাখিয়া বহন করিতে পারে। পাথরখণ্ডটি কোন্ অবস্থানে রাখিলে একব্যক্তি অপরব্যক্তি হইতে 205 পাউণ্ড ভার বেশী বহন করিবে ? [C. U. 1935]

4. AB সরলরেখার উপর C একটি বিন্দু। AC এবং CB-র মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়মাণ P এবং Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি C বিন্দু দিয়া যায়। P এবং Q বলের স্থান পরিবর্তন করিলে দেখাও যে তাহাদের লব্ধি AB রেখার মধ্য বিন্দু দিয়া যাইবে। [H. S. 1960]

5. $1\frac{1}{2}$ হন্দর ওজনের একটি ভারীবস্তু 6 ফুট দীর্ঘ একটি ভারহীন দণ্ডের সাহায্যে দুই ব্যক্তির কাঁধে স্থিরাবস্থায় আছে। বস্তুটির একব্যক্তি হইতে দূরত্ব, অন্য ব্যক্তি হইতে দূরত্বের 1 ফুট বেশী হইলে, দুই ব্যক্তির কাঁধে কত চাপ পড়িবে ? [U. P. 1957]

যদি এক ব্যক্তি 1 হন্দর বহন করিতে সক্ষম হয়, তবে অপর ব্যক্তি হইতে বস্তুটির সর্বাধিক দূরত্ব নির্ণয় কর।

6. 3 ফুট দূরত্বে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল একটি বস্তুতে ক্রিয়া করে। যদি বল দুইটির স্থান পরিবর্তিত হয়, তখন লব্ধি বল 6 ইঞ্চি সরিয়া যায়। বল দুইটির অনুপাত নির্ণয় কর। [H. S. 1961]

7. 50 পাউণ্ড ভারের 12 ফুট দীর্ঘ AB সমদণ্ড A-তে এবং B হইতে 2 ফুট দূরে দুইটি কীলকের উপর রক্ষিত আছে। A হইতে যথাক্রমে 2 ফুট, 4 ফুট এবং 8 ফুট দূরে 4, 5, 10 পাউণ্ড ভার সমূহ বাঁধিয়া দেওয়া হইয়াছে। কীলক দুইটির উপর চাপ নির্ণয় কর। [H. S. 1962]

8. দুই ব্যক্তি 6 ফুট দীর্ঘ একটি হাল্কা দণ্ডের সাহায্যে 300 পাউণ্ড ভার ওজনের একটি পাথরখণ্ড বহন করিতেছে। উহাদের একজন যদি 100 পাউণ্ড ভারের বেশী বহন করিতে না পারে, তবে অপর ব্যক্তি হইতে সর্বাপেক্ষা কতদূরে বস্তুটি রাখিলে উহারা বহন করিতে পারিবে ? [U P. 1939]

9. 12 ফুট দীর্ঘ একটি ভারহীন বাঁশের দুই প্রান্তে দুইটি ভারী বস্তু ঝোলান হইয়াছে। উহার এক প্রান্ত হইতে 4 ফুট দূরে এক ব্যক্তি তাহার কাঁধ রাখিয়া বহন করায় তাহার কাঁধে 154 পাউণ্ড ভার চাপ পড়ে। ভারী বস্তু দুইটির ওজন নির্ণয় কর। [C. U. 1934]

10. 4 ফুট দীর্ঘ একটি ভারী দণ্ড পরস্পর 1 ফুট দূরত্ব বিশিষ্ট দুইটি কীলকের সাহায্যে অনুভূমিকভাবে সাম্যাবস্থায় আছে। উহার এক প্রান্তে 10 পাউণ্ড ভার

অথবা অপরপ্রান্তে 4 পাউণ্ড ভার ওজন চাপাইলে ঠিক উল্টাইয়া পড়িবার উপক্রম হয়। দণ্ডটির ওজন এবং উহার মধ্যবিন্দু হইতে কীলক দুইটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

[Raj. 1949, Nagpur 1939, C.U. 1961]

11. একটি ভারহীন দণ্ডের একপ্রান্ত হইতে যথাক্রমে 2, 8, 6 ফুট দূরে P, Q, R তিনটি সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে। দণ্ডটি যদি সাম্যাবস্থায় থাকে তাহা হইলে দেখাও যে P : Q : R = 1 : 2 : 3. [H. S. 1963]

12. 2 ফুট দীর্ঘ একটি ভারহীন দণ্ড পরস্পর 3 ইঞ্চি ব্যবধানে সমতলে অবস্থিত দুইটি কীলকের উপর স্থাপিত আছে। দণ্ডটির একপ্রান্ত একটি কীলকের উপর আছে এবং অপরপ্রান্তে একটি 5 পাউণ্ড ভার প্রযুক্ত আছে। কীলক দুইটির উপর চাপ নির্ণয় কর। [H.S. 1971]

13. 8 মিটার দীর্ঘ একটি ভারহীন দণ্ডের এক প্রান্ত হইতে 3 মিটার দূরে 75 কিলোগ্রাম ভারের একটি বোঝা ঝুলাইয়া দণ্ডের দুই প্রান্তে দুইজন লোক বহন করিতেছে। কাহার উপর কত চাপ পড়িবে ? [H. S. 1972]

14. দুই ব্যক্তি একটি 4 মিটার লম্বা ভারশূন্য দণ্ডের সাহায্যে 60 কিগ্রা ভার বহন করিতেছে। ভারটি দণ্ডের মাঝখানে ঝুলান আছে ; এক ব্যক্তি দণ্ডের একপ্রান্ত হইতে $\frac{1}{2}$ মিটার দূরে এবং অপর ব্যক্তি অপর প্রান্ত হইতে 1 মিটার দূরে রহিয়াছে। প্রত্যেকে কত ভার বহন করিতেছে তাহা নির্ণয় কর। [H. S. 1970]

15. 20 পাউণ্ড ভারের 10 ফুট দীর্ঘ একটি সমদণ্ডের দুইপ্রান্ত দুইটি কীলকের উপর অবস্থিত। একপ্রান্ত হইতে 4 ফুট দূরত্বে 80 পাউণ্ড একটি ভার রাখা হইল। কীলকগুলির উপর চাপ নির্ণয় কর। [H. S. 1968]

16. 6 পাউণ্ড ভারী এবং 4 ফুট দীর্ঘ একটি সমদণ্ড একটি কীলকের উপর স্থাপিত। একপ্রান্তে 2 পাউণ্ড ভার সোজা ঝুলান থাকায় ইহা অনুভূমিক অবস্থানে থাকে। দণ্ডের কেন্দ্র হইতে কীলকের দূরত্ব নির্ণয় কর। [H. S. 1964]

17. একটি অনুভূমিক রাস্তায় 36 ফুট দীর্ঘ একটি সেতুর (AB) ভার 5 টন এবং ইহা দুই প্রান্তে দুইটি খুঁটির উপর অবস্থিত। 3 টন ভারের একটি মালবাহী যান (lorry) A হইতে রওনা হইয়া সেতুর দুই-তৃতীয়াংশ অতিক্রম করিয়া থামিল, তখন কোন খুঁটির উপর কত চাপ পড়িবে ? [H. S. 1966]

18. 4 পাউণ্ড এবং 6 পাউণ্ড ভারের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল এক সরল-রেখার 2 ফুট দূরত্বে দুইটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে। যখন তাহাদের সহিত দুই সমান বল যোগ করা যায় তখন তাহাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু 2 ফুট অপসারিত হয়। প্রদত্ত বল দুইটিতে কি পরিমাণ বল যোগ করা হইয়াছিল নির্ণয় কর। [H. S. 1965]

19. একটি 12 ফুট দীর্ঘ 20 পা. ভারের সমদণ্ডের দুইপ্রান্তে 12 পা. এবং 4 পা. ভার প্রযুক্ত হইয়াছে। 4 পা. ভার যে প্রান্তে আছে তাহা হইতে 4 ফুট দূরে 8 পা. ভার প্রযুক্ত হইয়াছে। দণ্ডটি 8 ফুট ব্যবধানে স্থিত দুইটি কীলকের উপর স্থাপিত আছে এবং একটি কীলক হইতে 4 পা. ভার প্রযুক্ত প্রান্ত 1 ফুট বাহিরে আছে। কীলক সমূহের উপর চাপ নির্ণয় কর। [H. S. 1969]

20. P এবং Q $(P>Q)$ দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে AB সরলরেখার লম্বভাবে ক্রিয়া করে। যদি P এবং Q উভয়কে x দ্বারা বর্ধিত করা হয় এবং লব্ধি বল d দূরত্ব অপসৃত হয় তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $d=\frac{x}{P-Q}\cdot AB$. [H. S. 1968]

ভ্রামক

(Moment)

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

(i) কোন বস্তুর কোন বিন্দু আটকানো থাকিলে ঐ বস্তুর উপর কোন বলপ্রয়োগ করিলে বস্তুটির আবর্তন হয়। যখন আবর্তন ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত দিকে হয়, তখন ঐ বিন্দুর চারিদিকে ঐ বলের ভ্রামককে **ধনাত্মক** আর আবর্তন ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে হইলে ভ্রামককে **ঋণাত্মক** ধরা হয়।

(ii) কোন বিন্দুর চারিদিকে দুই বা ততোধিক বলের ভ্রামক সমূহের বীজগাণিতিক সমষ্টি ঐ বিন্দুর চারিদিকে তাহাদের লব্ধির ভ্রামকের সমান।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যদি কোন বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক সমূহের বীজগাণিতিক সমষ্টি শূন্য হয়, তাহা হইলে হয় বল সমূহের লব্ধি ঐ বিন্দুগামী অথবা বল সমূহ সাম্যাবস্থায় আছে।

উদাহরণমালা—V

উদা. 1. 16 পাউণ্ড-ভারের বল, A বিন্দুতে প্রযুক্ত হইয়া $\overrightarrow{AB}$ রেখা বরাবর ক্রিয়া করিতেছে। A বিন্দু হইতে 2 ফুট দূরে O একটি বিন্দু। O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক নির্ণয় কর। যখন OAB কোণ (i) 30° ; (ii) 60° ; (iii) 90° ; (iv) 135° ; (v) 150°.

সমাধান ঃ

(i) নির্ণেয় ভ্রামক $=16\times 2\sin 30^\circ=16\times 2\times \frac{1}{2}=16$ ফুট পাউণ্ড।

(ii) নির্ণেয় ভ্রামক $=16\times 2\sin 60^\circ=16\times 2\times \frac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}$ ফু. পা.

(iii) নির্ণেয় ভ্রামক $=16\times 2\sin 90^\circ=16\times 2\times 1=32$ ফু. পা.

(iv) নির্ণেয় ভ্রামক $=16\times 2\sin 135^\circ=16\times 2\times \frac{1}{\sqrt{2}}=16\sqrt{2}$ ফু. পা.।

(v) নির্ণেয় ভ্রামক $=16\times 2\sin 150^\circ=16\times 2\times \frac{1}{2}=16$ ফু. পা.।

উদা. 2. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ ; ইহার প্রত্যেক বাহু 6 ইঞ্চি। $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ এবং $\overrightarrow{AB}$ বাহু বরাবর যথাক্রমে 2, 4 এবং 6 পা. ভার বল ক্রিয়া করে। বিপরীত শীর্ষবিন্দুর চারিদিকে প্রত্যেক বলের ভ্রামক নির্ণয় কর।

$BC = CA = AB = 6'' = \frac{1}{2}$ ফুট ; $\therefore \quad \angle A = \angle B = \angle C = 60°$

A বিন্দুর চারিদিকে $\overrightarrow{BC}$ বাহু বরাবর ক্রিয়মাণ 2 পা. ভার বলের ভ্রামক $= 2 \times \frac{1}{2} \sin 60° = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ফু. পা.।

B বিন্দুর চারিদিকে $\overrightarrow{CA}$ বাহু বরাবর ক্রিয়মাণ 4 পা. ভার বলের ভ্রামক $= 4 \times \frac{1}{2} \sin 60° = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ফু. পা.।

C বিন্দুর চারিদিকে $\overrightarrow{AB}$ বাহু বরাবর ক্রিয়মাণ 6 পা. ভার বলের ভ্রামক $= 6 \times \frac{1}{2} \sin 60° = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ পা. ভার।

উদা. 3. ABCD বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহু 10 ইঞ্চি। $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ এর দিকে 7 এবং 24 পাউণ্ড ভার বল প্রযুক্ত হইলে, C বিন্দু হইতে লব্ধি বলের দূরত্ব নির্ণয় কর।

ধর, প্রদত্ত 7 পা. এবং 24 পা. ভারের লব্ধি R, তাহা হইলে,

$R = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$ পা. ভার। [$\because \quad \angle BAD = 90°$]

মনে কর C হইতে লব্ধির দূরত্ব x ফুট। যেহেতু লব্ধির ভ্রামক = তাহার উপাংশ সমূহের ভ্রামকের সমষ্টি। তাহা হইলে C বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$25.x = 7 \times \frac{10}{12} - 24 \times \frac{10}{12} = -17 \times \frac{10}{12}.$$

$$\therefore \quad x = -\frac{17 \times 10}{12 \times 25} \text{ ফুট} = -6\tfrac{4}{5} \text{ ইঞ্চি।}$$

C বিন্দু হইতে লব্ধির দূরত্ব $6\frac{4}{5}$ ইঞ্চি এবং D বিন্দুর দিকে। [লব্ধি বৃহত্তর উপাংশের দিকে বেশি নত।]

উদা. 4. ABCD আয়তক্ষেত্রের $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ বাহু বরাবর 24 পা. এবং 10 পা. ভার বল ক্রিয়া করে। AB বাহু 2 ফুট এবং AD বাহু 3 ফুট হইলে C বিন্দু হইতে লব্ধির ক্রিয়া রেখার দূরত্ব নির্ণয় কর।

$BC = AD = 3$ ফুট এবং $CD = AB = 2$ ফুট।

প্রদত্ত 24 পা. এবং 10 পা. ভার বলের লব্ধি= $\sqrt{24^2+10^2}=26$ পা. ভার

মনে কর C বিন্দু হইতে লব্ধির দূরত্ব x ফুট ; তাহা হইলে

$26x=24\times3-10\times2=72-20=52$ ফু. পা.

$\therefore \quad x=\frac{52}{26}=2$ ফুট.

C বিন্দু হইতে লব্ধির দূরত্ব 2 ফুট এবং B-এর দিকে।

উদা. 5. একটি 6 ফুট দীর্ঘ এবং 10 পাউণ্ড ভারের সমদণ্ডের দুই প্রান্ত হইতে 8 পা. এবং 16 পা. ভার ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে। কোন্ বিন্দু হইতে দণ্ডটিকে ঝুলাইলে উহা অনুভূমিক থাকিবে ?

ধর, মধ্যবিন্দু হইতে নির্ণেয় বিন্দুর দূরত্ব 16 পা. ভারের দিকে x ফুট, এই বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে

$8(3+x)+10x-16(3-x)=0$; বা, $24+8x+10x-48+16x=0$

বা, $34x-24=0$; বা, $34x=24$,

$\therefore \quad x=\frac{12}{17}$ ফুট$-\frac{144}{17}$ ইঞ্চি$=8\frac{8}{17}$ ইঞ্চি।

মধ্যবিন্দু হইতে 16 পা. ভারের দিকে $8\frac{8}{17}$ ইঞ্চি দূরে দণ্ডটি ঝুলাইতে হইবে।

উদা. 6. একটি 10 ফুট দীর্ঘ এবং 60 পা. ভারের সমদণ্ডের দুইপ্রান্তে 20 পা. এবং 30 পা. ভার ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে। কোন্ বিন্দুতে দণ্ডটি সুস্থিত করা যাইবে ?

মনে কর, মধ্যবিন্দু হইতে 30 পা. ভারের দিকে x ফুট দূরের বিন্দুতে দণ্ডটি সুস্থিত থাকে। এই বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া,

$20(5+x)+60x-30(5-x)=0$ বা, $2(5+x)+6x-3(5-x)=0$

বা, $10+2x+6x-15+3x=0$ বা, $11x=5$ $\therefore$ $x=\frac{5}{11}$ ফুট।

মধ্যবিন্দু হইতে 30 পা. ভারের দিকে $\frac{5}{11}$ ফুট দূরের বিন্দুতে দণ্ডটি সুস্থিত থাকে।

উদা. 7. একটি ভারহীন 20 ইঞ্চি দীর্ঘ সরলদণ্ডে 5 ইঞ্চি অন্তর 2, 3, 4, 5, 6 সদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করে, ইহাদের লব্ধির প্রয়োগ-বিন্দু নির্ণয় কর।

ধর, AB সরলদণ্ডের A, C, D, E, B বিন্দুতে সদৃশ সমান্তরাল বল যথাক্রমে 2, 3, 4, 5 এবং 6 ক্রিয়া করে এবং মনে কর ইহাদের লব্ধির প্রয়োগ বিন্দু A হইতে x ইঞ্চি দূরে।

যে কোন বিন্দুর চারিদিকে প্রদত্ত বলসমূহের ভ্রামক=তাহাদের লব্ধির ভ্রামক। এখানে লব্ধি$=2+3+4+5+6=20$

সমান্তরাল বলসমূহকে তাহাদের প্রয়োগ বিন্দুর চারিদিকে ঘুরাইয়া AB-র লম্বাভিমুখী করিলে প্রয়োগ-বিন্দু একই থাকে

A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$20x=2\times0+3\times5+4\times10+5\times15+6\times20$

$=15+40+75+120=250$

$\therefore\ x=\frac{250}{20}=12\frac{1}{2}$ ইঞ্চি।

উদা. 8. 10, 20, 30, 40 এবং 50 গ্রাম ভার এক প্রান্ত হইতে আরম্ভ করিয়া 8 সেন্টিমিটার অন্তর একটি 32 সেন্টিমিটার দীর্ঘ ভারহীন সরল দণ্ড হইতে ঝুলান হইয়াছে। দণ্ডটিকে উহার কোন্ বিন্দু হইতে ঝুলাইলে অনুভূমিক থাকিবে ?

মনে কর, 10 গ্রাম ভার হইতে x সে. মি. দূরের বিন্দু হইতে দণ্ডটিকে ঝুলাইতে হইবে।

ভার সমূহের লব্ধি $=10+20+30+40+50=150$ গ্রাম ভার।

10 গ্রাম ভার যে প্রান্তে আছে তাহার চারিদিকে ভ্রামক লইলে

$150x=10\times0+20\times8+30\times16+40\times24+50\times32$

$=160+480+960+1600=3200$

$\therefore\ x=\frac{3200}{150}=\frac{320}{15}=21\frac{1}{3}$ সে. মি.।

উদা. 9. একটি 10 ফুট দীর্ঘ সমদণ্ডের একপ্রান্ত হইতে 2, 4, 6 এবং 8 ফুট দূরে যথাক্রমে 2, 4, 6 এবং 8 পাউণ্ড ভার ঝুলান হইয়াছে। যদি দণ্ডের ভার 5 পাউণ্ড হয়, তাহা হইলে দণ্ডটি কোন্ বিন্দুতে সুস্থিত থাকিবে ?

ধর, 2 পাউণ্ড ভারের প্রান্ত হইতে x ফুট দূরের বিন্দুতে দণ্ডটি সুস্থিত থাকিবে।

যে বিন্দুতে দণ্ডটি সুস্থিত থাকিবে, সেই বিন্দুই হইবে ঝুলান ভার সমূহ এবং দণ্ডের ভারের লব্ধির প্রয়োগ বিন্দু। ধর, ইহাদের লব্ধি R, তাহা হইলে

$R=2+4+6+8+5=25$ পা. ভার।

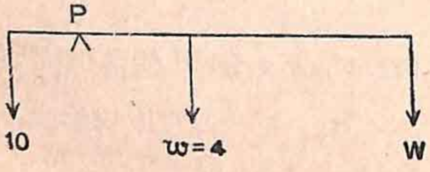
এখন 2 পাউণ্ড ভারের প্রান্তের চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$25x=2\times2+4\times4+6\times6+8\times8+5\times5$

$=4+16+36+64+25=145\quad\therefore\ x=\frac{145}{25}=\frac{29}{5}=5\frac{4}{5}$ ফুট।

উদা. 10. 5 ফুট দীর্ঘ এবং 4 পাউণ্ড ভারের একটি সমদণ্ড একপ্রান্ত হইতে 1 ফুট দূরে একটি বিন্দুর উপর ঘুরিতে পারে; ঐ প্রান্ত হইতে 10 পা. ভার ঝুলান হইয়াছে। অপর প্রান্তে কত ভার প্রয়োগ করিলে দণ্ডটি অনুভূমিকভাবে থাকিবে ?

মনে কর, নির্ণেয় ভার W এবং P বিন্দুর উপর দণ্ডটি ঘুরিতে পারে।



P বিন্দুর চারিদিকে দণ্ডের ভারের ভ্রামক এবং W-এর ভ্রামক

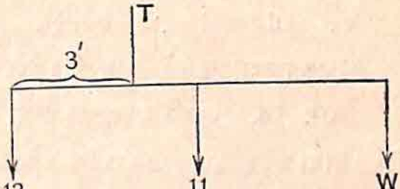
= ঐ বিন্দুর চারিদিকে 10 পা. ভারের ভ্রামক $\therefore\ 4\times1\frac{1}{2}+W\times4=10\times1$

বা, $4W=10-6=4$; $\therefore\ W=1$ পা. ভার।

উদা. 11. একটি 8 ফুট দীর্ঘ এবং 11 পাউণ্ড ভারের সমদণ্ড একপ্রান্ত হইতে 3 ফুট দূরে একটি দড়ি দিয়া ঝুলান হইয়াছে এবং সেই প্রান্তে 12 পা. ভার প্রযুক্ত হইয়াছে। অন্য প্রান্তে কি ভার প্রয়োগ করিলে দণ্ডটি অনুভূমিক ভাবে সাম্যাবস্থায় থাকিবে ?

মনে কর, W ভার প্রয়োগ করিলে দণ্ডটি অনুভূমিকভাবে সাম্যাবস্থায় থাকে।

দড়ির টান T, 12 পা. ভার, দণ্ডের ভার 11 পা. ভার (মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়মাণ) এবং W এই বলগুলি সাম্যাবস্থায় আছে।



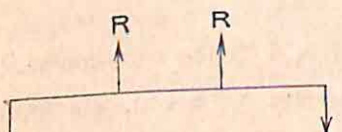
যে প্রান্ত হইতে W ভার ঝুলান হইয়াছে সেই প্রান্ত বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে

$12\times3-11\times1-W.5=0.$ বা, $36-11=5W.$ বা, $5W=25$

$\therefore\ W=5$ পা. ভার

উদা. 12. 20 ইঞ্চি দীর্ঘ একটি ভারহীন দণ্ড 10 ইঞ্চি ব্যবধানে দুইটি কীলকের উপর রক্ষিত হইয়াছে, ইহার দুইপ্রান্তে 8 পাউণ্ড এবং 12 পাউণ্ড ভার ঝুলান হইয়াছে। যদি কীলক দুইটির উপর সমান ভার পড়ে তাহা হইলে দণ্ডটিকে কিরূপে রাখা হইয়াছে ?

মনে কর, যে প্রান্ত হইতে 8 পা. ভার ঝুলান হইয়াছে সে প্রান্ত হইতে প্রথম কীলকের দূরত্ব x ইঞ্চি। তাহা হইলে, কীলক দুইটির প্রতিক্রিয়া (প্রত্যেকে R, R) এবং ঝুলান ভার দুইটি সাম্যাবস্থায় আছে।



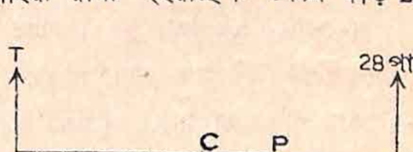
$\therefore\ R+R=8+12$; বা, $2R=20,$
$R=10.$

এখন প্রথম কীলকে চারিদিকে ভ্রামক লইলে

$$8x+0+10\times10-12(20-x)=0$$

বা, $20x+100-240=0$; বা, $20x=140$; $\therefore\ x=\frac{140}{20}=7$ ইঞ্চি।

উদা. 13. একটি সরল সমদণ্ডের ভার 32 পাউণ্ড; ইহাকে দুই প্রান্তে দুইটি উল্লম্ব দড়ির সাহায্যে অনুভূমিক ভাবে ঝুলাইয়া রাখা হইয়াছে। কোন দড়ি 28 পাউণ্ডের অধিক ভার বহন করিতে পারে না। দণ্ডের মধ্যবিন্দু হইতে কতদূরে 16 পাউণ্ড ভার ঝুলাইলে একটি দড়ি ছিঁড়িবার উপক্রম করে ?



ধর, দণ্ডের দৈর্ঘ্য l ; মধ্যবিন্দুতে সমদণ্ডের ভার 32 পা. ক্রিয়া করে, মধ্যবিন্দু হইতে x দূরে 16 পা. ভার ঝুলাইলে যদি একটি দড়ি ছিঁড়িবার উপক্রম করে

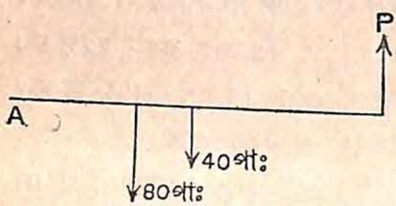
তাহা হইলে 16 পাউণ্ড ভার যেদিকে, সেদিকে দড়িতে 28 পা. ভার ক্রিয়া করে। মনে কর, অপর প্রান্তের দড়িতে টান T. এই বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে (সমীকরণে আর T আসিবে না)

$$32\times\frac{l}{2}+16\left(\frac{l}{2}+x\right)=28\times l. \quad \text{বা, } 16l+8l+16x=28l$$

বা, $16x=4l \quad \therefore \quad x=\frac{1}{4}l.$

অতএব মধ্যবিন্দু হইতে দণ্ডটির দৈর্ঘ্যের $\frac{1}{4}$ অংশ দূরে 16 পা. ভার ঝুলাইতে হইবে।

উদা. 14. একটি সমদণ্ডের দৈর্ঘ্য 10 ফুট এবং ভার 30 পাউণ্ড ; ইহাকে ভূমির উপর রাখা হইয়াছে। এক প্রান্ত হইতে 4 ফুট দূরে দণ্ডটির উপর 80 পা. ভার প্রয়োগ করা হইয়াছে। অপর প্রান্তে উল্লম্বভাবে কি বল প্রয়োগ করিলে ঐ প্রান্ত ভূমি হইতে আল্‌গা হইতে আরম্ভ করিবে ?



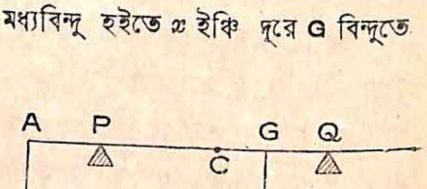
মনে কর, অপর প্রান্তে P পাউণ্ড ভার বল প্রয়োগ করিলে ঐ প্রান্ত উঠিতে আরম্ভ করে।

এখন প্রথম প্রান্তে দণ্ডের প্রতিক্রিয়া ক্রিয়া করে এবং দণ্ডটি এই বিন্দুর উপর ঘুরিবে। এই বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া $80\times4+40\times5-P\times10=0$; বা, $10P=320+200=520$

$\therefore \quad P=52$ পা. ভার।

উদা. 15. 16 ইঞ্চি দীর্ঘ একটি দণ্ড 10 ইঞ্চি ব্যবধানে মধ্যবিন্দু হইতে সমদূরবর্তী দুইটি কীলকের উপর স্থাপিত হইয়াছে। দণ্ডের একপ্রান্ত হইতে 4 পা. ভার অথবা অপর প্রান্ত হইতে 6 পা. ভার ঝুলাইলে দণ্ডটি উল্টাইয়া যাইতে উপক্রম হয়। দণ্ডের ভার নির্ণয় কর এবং ভার কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করে নির্ণয় কর।

ধর, AB দণ্ড এবং C ইহার মধ্যবিন্দু ; ভার মধ্যবিন্দু হইতে x ইঞ্চি দূরে G বিন্দুতে ক্রিয়া করে। P এবং Q দুইটি কীলক।



প্রথমক্ষেত্রে, A প্রান্তে 4 পা. ভার ঝুলাইলে দণ্ডটি উল্টাইতে চায়, অতএব Q-এ কোন প্রতিক্রিয়া নাই। (দণ্ডটি Q বিন্দু হইতে আলগা হইবার উপক্রম করে)

$PC=QC=5''$ এবং $AP=QB=3''$

যেহেতু 4 পা. ভার এবং W-এর লব্ধি P বিন্দুতে ক্রিয়া করে

$\therefore \quad 4AP=W.GP$; বা, $4\times3=W(5+x)\cdots$(i)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, B হইতে 6 পা. ভার ঝুলাইলে দণ্ডটি P বিন্দু হইতে আল্‌গা হইয়া পড়ে এবং সমগ্র চাপ Q বিন্দুতে পড়ে। 6 পা. ভার এবং W-এর লব্ধি Q বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

$\therefore$ 6.QB = W.GQ ; বা, $6 \times 3 = W.(5-x)$...(ii)

(i) কে (ii) দিয়া ভাগ করিলে, $\frac{12}{18} = \frac{5+x}{5-x}$; বা, $\frac{2}{3} = \frac{5+x}{5-x}$.

বা, $10-2x = 15+3x$ বা, $5x = -5$ $\therefore$ $x = -1$,

AG $= 8-1 = 7$ ইঞ্চি।

আবার (i) হইতে $12 = W(5-1) = 4W$ $\therefore$ $W = 3$ পা. ভার।

দণ্ডের ভার 3 পা. এবং ইহা 4 পা. ভারের প্রান্ত হইতে 7 ইঞ্চি দূরে ক্রিয়া করে।

উদা. 16. 20 ফুট দীর্ঘ এবং 100 পাউণ্ড ভারের একটি সমভার তক্তা অনুভূমিকভাবে দুইটি স্তম্ভের উপর রক্ষিত হইয়াছে। তক্তার এক প্রান্ত হইতে একটি স্তম্ভ 5 ফুট দূরে এবং অপর প্রান্ত হইতে দ্বিতীয় স্তম্ভ 8 ফুট দূরে। 60 পাউণ্ড ভারের একটি বালক দ্বিতীয় স্তম্ভ হইতে তক্তার উপর দিয়া যাইতে থাকিলে সে নিরাপদে কতদূর পর্যন্ত যাইতে পারে এবং তখন স্তম্ভ দুইটির প্রতিক্রিয়া কত?

[নিজে চিত্র আঁক]

মনে কর সে দ্বিতীয় স্তম্ভ হইতে x ফুট পর্যন্ত নিরাপদে যাইতে পারে। তখন তক্তাটি প্রথম স্তম্ভ হইতে আলগা হইয়া পড়ে এবং সমগ্র চাপ দ্বিতীয় স্তম্ভের উপর।

$\therefore$ $60x = 100.CQ = 100 \times 2$. $\therefore$ $x = \frac{200}{60} = \frac{10}{\cdot 3} = 3\frac{1}{3}$ ফুট।

P-এর উপর চাপ শূন্য। Q-এর উপর চাপ $= 100+60 = 160$ পা. ভার।

উদা. 17. 14 ফুট দীর্ঘ এবং 120 পাউণ্ড-ভারের একটি সমদণ্ড অনুভূমিকভাবে দুইটি কীলকের উপর রক্ষিত হইয়াছে। কীলক দুইটি দণ্ডের দুই প্রান্ত হইতে 5 ফুট এবং 3 ফুট দূরে অবস্থিত। যদি কোন কীলকই 200 পাউণ্ড ভারের অধিক চাপ বহন করিতে না পারে, তাহা হইলে দুই প্রান্তে কি পরিমাণ সমান ভার রাখা যায়? [C. U. 1938]

[নিজে চিত্র আঁক]

P এবং Q দুইটি খুঁটি। মনে কর দুইপ্রান্তে W, W সমান ভার রাখা যায়। ইহাদের লব্ধি 2W দণ্ডের মধ্য বিন্দুতে ক্রিয়া করে। তাহা হইলে দণ্ডের মধ্য বিন্দুতে (120 + 2W) পাউণ্ড ভার ক্রিয়া করে। ইহা খুঁটি দুইটির উপর চাপ T_1 এবং T_2-এর লব্ধি; PC = 2 ফুট, QC = 4 ফুট।

$T_1.PC=T_2.QC.\quad T_1\times 2=T_2\times 4\;;\quad \therefore\; T_1=2T_2,$

$\therefore\; T_1=200$ পা. ভার, $T_2=\frac{1}{2}T_1=100$ পা. ভার

$T_1+T_2=120+2W\;;\; 200+100=120+2W\;;$

বা, $2W=300-120=180\;;\quad \therefore\; W=90$ পা. ভার।

উদা. 18. একটি দণ্ড দুইটি সমান্তরাল দড়ি দিয়া ঝুলান রহিয়াছে, যখন দড়ি দুইটি দণ্ডের দুই প্রান্তে থাকে তখন টান 20 এবং 40 পাউণ্ড-ভার। কিন্তু যখন ইহাদিগকে প্রান্তদ্বয় হইতে 1 ফুট দূরে বাঁধা হয়, তখন টান 18 এবং 42 পাউণ্ড-ভার ; দণ্ডের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

মনে কর, দণ্ডের ভারকেন্দ্র 20 পা. ভার হইতে x ফুট দূরে এবং দণ্ডের দৈর্ঘ্য l।

প্রথম ক্ষেত্রে, $20\times x=40(l-x)$; বা, $x=2(l-x)$; বা, $3x=2l$

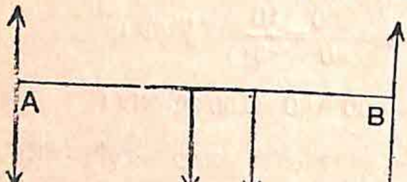
দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $18(x-1)=42(l-1-x)$; বা, $3(x-1)=7(l-1-x)$

বা, $3x-3=7l-7-7x$; $10x=7l-4$

$\therefore\; 10\times\frac{2}{3}l=7l-4$; বা, $20l=21l-12$; $\therefore\; l=12$ ফুট।

উদা. 19. একটি 9 ফুট দীর্ঘ সমদণ্ডকে দুইপ্রান্তে দুইটি খুঁটির উপর রাখা হইয়াছে। প্রত্যেক খুঁটির উপর 10 পাউণ্ড ভার চাপ পড়ে। 80 পাউণ্ড ভার কোথায় স্থাপন করিলে একটি খুঁটির উপর 40 পাউণ্ড ভার চাপ পড়িবে ?

AB দণ্ডের ভার $W=10+10=20$ পা. ভার, মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়মাণ।



মনে কর, A প্রান্তে 40 পা. ভার চাপ পড়ে এবং তখন 80 পা. ভার B প্রান্ত হইতে x ফুট দূরে রাখা হইয়াছে। যেহেতু A এবং B-তে খুঁটির প্রতিক্রিয়া দণ্ডের ভার ও 80 পা. ভার সাম্যাবস্থায় থাকে, B বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া (B বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া P-এর ভ্রামক শূন্য)

$$-40\times 9+20\times 4\tfrac{1}{2}+80x=0\;;\text{ বা, } 80x=360-90=270$$

$$\therefore\; x=\frac{270}{80}=3\tfrac{3}{8}\text{ ফুট।}$$

উদা. 20. একটি সমদণ্ডের দৈর্ঘ্য 16 ফুট এবং ভার 30 পাউণ্ড। ইহা দুই প্রান্তে দুইটি খুঁটির উপর স্থাপিত হইয়াছে এবং একপ্রান্ত হইতে 4 ফুট দূরে 80 পাউণ্ড-ভার ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে। কীলক দুইটির উপর চাপ নির্ণয় কর।

ধর, খুঁটি দুইটির উপর চাপের প্রতিক্রিয়া যথাক্রমে R_1 এবং R_2 ;

A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$80\times 4+30\times 8=R_2\times 16$; বা, $16R_2=320+240=560$

$\therefore\ R_2=\dfrac{560}{16}=35$ পা. ভার

এখন, $R_1+R_2=80+30$ অর্থাৎ $R_1+35=110$,

$R_1=110-35=75$ পা. ভার।

উদা. 21. 2 ফুট দীর্ঘ একটি ভারহীন দণ্ড তাহার একপ্রান্তে একটি অক্ষের চারিদিকে ঘুরিতে পারে। ঐ প্রান্ত হইতে 4 ইঞ্চি দূরে একটি উল্লম্ব দড়ির সাহায্যে দণ্ডটি অনুভূমিকভাবে রাখা হইয়াছে। দড়ি 12 আউন্সের বেশি ভার বহন করিতে পারে না। দড়ি ছিঁড়িয়া না যায় এরূপভাবে দণ্ডের অপর প্রান্তে সর্বাপেক্ষা বেশী কত ভার প্রয়োগ করা যায়?

[নিজে চিত্র আঁক]

মনে কর, W সর্বাপেক্ষা বেশি ভার যখন T সর্বাপেক্ষা বেশি অর্থাৎ 12 আউন্স ভার।

A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$12\times 4=W\times 24$ $\qquad\therefore\ W=2$ আউন্স ভার।

উদা. 22. P, 2P, 3P এবং 4P বল যথাক্রমে একটি বর্গক্ষেত্রের $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ এবং $\overrightarrow{DA}$ বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। ইহাদের লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয় কর এবং AB বাহুর সহিত লব্ধির ক্রিয়ারেখার ছেদ-বিন্দু নির্ণয় কর। [C. U. 1955]

AB এবং AD-র সমান্তরাল দিকে বিশ্লেষণ কর, এবং এই দুই দিকে বিশ্লেষিতাংশ সমূহের সমষ্টি X ও Y ধর।

$X=P-3P=-2P$; $Y=2P-4P=-2P$

এখন লব্ধি R যদি AB-র সঙ্গে θ কোণ করে

$R=\sqrt{4P^2+4P^2}=\sqrt{8P^2}=2\sqrt{2}P.$

$\tan\ \theta=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{-2P}{-2P}=1$; $\theta=135^\circ$ যেহেতু X এবং Y উভয়ে ঋণাত্মক।

এখন মনে কর লব্ধি AB সরলরেখাকে A হইতে x দূরে একটা বিন্দুতে ছেদ করে। এই বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে

$P\times 0+2P(a-x)+3P\times a+4P\times x=0$; বা, $2(a-x)+3a+4x=0$

বা, $2a-2x+3a+4x=0$; বা, $2x=-5a$ $\quad\therefore\ x=-\frac{5}{2}a.$

লব্ধি AB বাহুকে A বিন্দু হইতে $\frac{5}{2}a$ দূরে ছেদ করে [অর্থাৎ বর্ধিত BA-কে A হইতে $\frac{5}{2}a$ দূরে ছেদ করে।]

উদা. 23. 1, 2, 4, 5 পাউণ্ড ভার বল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্রমানুসারে গৃহীত চারি বাহু বরাবর ক্রিয়া করিতেছে। প্রমাণ কর যে ইহাদের লব্ধি একটি কর্ণের সমান্তরাল। প্রথম বল যে বাহু বরাবর ক্রিয়া করে সে বাহুকে লব্ধি কোথায় ছেদ করে নির্ণয় কর।

মনে কর, ABCD বর্গক্ষেত্রের $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$ বাহু বরাবর যথাক্রমে 1, 2, 4, 5 পা. ভার বল ক্রিয়া করে।

ধর, ইহাদের লব্ধি R, AB বাহুর সহিত θ কোণ করে এবং AB বাহুকে A হইতে x দূরে ছেদ করে। বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য a ধর।

AB এবং AD-র সমান্তরাল দিকে বিশ্লেষণ করিলে

$$R\cos\theta=1-4=-3\ ;\ R\sin\theta=2-5=-3$$

$\therefore\ \tan\theta=\frac{-3}{-3}=1,\ \theta=135^\circ\quad\therefore$ লব্ধি BD কর্ণের সমান্তরাল।

R এবং AB বাহুর ছেদ বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে

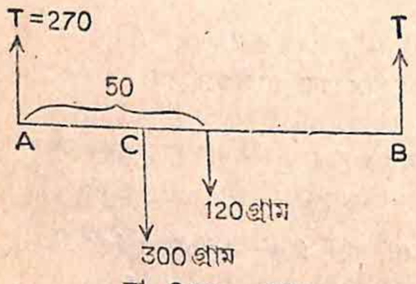
$1\times0+2(a-x)+4a+5x=0$; বা, $2a-2x+4a+5x=0$

বা, $3x+6a=0\quad\therefore\ x=-2a$

অর্থাৎ লব্ধি বর্ধিত BA-কে A বিন্দু হইতে বর্গের বাহুর দ্বিগুণ দূরে ছেদ করে।

উদা. 24, 120 গ্রাম ভার বিশিষ্ট এবং 1 মিটার দীর্ঘ একটি সমদণ্ডকে উহার দুই প্রান্ত A এবং B-তে উল্লম্বভাবে সংযুক্ত দুইটি স্প্রিং তুলা সাহায্যে অনুভূমিক অবস্থায় ঝুলাইয়া রাখা হইয়াছে। যখন দণ্ডের C বিন্দু হইতে 300 গ্রাম ভার ঝুলান হয়, তখন A প্রান্তের তুলায় 270 গ্রাম ভার সূচিত হয়, B প্রান্তের তুলায় কত ভার সূচিত হইবে এবং AC-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [W. B. S. F. 1954]

ধর, B প্রান্তের তুলাতে T গ্রাম ভার টান পড়ে (তুলা এই টান সূচিত করিবে)।



দণ্ডের সাম্যাবস্থার জন্য

$270+T=120+300$

বা, $T=420-270=150$ গ্রামভার

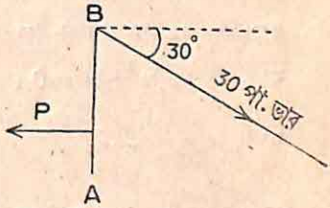
এখন A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া $300.AC+120\times50=T\times100$

বা, $3AC+60=T$

বা, $3AC=150-60=90$; $AC=30$ সে. মি.।

উদা. 25. 20 ফুট দীর্ঘ একটি দণ্ডের একপ্রান্ত অনুভূমিক সমতলে স্থাপিত, অপর প্রান্তে অনুভূমিক তলের সহিত 30° নতিতে একটি দড়ি বাঁধিয়া টানা হইতেছে এবং দড়ির টান 30 পা. ভার ; ভূমি হইতে 4 ফুট উচ্চে কি অনুভূমিক বল প্রয়োগ করিলে দণ্ডটি উল্লম্ব অবস্থায় থাকিবে ? [U. P. 1955]

AB দণ্ড উল্লম্বভাবে আছে। A প্রান্ত ভূমিতে এবং B প্রান্তে 30 পা. ভার বল প্রযুক্ত হইয়াছে।



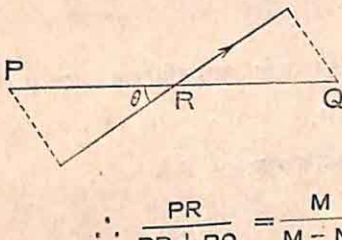
ধর, নির্ণেয় অনুভূমিক বল P। ভূমিতে রক্ষিত প্রান্তের চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$P\times 4=30\cos 30^\circ\times 20=30\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 20$$

$$P=\frac{30\times\sqrt{3}\times 20}{2\times 4}=75\sqrt{3} \text{ পা. ভার।}$$

উদা. 26. একটি বলের ক্রিয়া রেখা P এবং Q বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করে। যদি P এবং Q বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক $+M$ এবং $-N$ হয় তাহা হইলে $\frac{PR}{PQ}$ অনুপাত নির্ণয় কর। [H. S. 1960]

ধর, বলের ক্রিয়া রেখা PQ-র সঙ্গে θ কোণ করে, বলের মান F, তাহা হইলে,



$$F\times PR\sin\theta=M$$

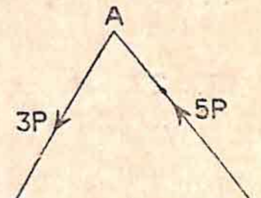
$$F\times RQ\sin\theta=-N$$

$$\therefore\ \frac{PR}{RQ}=\frac{M}{-N}.$$

$$\therefore\ \frac{PR}{PR+RQ}=\frac{M}{M-N};\quad \text{বা,}\quad \frac{PR}{PQ}=\frac{M}{M-N}.$$

উদা. 27. একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC-র $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CA}$ বাহু বরাবর 3P, 7P এবং 5P বল ক্রিয়া করে। লব্ধির মান, দিক্ এবং ক্রিয়া রেখা নির্ণয় কর। [Benaras 1945]

মনে কর, লব্ধি R, BC বাহুকে B হইতে x দূরে ছেদ করে এবং BC-র সহিত θ কোণ করে।



BC এবং BC-র লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ কর।

$$R\cos\theta=7P-5P\cos 60^\circ+3P\cos 60^\circ$$

$$=7P-8P\cos 60^\circ=7P-4P=3P \cdots \text{(i)}$$

$$R\sin\theta=0+5P\sin 60^\circ-3P\sin 60^\circ$$

$=2P \sin 60^\circ = 2P\frac{\sqrt{3}}{2} = P\sqrt{3} \ldots$(ii)

বর্গ করিয়া যোগ করিলে, $R=\sqrt{9P^2+3P^2}=\sqrt{12P^2}=2\sqrt{3}P$

(ii)-কে (i) দিয়া ভাগ করিলে $\tan\theta=\frac{P\sqrt{3}}{3P}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad\therefore\quad \theta=30^\circ$

এখন লব্ধি BC-কে যে বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহার চারিদিকে ভ্রামক লইলে,

$5P(a-x)\sin 60^\circ + 3Px \sin 60^\circ = 0$ [ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য a]

বা, $5(a-x)+3x=0$; বা, $5a-5x+3x=0$; বা, $2x=5a$.

বা, $x=\frac{5a}{2}$.

অতএব লব্ধির মান $2\sqrt{3}P$, ইহা BC-র সঙ্গে 30° কোণ করে এবং বর্ধিত BC-কে B হইতে $\frac{5}{2}a$ দূরে ছেদ করে।

[লক্ষ্য কর, আমরা প্রশ্ন সমাধানের সময় $x<a$ লইয়াছি কিন্তু সমাধান করিয়া x-এর প্রকৃত মান পাইয়াছি।]

উদা. 28. একটি স্তম্ভের তলদেশ হইতে কত উঁচুতে একটি প্রদত্ত দৈর্ঘ্যের দড়ির একপ্রান্ত বাঁধিয়া মাটিতে দাঁড়াইয়া একজন লোক প্রদত্ত বলে টানিলে স্তম্ভটি উল্টাইবার সম্ভাবনা সর্বাধিক ?

মনে কর, h উচ্চতায় দড়িটি বাঁধিতে হইবে, এবং দড়ি অনুভূমিকের সঙ্গে θ কোণ করে। ধর, দড়ির প্রদত্ত দৈর্ঘ্য l এবং প্রদত্ত বল P.

এখন, স্তম্ভের পাদবিন্দুর চারিদিকে P বলের ভ্রামক $=P\cos\theta\, h$

$=P\cos\theta,\, l\sin\theta=\frac{Pl}{2}\sin 2\theta.$

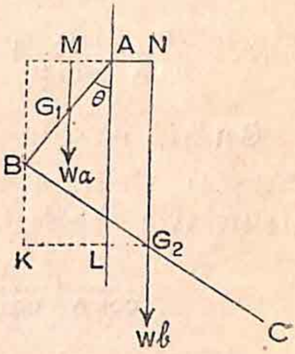
ভ্রামক সর্বাধিক হইলে উল্টাইবার সম্ভাবনা সর্বাধিক যখন $\sin 2\theta$ সর্বাধিক অর্থাৎ 1, তখন ভ্রামক সর্বাধিক এবং তখন $2\theta=90^\circ$, $\theta=45^\circ$

$\therefore\quad h=l\sin 45^\circ=\frac{l}{\sqrt{2}}=\frac{l\sqrt{2}}{2}.$

উদা. 29. AB এবং BC দুইটি সমভার দণ্ড ; ইহাদের দৈর্ঘ্য a এবং b, ভার যথাক্রমে Wa এবং Wb। ইহারা দৃঢ়ভাবে B বিন্দুতে এমনভাবে যুক্ত যেন ABC কোণ সমকোণ। যদি সমস্ত বস্তুটি A বিন্দু হইতে ঝুলান হয়, প্রমাণ কর যে AB উল্লম্বের সঙ্গে $\tan^{-1}\frac{b^2}{a^2+2ab}$ কোণ করে।

AB দণ্ডের ভার Wa ইহার ভারকেন্দ্র G_1 বিন্দুতে ক্রিয়া করে। BC দণ্ডের ভার Wb ইহার ভার-কেন্দ্র G_2 বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

সাম্যাবস্থার জন্য A বিন্দুর চারিদিকে Wa ভারের ভ্রামক Wb ভারের সমান ও বিপরীতমুখী।



$\therefore \quad Wa.AM = Wb.AN \ldots\ldots (i)$

এখন $AN = G_2L = \frac{a}{2}\cos\theta - a\sin\theta$

$\therefore \quad (i)$ হইতে

$$Wa.\frac{a}{2}\sin\theta$$

$$= Wb\left(\frac{b}{2}\cos\theta - a\sin\theta\right)$$

বা, $\left(\frac{a^2}{2}+ab\right)\sin\theta = \frac{b^2}{2}\cos\theta$; বা, $\tan\theta = \frac{b^2}{a^2+2ab}$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\frac{b^2}{a^2+2ab}.$$

উদা. 30. P, Q, R তিনটি বল ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত $\vec{BC}, \vec{CA}, \vec{AB}$ বাহু বরাবর ক্রিয়া করে, এবং ইহাদের লব্ধি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়। দেখাও যে

(i) $\frac{P}{a}+\frac{Q}{b}+\frac{R}{c}=0$ ... ... [Utkal U. 1948]

(ii) $\frac{P}{\sin A}+\frac{Q}{\sin B}+\frac{R}{\sin C}=0$

ধর, G ভরকেন্দ্র এবং G হইতে BC, BA, AB বাহুর উপর লম্ব GD, GE এবং GF. A, B, C বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব যথাক্রমে $p, q, r\cdots$

$GD = \frac{p}{3}$, $GE = \frac{q}{3}$, $GF = \frac{r}{3}$, $ap = 2\Delta \quad \therefore \quad p = \frac{2\Delta}{a}$

(Δ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল)

অনুরূপে, $q = \frac{2\Delta}{b}, r = \frac{2\Delta}{c}$

যেহেতু লব্ধি ভরকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়, অতএব, ভরকেন্দ্রের চারিদিকে প্রদত্ত বল তিনটির ভ্রামকের সমষ্টি = 0.

অর্থাৎ, $\frac{Pp}{3}+\frac{Qq}{3}+\frac{Rr}{3}=0$

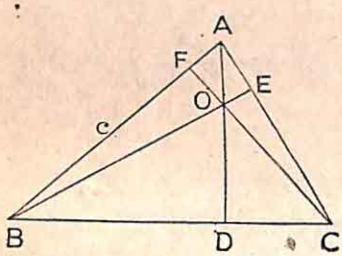
অর্থাৎ, $p\times\frac{2}{3}\cdot\frac{\Delta}{a}+Q\times\frac{2}{3}\cdot\frac{\Delta}{b}+R\times\frac{2}{3}\cdot\frac{\Delta}{c}=0$

অর্থাৎ (i) $\frac{P}{a}+\frac{Q}{b}+\frac{R}{c}=0$ (ii) কিন্তু $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

$$\therefore \frac{P}{\sin A}+\frac{Q}{\sin B}+\frac{R}{\sin C}=0.$$

উদা. 31. P, Q, R তিনটি বল ABC ত্রিভুজের $\vec{BC}$, $\vec{CA}$, $\vec{AB}$ বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। যদি ইহাদের লব্ধি ত্রিভুজের লম্ববিন্দুর (ortho-centre) ভিতর দিয়া যায় তাহা হইলে প্রমাণ কর যে

$$\frac{P}{\cos A}+\frac{Q}{\cos B}+\frac{R}{\cos C}=0$$



ধর, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O এবং OD OE, OF যথাক্রমে BC, CA এবং AB বাহুর উপর লম্ব।

যেহেতু P, Q, R বলের লব্ধি লম্ববিন্দুর ভিতর দিয়া যায়, অতএব লম্ববিন্দুর চারিদিকে বল তিনটির ভ্রামকের সমষ্টি=0.

অর্থাৎ $P.OD+Q.OE+R.OF=0$ ... (i)

এখন, $OD=BD\tan(90°-C)=c\cos B\cot C$

$=\frac{c}{\sin C}\cos B\cos C=2R'\cos B\cos C$ [R'=পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ]

অনুরূপে $OE=2R'\cos C\cos A$ এবং $OF=2R'\cos A\cos B$;এখন (i) হইতে

$P.2R'\cos B\cos C+Q.2R'\cos C\cos A+R.2R'\cos A\cos B=0.$

$2R'\cos A\cos B\cos C$ দিয়া ভাগ করিলে

$$\frac{P}{\cos A}+\frac{Q}{\cos B}+\frac{R}{\cos C}=0$$

উদা. 32. P, Q এবং R বল ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত $\vec{BC}$, $\vec{CA}$ এবং $\vec{AB}$ বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। যদি ইহাদের লব্ধি অন্তঃকেন্দ্র (in-centre) এবং পরিকেন্দ্রের (circum-centre) ভিতর দিয়া যায়, তবে দেখাও যে

$$\frac{P}{\cos B-\cos C}=\frac{Q}{\cos C-\cos A}=\frac{R}{\cos C-\cos B}$$

[ছবি নিজে আঁক]

অন্তঃকেন্দ্রের চারিদিকে ভ্রামক লইলে তিনটি বলের ভ্রামকের বীজগাণিতিক সমষ্টি $=0$

$Pr+Qr+Rr=0$ ($r=$ অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ) $\therefore\ P+Q+R=0 \ldots(i)$

পরিকেন্দ্র O হইতে BC, CA এবং AB বাহুর উপর লম্ব OL, OM, ON অঙ্কিত কর।

$OL=R'\cos A,\ OM=R'\cos B,\ ON=R'\cos C$ ($R'=$ পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ)

পরিকেন্দ্রের চারিদিকে তিনটি বলের ভ্রামকের বীজগাণিতিক সমষ্টি $=0$

$\therefore\ PR'\cos A+QR'\cos B+RR'\cos C=0$

অর্থাৎ $P\cos A+Q\cos B+R\cos C=0 \cdots(ii)$

(i) এবং (ii) হইতে (বজ্রগুণন প্রাণালীর দ্বারা)

$$\frac{P}{\cos B-\cos C}=\frac{Q}{\cos C-\cos A}=\frac{R}{\cos A-\cos B}$$

উদা. 33. P, Q, R তিনটি বল ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}$ বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। যদি ইহাদের লব্ধি অন্তঃকেন্দ্র এবং ভরকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়, প্রমাণ কর যে

$$\frac{P}{a(b-c)}=\frac{Q}{b(c-a)}=\frac{R}{c(a-b)}$$

যেহেতু লব্ধি বল অন্তঃকেন্দ্র এবং ভরকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়, অতএব এই দুই বিন্দুর প্রত্যেকের চারিদিকে লব্ধির ভ্রামক 'শূন্য'। সুতরাং এই দুই বিন্দুর প্রত্যেকের চারিদিকে ভ্রামক লইলে ক্রিয়মাণ বল তিনটির ভ্রামকের বীজগাণিতিক সমষ্টি শূন্য হইবে।

অন্তঃকেন্দ্রের চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$Pr+Qr+Rr=0$ ($r=$ অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

$\therefore\ P+Q+R=0 \quad \cdots \quad (i)$

আবার ভরকেন্দ্রের চারিদিকে ভ্রামক লইলে (29 নং উদাহরণের অনুরূপে)

$$\frac{P}{a}+\frac{Q}{b}+\frac{R}{c}=0 \quad \cdots \quad (ii)$$

(i) এবং (ii) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীর দ্বারা

$$\frac{P}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}=\frac{Q}{\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}=\frac{R}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}};\ \text{বা,}\quad \frac{Pbc}{b-c}=\frac{Qca}{c-a}=\frac{Rab}{a-b}$$

abc দ্বারা ভাগ করিয়া, $\dfrac{P}{a(b-c)}=\dfrac{Q}{b(c-a)}=\dfrac{R}{c(a-b)}$

উদা. 34. তিনটি বল ABC ত্রিভুজের যথাক্রমে গৃহীত তিনটি বাহু $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ এবং $\overrightarrow{AB}$ বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। তাহাদের লব্ধি ত্রিভুজের লম্ববিন্দু এবং ভারকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়। দেখাও যে বলগুলি নিম্ন অনুপাতে আছে

$$\sin 2A \sin (B-C) : \sin 2B \sin (C-A) : \sin 2C \sin (A-B).$$

যেহেতু লব্ধি লম্ববিন্দু এবং ভারকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়. অতএব এই দুই বিন্দুর প্রত্যেকের চারিদিকে লব্ধির ভ্রামক 'শূন্য'। সুতরাং এই উভয় বিন্দুর প্রত্যেকের চারিদিকে প্রদত্ত বল তিনটির ভ্রামকের বীজগাণিতিক সমষ্টি-'শূন্য' হইবে।

মনে কর $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ এবং $\overrightarrow{AB}$ বরাবর তিনটি বল P, Q এবং R.

লম্ববিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া (30 নং উদাহরণের ন্যায়)

$$\frac{P}{\cos A}+\frac{Q}{\cos B}+\frac{R}{\cos C}=0 \quad .... \quad \text{(i)}$$

আবার ভারকেন্দ্রের চারিদিকে ভ্রামক লইয়া (29 নং উদাহরণের ন্যায়)

$$\frac{P}{\sin A}+\frac{Q}{\sin B}+\frac{R}{\sin C}=0 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীর দ্বারা

$$\frac{P}{\dfrac{1}{\cos B\sin C}-\dfrac{1}{\cos C\sin B}}=\frac{Q}{\dfrac{1}{\cos C\sin B}-\dfrac{1}{\cos A\sin C}}$$

$$=\frac{R}{\dfrac{1}{\cos A\sin B}\quad\dfrac{1}{\cos B\sin A}}$$

বা, $$\frac{P\sin B\cos B\sin C\cos C}{\sin(B-C)}=\frac{Q\sin C\cos C\sin A\cos A}{\sin(C-A)}$$

$$=\frac{R\sin A\cos A\sin B\cos B}{\sin(A-B)}$$

বা, $$\frac{P\sin 2B\sin 2C}{\sin(B-C)}=\frac{Q\sin 2C\sin 2A}{\sin(C-A)}=\frac{R\sin 2A\sin 2B}{\sin(A-B)}.$$

প্রত্যেককে $\sin 2A \sin 2B \sin 2C$ দ্বারা ভাগ করিয়া

$$\frac{P}{\sin 2A\sin(B-C)}=\frac{Q}{\sin 2B\sin(C-A)}=\frac{R}{\sin 2C\sin(A-B)}$$

উদা. 35. P, Q, R বল ABC ত্রিভুজের $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। যদি তাহাদের লব্ধির ক্রিয়া রেখা লম্ববিন্দু এবং পরিকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়, দেখাও যে

$$\frac{P}{(b^2-c^2)\cos A}=\frac{Q}{(c^2-a^2)\cos B}=\frac{R}{(a^2-b^2)\cos C}.$$

যেহেতু লব্ধি লম্ববিন্দুর ভিতর দিয়া যায়, লম্ববিন্দুর চারিদিকে বল তিনটির ভ্রামকের বীজগাণিতিক সমষ্টি = 0

$$\frac{P}{\cos A}+\frac{Q}{\cos B}+\frac{R}{\cos C}=0 \quad \cdots \quad (i)$$ (উদা. 31. এর ন্যায়)

আবার লব্ধি পরিকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায় বলিয়া, পরিকেন্দ্রের চারিদিকে ভ্রামক লইলে ভ্রামক সমূহের বীজগাণিতিক সমষ্টি = 0

$$P \cos A+Q \cos B+R \cos C=0 \quad \ldots . \quad (ii)$$ (উদা. 32 এর ন্যায়)

(i) এবং (ii) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীর দ্বারা

$$\frac{P}{\frac{\cos C}{\cos B}-\frac{\cos B}{\cos C}}=\frac{Q}{\frac{\cos A}{\cos C}-\frac{\cos C}{\cos A}}=\frac{R}{\frac{\cos B}{\cos A}-\frac{\cos A}{\cos B}}$$

বা, $$\frac{P \cos B \cos C}{\cos^2 C-\cos^2 B}=\frac{Q \cos C \cos A}{\cos^2 A-\cos^2 C}=\frac{R \cos A \cos B}{\cos^2 B-\cos^2 A}$$

বা, $$\frac{P \cos B \cos C}{\sin^2 B-\sin^2 C}=\frac{Q \cos C \cos A}{\sin^2 C-\sin^2 A}=\frac{R \cos A \cos B}{\sin^2 A-\sin^2 B}$$

বা, $$\frac{P \cos B \cos C}{b^2-c^2}=\frac{Q \cos C \cos A}{c^2-a^2}=\frac{R \cos A \cos B}{a^2-b^2}$$

$$\left[\because \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}\right]$$

$\cos A \cos B \cos C$ দিয়া প্রত্যেককে ভাগ করিয়া,

$$\frac{P}{(b^2-c^2)\cos A}=\frac{Q}{(c^2-a^2)\cos B}=\frac{R}{(a^2-b^2).\cos C}$$

উদা. 36. P, Q, R বল তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC-র BC, CA, AB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। যদি তাহাদের লব্ধি ভরকেন্দ্রের ভিতর দিয়া BC বাহুর সমান্তরাল হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $Q=R=\frac{1}{2}P$.

BC-র লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিলে লব্ধির ক্রিয়া রেখা BC-র সমান্তরাল বলিয়া

$$-Q \sin 60^\circ+R \sin 60^\circ=0. \quad \therefore \quad Q=R$$

লব্ধি ভরকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায় বলিয়া, ভরকেন্দ্রের চারিদিকে বল তিনটির ভ্রামকের বীজগাণিতিক সমষ্টি = 0

ভরকেন্দ্র G হইতে প্রত্যেক বাহুর দূরত্ব সমান, ধর d

$\therefore \quad P.d-Q.d-R.d=0 \qquad P=Q+R=2R$

$\therefore \quad R=\frac{P}{2}. \qquad \therefore \quad Q=R=\frac{1}{2}P.$

উদা. 37. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ ; BC, CA, AB বাহু যথাক্রমে 13, 12 এবং 5 একক দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট। A, B, C বিন্দুর চারিদিকে একটি বল F-এর ভ্রামক যথাক্রমে 0, 25 144 ভ্রামক-একক। F-এর মান, দিক এবং ক্রিয়া-রেখা নির্ণয় কর।

যেহেতু A বিন্দুর চারিদিকে বলের ভ্রামক 0 এবং $F \neq 0$

অতএব বলটি A বিন্দুর ভিতর দিয়া যায়।

এখন, মনে কর, F বলের বিশ্লেষিতাংশ AB ও AC বরাবর X এবং Y.

B বিন্দুর চারিদিকে F এর ভ্রামক $= -5Y$. $\therefore \; -5Y = 25, \; Y = -5$

C বিন্দুর চারিদিকে F এর ভ্রামক (= X এবং Y এর ভ্রামক) $= 12X$

$\therefore \; 12X = 144, \; X = 12$

$F^2 = X^2 + Y^2 = 12^2 + 5^2 \quad \therefore \; F = 13$ একক

ধর, F বল AB-র সঙ্গে θ কোণ করে, তাহা হইলে

$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{-5}{12}.$$

F এর ক্রিয়ারেখা A বিন্দুর ভিতর দিয়া AB-র সঙ্গে C-এর সমান কোণ করে। ইহা ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের স্পর্শকের দিকে।

উদা. 38. OX এবং OY পরস্পর লম্বাভিমুখী দুইটি সরলরেখা এবং একটি বল তাহাদের সমতলে O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। (x, y) এবং (x', y') দুইটি বিন্দুর চারিদিকের বলের ভ্রামক G এবং G'। যদি $(xy' - x'y)$ শূন্য না হয় তাহা হইলে বলের মান R এবং ইহা OX-এর সঙ্গে যে কোণ θ করে তাহাদের মানের জন্য

$$R^2 = \frac{(xG' - x'G)^2 + (yG' - y'G)^2}{(xy' - x'y)^2}\,; \quad \tan\theta = \frac{yG' - y'G}{xG' - x'G}.$$

R-এর ভ্রামক $=$ R $\cos\theta$-র ভ্রামক $+$ R $\sin\theta$-র ভ্রামক

$\therefore \; G = y.R\cos\theta - x.R\sin\theta\,; \; x'G = x'y\,R\cos\theta - xx'\,R\sin\theta$

$G' = y'\,R\cos\theta - x'\,R\sin\theta\,; \; xG' = xy'\,R\cos\theta - xx'\,R\sin\theta$

$$\frac{xG' - x'G}{xy' - x'y} = R\cos\theta \ldots\ldots \text{(i)}$$

$Gy' = yy'\,R\cos\theta - xy'\,R\sin\theta\,; \; G'y = yy'\,R\cos\theta - x'y\,R\sin\theta$

$$\frac{yG' - y'G}{xy' - x'y} = R\sin\theta \cdots \text{(ii)}$$

(i) এবং (ii) এর বর্গ করিয়া যোগ করিলে

$$R^2 = \frac{(xG' - x'G)^2 + (yG' - y'G)^2}{(xy' - x'y)^2}$$

(ii) কে (i) দিয়া ভাগ করিয়া, $\tan\theta = \dfrac{y\mathrm{G}' - y'\mathrm{G}}{x\mathrm{G}' + x'\mathrm{G}}$.

প্রশ্নমালা—V

1. 20 ফুট লম্বা একটা শক্ত দড়ির এক প্রান্ত মাটির উপর খাড়া করা এক উল্লম্ব টেলিগ্রাফের থামের সঙ্গে বাঁধা হইয়াছে এবং একজন লোক অন্য প্রান্তে প্রদত্ত বল প্রয়োগে টানিতেছে। থামের কোন্ বিন্দুতে দড়ি বাঁধিলে লোকটি থামটিকে উল্টাইতে সর্বাধিক সক্ষম হইবে? [C. U. 1944]

2. 3 মিটার দীর্ঘ এবং 10 কিলোগ্রাম ভারের একটি সমদণ্ড দুইপ্রান্তে দুইটি খুঁটির উপর রক্ষিত হইয়াছে। একপ্রান্ত হইতে 120 সে. মি. দূরে দণ্ডের উপর 40 কিলোগ্রাম ভার প্রযুক্ত হইয়াছে। খুঁটি দুইটির উপর চাপ নির্ণয় কর।

3. একটি 16 ফুট দীর্ঘ 24 পা. ভারের সমদণ্ডের দুইপ্রান্তে 12 এবং 4 পা. ভার প্রযুক্ত হইয়াছে। 4 পা. ভার যে প্রান্তে আছে তাহা হইতে 6 ফুট দূরে 8 পা. ভার প্রযুক্ত হইয়াছে। দণ্ডটি 10 ফুট ব্যবধানে দুইটি খুঁটির উপর স্থাপিত হইয়াছে এবং একটি খুঁটি হইতে 4 পা. ভার প্রযুক্ত প্রান্ত 2 ফুট বাহিরে আছে। খুঁটি দুইটির উপর চাপ নির্ণয় কর।

4. একটি ভারহীন 2 ফুট দীর্ঘ দণ্ড ABCD-এর মধ্যবিন্দুতে 15 পাউণ্ড ভার বল উল্লম্ব নিম্নাভিমুখে প্রয়োগ করা হইয়াছে। দণ্ডটি 10 ইঞ্চি ব্যবধানে স্থিত দুইটি খুঁটি B এবং C-এর উপর রক্ষিত হইয়াছে এবং B-র উপর চাপ C-এর উপর চাপের চতুর্গুণ। দণ্ডটি না উল্টাইয়া সর্বাধিক কত বল D বিন্দুতে উল্লম্ব নিম্নাভিমুখে প্রয়োগ করিতে পারা যাইবে?

5. তিনটি বল P, 2P, 3P যথাক্রমে একটি প্রদত্ত সমবাহু ত্রিভুজের AB, BC, CA বাহু বরাবর ক্রিয়া করে, তাহাদের লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয় কর এবং ইহার ক্রিয়া রেখার সহিত BC বাহুর ছেদ-বিন্দু নির্ণয় কর। [C. U. 1953]

6. AB সমদণ্ডের ভার 10 পাউণ্ড এবং দৈর্ঘ্য 6 ফুট। যদি 2 পাউণ্ডের একটি ভার A-তে এবং 4 পাউণ্ডের একটি ভার B হইতে 1 ফুট দূরে D-তে রাখা হয় তাহা হইলে কোন্ বিন্দুতে বল প্রয়োগ করিলে দণ্ডটি স্থিরাবস্থায় থাকিবে? [H.S. 1961]

7. ABCD একটি আয়তক্ষেত্র; ইহার BC বাহু 4 ফুট; 30, 40 এবং 50 পাউণ্ডের তিনটি বল যথাক্রমে $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{CD}$ বাহুতে ক্রিয়া করে। ইহাদের

লব্ধির মান, BC রেখার সহিত কত কোণে এবং B হইতে কতদূরে BC রেখাকে ছেদ করে নির্ণয় কর। [H.S. 1964]

8. 10 কিগ্রা ভারী একটি সমদণ্ড এক প্রান্তে মসৃণ কব্জার সাহায্যে আটকান আছে। অন্য প্রান্তে প্রযুক্ত একটি অনুভূমিক বল P উল্লম্ব রেখার সহিত 45° কোণে হেলাইয়া দণ্ডটিকে স্থির রাখিয়াছে। P-এর মান নির্ণয় কর।

9. 50 পাউণ্ড ভারের 12 ফুট দীর্ঘ AB সমদণ্ড A-তে এবং B হইতে 2 ফুট দূরে দুইটি কীলকের উপর রক্ষিত আছে। A হইতে যথাক্রমে 2 ফুট, 4 ফুট এবং 8 ফুট দূরে 4, 5, 10 পাউণ্ডের ভার সমূহ বাধিয়া দেওয়া হইয়াছে। কীলক দুইটির উপর চাপ নির্ণয় কর।

10. একটি বলের ক্রিয়া রেখা, P এবং Q বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করে। যদি P এবং Q বিন্দুর চারিদিকে ঐ বলের ভ্রামক যথাক্রমে $+M$ এবং $-N$ হয় তাহা হইলে $\frac{PR}{PQ}$ এর অনুপাত নির্ণয় কর।

11. একটি 12 ফুট দীর্ঘ 20 পা. ভারের সমদণ্ডের দুই প্রান্তে 12 পা. এবং 4 পা. ভার যুক্ত হইয়াছে। 4 পা. ভার যে প্রান্ত আছে তাহা হইতে 4 ফুট দূরে আরও 8 পা. ভার প্রযুক্ত হইয়াছে। দণ্ডটি 8 ফুট ব্যবধানে স্থিত দুইটি কীলকের উপর স্থাপিত আছে এবং একটি কীলক হইতে 4 পা. ভার প্রযুক্ত প্রান্ত 1 ফুট বাহিরে আছে। কীলক-সমূহের উপর চাপ নির্ণয় কর।

12. 20 পাউণ্ড ভারের 10 ফুট দীর্ঘ একটি সমদণ্ডের দুই প্রান্ত দুইটি কীলকের উপর অবস্থিত। এক প্রান্ত হইতে 4 ফুট দূরত্বে 80 পাউণ্ড একটি ভার রাখা হইল। কীলকগুলির উপর চাপ নির্ণয় কর। [H. S. 1968]

13. 6 ফুট দীর্ঘ AB সমদণ্ড বিনা বাধায় A-তে একটি কব্জার চারিদিকে ঘুরিতে পারে; A হইতে 15 ইঞ্চি দূরে E বিন্দুতে একটি দড়ির একপ্রান্ত বাঁধিয়া ইহাকে অনুভূমিক অবস্থায় রাখা হইয়াছে। দড়ির অপরপ্রান্ত A-র খাড়া উপরে C বিন্দুতে আবদ্ধ। যদি দণ্ডের ভার 40 পাউণ্ড এবং দড়ির টান 120 পাউণ্ড ভার হয়, তাহা হইলে দেখাও যে দড়ির দৈর্ঘ্য 25 ইঞ্চি।

14. সাম্যাবস্থায় আছে এরূপ চারিটি বলের একটি সম্পূর্ণরূপে প্রদত্ত, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বলের (যাহারা সমান্তরাল নয়) ক্রিয়ারেখা এবং চতুর্থ বলটির কেবলমাত্র পরিমাপ জানা আছে। প্রমাণ কর যে চতুর্থ বলটির ক্রিয়ারেখা একটি বৃত্তকে স্পর্শ করে। [C. U. 1934]

15. ABC সমকোণী ত্রিভুজের BC, CA এবং AB বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 13, 12 ও 5 একক। একটি বল F-এর A, B ও C বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক সমূহ যথাক্রমে—(i) 0, 25 এবং 144 একক; (ii) 0, −25 এবং 144 একক।

F বলটির পরিমাপ, দিক এবং ক্রিয়া রেখা নির্ণয় কর।

16. P, Q এবং R বল ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে $\vec{BC}$, $\vec{CA}$ ও $\vec{AB}$ বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে, যদি উহাদের লব্ধি বল

(i) ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়, তবে

$$\frac{P}{\sin A}+\frac{Q}{\sin B}+\frac{R}{\sin C}=0$$

(ii) ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দুর ভিতর দিয়া যায়, তবে

$$\frac{P}{\cos A}+\frac{Q}{\cos B}+\frac{R}{\cos C}=0$$

(iii) ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু উভয়েরই ভিতর দিয়া যায়, তবে

$$\frac{P}{\sin 2A \sin (B-C)}=\frac{Q}{\sin 2B \sin (C-A)}=\frac{R}{\sin 2C \sin (A-B)}$$

(iv) ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র দিয়া যায়, তবে

$$P \cos A+Q \cos B+R \cos C=0.$$

৬

যুগ্মবল

(Couple)

প্রয়োজনীয় জ্ঞাতব্য বিষয় ঃ

(i) **যুগ্মবলের ভ্রামক ঃ** কোন একটি যুগ্ম বল (P, p)-র একটি বল P ও উহার বাহুর দৈর্ঘ্য p-র গুণফলকে (P × p) যুগ্মবলটির ভ্রামক বলা হয়।

(ii) একটি যুগ্মবল কোন একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করিয়া ঐ বস্তুকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বা ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরাইলে, ঐ যুগ্মবলের ভ্রামকের মান যথাক্রমে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে।

(iii) একটি বল F এবং একটি যুগ্ম বল (P, p)-এর লব্ধি একটি বল F ; লব্ধি বলটি প্রদত্ত বলের সমান্তরাল এবং প্রদত্ত বলের ক্রিয়ারেখা হইতে $\frac{Pp}{F}$ দূরে।

উদাহরণমালা—VI

উদা. 1. ABCD একটি বর্গক্ষেত্র, ইহার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 5 ফুট। $\vec{AB}$ এবং $\vec{CD}$ বাহু বরাবর 4 পাউণ্ড-ভার দুইটি বল এবং $\vec{AD}$ ও $\vec{CB}$ বাহু বরাবর 6 পাউণ্ড-ভার দুইটি বল ক্রিয়া করে, যে যুগ্ম বল ইহাদিগকে সাম্যাবস্থায় রাখিতে পারে তাহার ভ্রামক নির্ণয় কর।

এখানে (4 পা., 4 পা.) এবং (6 পা., 6 পা.) দুইটি যুগ্ম বল ক্রিয়া করিতেছে। ইহাদের লব্ধি একটি যুগ্মবল এবং তাহার ভ্রামক

= যুগ্মবল দুইটির ভ্রামকের সমষ্টি

$= 4 \times 5 - 6 \times 5 = 20 - 30 = -10$ একক

এখন দুইটি সমান ও বিপরীত যুগ্মবল বস্তুকে সাম্যাবস্থায় রাখে -

∴ যে যুগ্ম বল সাম্যাবস্থায় রাখিবে তাহার ভ্রামক $+10$ একক।

উদা. 2. 6, 8, 6 পাউণ্ড-ভার বল একটি আয়তক্ষেত্রের $\vec{AB}$, $\vec{CB}$ এবং $\vec{CD}$ বাহু বরাবর ক্রিয়া করে ; AB এবং BC বাহু 3 এবং 4 ফুট দীর্ঘ। আর একটি 8 পা. ভার বল কিরূপে ক্রিয়া করিলে চারিটি বল সাম্যাবস্থায় থাকিবে ?

$\overrightarrow{AB}$ বরাবর 6 পা. ভার এবং $\overrightarrow{CD}$ বরাবর 6 পা. ভার একটি যুগ্মবল।

ইহার ভ্রামক $6\times 4=24$ একক।

আর একটি যুগ্ম বলের ভ্রামক -24 একক হইলে বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

$\overrightarrow{AD}$ বাহু বরাবর 8 পা. ভার লইলে CB বরাবর 8 পাউণ্ডের সহিত যে যুগ্মবল হয় তাহার ভ্রামক $-8\times 3=-24$ হয়।

$\therefore$ $\overrightarrow{AD}$ বাহু বরাবর 8 পা. ভার লইলে চারিটি বল সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

উদা. 3. 1, 2, 3, 4 এবং $2\sqrt{2}$ মানের বল একটি বর্গক্ষেত্রের $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ বাহু এবং $\overrightarrow{AC}$ কর্ণ বরাবর প্রয়োগ করা হইয়াছে। দেখাও যে এই বলসমূহ একটি যুগ্মবলের সমান এবং ইহার ভ্রামক নির্ণয় কর।

ধর বর্গক্ষেত্রের বাহু a.

$\overrightarrow{AC}$ বরাবর ক্রিয়মাণ $2\sqrt{2}$ পা. ভারকে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ বরাবর বিশ্লেষণ করিলে $\overrightarrow{AB}$ বরাবর 2 পা. ভার এবং $\overrightarrow{AD}$ বরাবর 2 পা. ভার বল পাওয়া যায়।

এখন $\overrightarrow{AB}$ বরাবর $1+2$ বা 3 পা. ভার এবং $\overrightarrow{CD}$ বরাবর 3 পাউণ্ড ভার একটি যুগ্মবল হয়।

আবার, $\overrightarrow{BC}$ বরাবর 2 পা. ভার এবং $\overrightarrow{DA}$ বরাবর $(4-2)$ বা 2 পা. ভার একটি যুগ্মবল হয়।

এই দুই যুগ্মবল একটি যুগ্মবলের সমান এবং ইহার ভ্রামক $=3a+2a=5a$.

উদা. 4. 3, 5, 3, 5 পাউণ্ড-ভার বল ABCD রম্বসের $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ এবং $\overrightarrow{DA}$ বাহু বরাবর প্রযুক্ত হইয়াছে। রম্বসের প্রত্যেক বাহু 5 ফুট দীর্ঘ এবং A কোণ 60°। লব্ধি যুগ্মবলের ভ্রামক নির্ণয় কর।

$\overrightarrow{AB}$ বরাবর 3 পা. ভার এবং $\overrightarrow{CD}$ বরাবর 3 পা. ভার একটি যুগ্মবল, $\overrightarrow{BC}$ বরাবর 5 পা. ভার এবং $\overrightarrow{DA}$ বরাবর 5 পা. ভার আর একটি যুগ্মবল।

দুইটি যুগ্ম বলের বাহু সমান এবং প্রত্যেকে $5\sin 60^\circ=5\times\frac{\sqrt{3}}{2}$। লব্ধি যুগ্মবলের ভ্রামক $=$ যুগ্ম বল দুইটির ভ্রামকের সমষ্টি।

$$=3\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}+5\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=8\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{3} \text{ ফুট পাউণ্ড।}$$

উদা. 5. দুই ফুট বাহু বিশিষ্ট একটি যুগ্মবলের প্রত্যেকের মান 6 পাউণ্ড-ভার ; একই সমতলে 10 পাউণ্ড ভার একটি বল ক্রিয়া করিতেছে। ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

যুগ্মবলের ভ্রামক $= 6 \times 2 = 12$ ফুট-পাউণ্ড।

প্রদত্ত যুগ্মবল এবং 10 পাউণ্ড ভার বলের লব্ধি একটি 10 পাউণ্ড ভার বল। ইহা প্রদত্ত বলের সমান্তরাল এবং প্রদত্ত বল হইতে $\frac{12}{10}$ বা 1·2 ফুট দূরে ক্রিয়া করে।

উদা. 6. AB একটি অনুভূমিকভাবে রক্ষিত ভারহীন দণ্ড, ইহার A বিন্দুতে উল্লম্ব উর্ধ্বদিকে 2 পাউণ্ড ভার এবং B বিন্দুতে উল্লম্ব নিম্নাভিমুখে 2 পাউণ্ড ভার বল প্রযুক্ত হইয়াছে। দণ্ডের সঙ্গে 30° কোণ করিয়া 8 পাউণ্ড ভারের একটি বল এক প্রদত্ত বিন্দুতে C-তে নিম্নদিকে প্রযুক্ত হইয়াছে। দণ্ডের কোন্ বিন্দুতে কি বল কোন দিকে প্রযুক্ত হইলে এই বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকিবে ?

প্রদত্ত যুগ্মবলের ভ্রামক $2 \times AB$ (ঋণাত্মক)

সমান ভ্রামকের ধনাত্মক যুগ্মবলের দ্বারা ইহা সাম্যাবস্থায় আসে। একটি বল 8 পা. ভার বলিয়া অপর বল 8 পা. ভারের এবং ইহা AB-কে C হইতে B-র দিকে ছেদ করিবে ; মনে কর ছেদবিন্দু D ; তাহা হইলে

$$8 \times CD \sin 30° = 2AB \;;\; \text{বা,}\;\; 8 \times CD \times \tfrac{1}{2} = 2AB$$

$$\therefore\; CD = \frac{4AB}{8} = \tfrac{1}{2}AB$$

উদা. 7. 1, 2, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ অনুপাতের বল একটি বর্গক্ষেত্রের $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ বাহু এবং $\vec{DB}$. $\vec{CA}$ কর্ণ বরাবর প্রযুক্ত হইয়াছে। দেখাও যে ইহারা একটি যুগ্মবলের সমান এবং এই যুগ্মবলের ভ্রামক নির্ণয় কর।

$\vec{DB}$ অভিমুখে $\sqrt{2}$ বল $=$ $\vec{DA}$ অভিমুখে 1 এবং $\vec{DC}$ অভিমুখে 1

$\vec{CA}$ অভিমুখে $\sqrt{2}$ বল $=$ $\vec{CB}$ অভিমুখে 1 এবং $\vec{CD}$ অভিমুখে 1

তাহা হইলে পাওয়া যায়।

$\vec{AB}$ অভিমুখে		1-এর অনুপাতে বল
$\vec{BC}$ অভিমুখে	$2-1 \;\; =1$	,, ,, ,,
$\vec{CD}$ অভিমুখে	$1-1+1=1$	,, ,, ,,
$\vec{DA}$ অভিমুখে	1	,, ,, ,,

এখন, $\overrightarrow{AB}$ অভিমুখে 1 এবং $\overrightarrow{CD}$ অভিমুখে 1 একটি যুগ্মবল। $\overrightarrow{BC}$ অভিমুখে 1 এবং $\overrightarrow{DA}$ অভিমুখে 1 একটি যুগ্মবল।

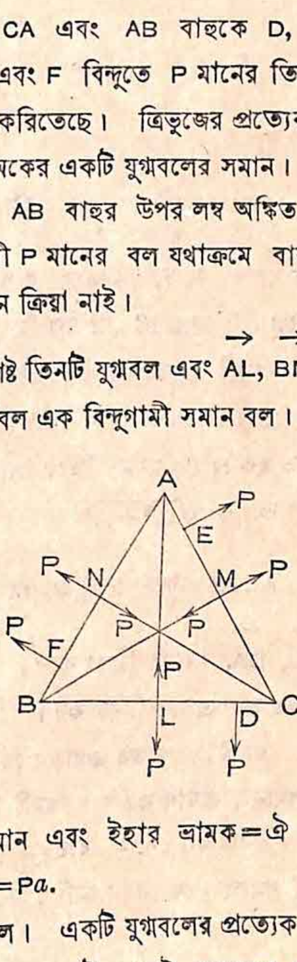
ধর, বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a.

এই দুইটি যুগ্মবল একটি যুগ্মবলের সমান এবং এই লব্ধি যুগ্মবলের ভ্রামক $=1\times a+1\times a=2a$.

উদা. 8. ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC, CA এবং AB বাহুকে D, E এবং F বিন্দু 5 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে। D, E এবং F বিন্দুতে P মানের তিনটি বল ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্বভাবে বহির্মুখে ক্রিয়া করিতেছে। ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a হইলে, দেখাও যে এই তিনটি বল Pa ভ্রামকের একটি যুগ্মবলের সমান।

AL, BM, CN যথাক্রমে BC, CA এবং AB বাহুর উপর লম্ব অঙ্কিত হইল। L, M এবং N বিন্দুতে 3 জোড়া সমান বিপরীতমুখী P মানের বল যথাক্রমে বাহুগুলির লম্বভাবে প্রযুক্ত হইল। বস্তুর উপর ইহাদের কোন ক্রিয়া নাই।

এখন আমরা LD, ME এবং NF বাহু বিশিষ্ট তিনটি যুগ্মবল এবং $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CN}$ বরাবর ক্রিয়াশীল তিনটি বল P পাই; এই তিনটি বল এক বিন্দুগামী সমান বল।



ইহারা ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বাভিমুখে এবং $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ বাহুর দ্বারা ইহাদের মান সূচিত হইতে পারে। অতএব (বলের ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে) এই তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকে।

$LD=BD-BL=\frac{5}{6}a-\frac{1}{2}a=\frac{1}{3}a$

অনুরূপে $ME=\frac{1}{3}a$ এবং $NF=\frac{1}{3}a$.

পূর্বোক্ত তিনটি যুগ্মবল একটি যুগ্মবলের সমান এবং ইহার ভ্রামক=ঐ তিনটি যুগ্মবলের ভ্রামকের সমষ্টি $=P.\frac{1}{3}a+P.\frac{1}{3}a+P.\frac{1}{3}a=Pa$.

উদা. 9. P এবং Q দুইটি সমান্তরাল বল। একটি যুগ্মবলের প্রত্যেক বল F এবং ইহার বাহু a. সমান্তরাল বল দুইটি এবং যুগ্মবলটি একই সমতলে আছে। দেখাও যে সম্মিলিত ক্রিয়ার ফলে P এবং Q-র লব্ধি $\frac{Fa}{P+Q}$ পরিমাণ দূরে সরিয়া যায়।

P এবং Q সদৃশ সমান্তরাল বল দুইটির লব্ধি $R=P+Q$ (P এবং Q-এর সমান্তরাল)। একটি যুগ্মবলের পরিবর্তে সমান ভ্রামকের যে-কোন যুগ্মবল নেওয়া

যায়। এমন একটি যুগ্মবল লও যেন ইহার একটি বল R-এর সমান ও বিপরীতমুখী হয়। এখন যদি নূতন যুগ্মবলের বাহু x হয় এবং $Rx = Fa$ হয়, তাহা হইলে প্রদত্ত যুগ্মবলের পরিবর্তে এই নূতন যুগ্মবল নেওয়া যায়। এখন যুগ্মবল (R, R) এবং লব্ধি R-এর মধ্যে সমান ও বিপরীতমুখী দুইটি R সাম্যাবস্থায় থাকে এবং x অর্থাৎ $\frac{Fa}{R}$ বা $\frac{Fa}{P+Q}$ দূরে $P+Q$ বল ইহাদের স্থলে পাওয়া গেল।

প্রশ্নমালা—VI

1. ABCD একটি বর্গক্ষেত্র, ইহার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 2 ফুট। $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ এবং $\overrightarrow{DA}$ বাহু বরাবর 1, 7, 24 এবং 4 পাউণ্ড-ভার বল ক্রিয়া করিতেছে এবং $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{DB}$ বরাবর $10\sqrt{2}$ এবং $13\sqrt{2}$ বল ক্রিয়া করে। ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

2. একটি যুগ্মবল G-এর গঠনকারী বল দুইটি A এবং B বিন্দুতে ক্রিয়া করে; যদি তাহাদের ক্রিয়াকে এক সমকোণ পরিমাণ ঘুরানো যায় তাহারা যে যুগ্মবল করে তাহার ভ্রামক H। যখন উভয়ে AB-র লম্বাভিমুখে ক্রিয়া করে দেখাও যে তখন যুগ্মবলের ভ্রামক $\sqrt{G^2+H^2}$.

3. ABCD একটি চতুর্ভুজ, প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a. P. Q, P, Q বলসমূহ $\overrightarrow{BA}$ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$, বাহুতে ক্রিয়া করে। যে যুগ্মবল এই বলগুলিকে সাম্যাবস্থায় আনিতে পারিবে তাহার ভ্রামক নির্ণয় কর।

4. একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুতে ক্রিয়মাণ তিনটি বল একটি যুগ্মবলের সমান; প্রমাণ কর বল তিনটি ত্রিভুজের বাহুর সমানুপাতিক।

5. একটি 40 সে.মি. বাহুযুক্ত যুগ্মবলের প্রত্যেকটি বল 5 কিগ্রা.। এই যুগ্মবল ও একই সমতলে যে কোন নির্দিষ্ট দিকে ক্রিয়াশীল 10 কিগ্রা. বলের লব্ধি নির্ণয় কর.

[H.S. 1969]

6. 1, 2, 3, 4, $2\sqrt{2}$ মানের বলসমূহ যথাক্রমে ABCD বর্গক্ষেত্রের বাহু $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ এবং কর্ণ $\overrightarrow{AC}$ বরাবর ক্রিয়া করে। প্রমাণ কর যে তাহাদের লব্ধি একটি যুগ্মবল; ইহার ভ্রামক নির্ণয় কর।

7. যদি $k.\overline{BC}$, $k.\overline{CA}$, $k.\overline{AB}$ বল তিনটি ABC ত্রিভুজের যথাক্রমে $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ বাহুতে ক্রিয়া করে তাহা হইলে প্রমাণ কর যে তাহাদের লব্ধি $2k\triangle$ মানের একটি যুগ্মবল ; যেখানে $\triangle$ = ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

8. একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুতে প্রযুক্ত তিনটি বল একটি যুগ্মবলের সমান। প্রমাণ কর যে বলসমূহ তাহাদের ক্রিয়মাণ বাহুর সমানুপাতিক।

[H.S. 1964]

9. ABCD একটি আয়তক্ষেত্র $p.\overline{AB}$, $q.\overline{BC}$, $r.\overline{CD}$ এবং $s.DA$ বলসমূহ যথাক্রমে $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ এবং $\overrightarrow{DA}$ বাহুতে ক্রিয়া করে। যদি বলসমূহ একটি যুগ্মবলের সমান হয় ; দেখাও যে $p=r$ এবং $q=s$ প্রয়োজন এবং যথেষ্ট।

10. ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC, CA এবং AB বাহুকে যথাক্রমে D, E এবং F বিন্দু $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করে। D, E, F বিন্দুতে P মানের তিনটি বল ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্বভাবে বহির্মুখে ক্রিয়া করিতেছে। ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু 'a' হইলে, দেখাও যে এই তিনটি বল $\frac{1}{2}$ Pa ভ্রামকের একটি যুগ্মবলের সমান।

৭ একটি বস্তুর উপর ক্রিয়মাণ তিনটি বলের সাম্যাবস্থা

(Equlibrium of three forces acting on a body)

প্রয়োজনীয় জ্ঞাতব্য বিষয় :

কোন বস্তুর উপর ক্রিয়মাণ তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকিলে তাহারা এক সমতলে অবস্থিত এবং তিনটি বল সমান্তরাল অন্যথা তাহারা এক বিন্দুগামী।

(i) বল তিনটি এক বিন্দুগামী হইলে :

(a) ল্যামির সূত্র প্রযোজ্য, (b) বলের ত্রিভুজ সূত্র প্রযোজ্য, (c) পরস্পর লম্বাভিমুখী দিকে বিশ্লেষণ করিয়া $X=0, Y=0$ প্রযোজ্য এবং (d) একই সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামকের সমষ্টি$=0$ প্রযোজ্য।

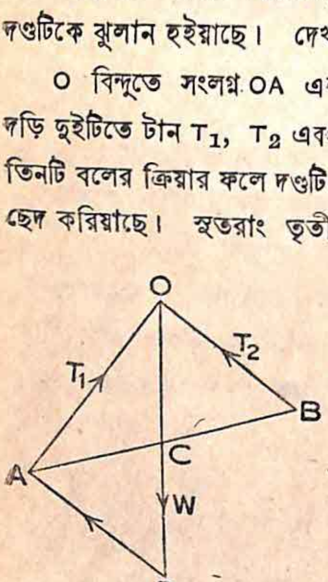
(ii) বল তিনটি সমান্তরাল হইলে :

$$\frac{P}{Q \text{ হইতে } R\text{-এর দূরত্ব}} = \frac{Q}{R \text{ হইতে } P\text{-এর দূরত্ব}} = \frac{R}{P \text{ হইতে } Q\text{-এর দূরত্ব}}$$

উদাহরণমালা—VII

উদা. 1. একটি স্থির বিন্দুতে সংলগ্ন দুইটি দড়ি একটি সমদণ্ডের দুই প্রান্তে বাঁধিয়া দণ্ডটিকে ঝুলান হইয়াছে। দেখাও যে দড়ি দুইটির টান তাহাদের দৈর্ঘ্যের অনুপাতে।

O বিন্দুতে সংলগ্ন OA এবং OB দড়ির সাহায্যে AB দণ্ডটিকে ঝুলান হইয়াছে। দড়ি দুইটিতে টান T_1, T_2 এবং AB-র মধ্য-বিন্দু C-তে ক্রিয়মাণ দণ্ডের ভার W, এই তিনটি বলের ক্রিয়ার ফলে দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় আছে। T_1 এবং T_2 বল দুইটি O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। সুতরাং তৃতীয় বল দণ্ডের ভারের ক্রিয়া রেখা, যাহা উল্লম্ব, O বিন্দুর ভিতর দিয়া যাইবে। অতএব OC উল্লম্ব রেখা।



A বিন্দুর ভিতর দিয়া AD সরলরেখা OB-র সমান্তরাল করিয়া টান। তাহা হইলে DAO একটি বল ত্রিভুজ। ইহার $\vec{DA}$, $\vec{AO}$, $\vec{OD}$ যথাক্রমে T_2, T_1 এবং W বল তিনটি নির্দেশ করে।

এখন CAD এবং COB ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম

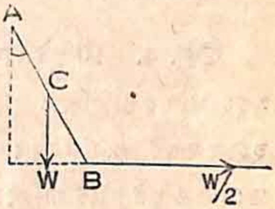
$\therefore$ DA$=$BO.

$\therefore$ BO সরলরেখা T_2কে নির্দেশ করে।

সুতরাং T_1 এবং T_2 দড়ির দৈর্ঘ্য AO এবং BO-র অনুপাতে।

উদা. 2. একটি সমদণ্ড তাহার এক স্থির প্রান্তের চারিদিকে ঘুরিতে পারে। দণ্ডের অপর প্রান্তে ইহার ভারের অর্ধেকের সমান বল অনুভূমিক দিকে প্রয়োগ করিয়া ইহাকে উল্লম্ব অবস্থান হইতে টানিয়া রাখা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে দণ্ডটি উল্লম্বদিকের সঙ্গে 45° কোণ করিয়া আছে। [C. U. 1915]

ধর, AB দণ্ড A প্রান্তের চারিদিকে ঘুরিতে পারে। দণ্ডের ভার W উহার মধ্যবিন্দু C-তে ক্রিয়া করে, প্রদত্ত বল $\frac{W}{2}$ অনুভূমিক এবং স্থির বিন্দু A-তে, প্রতিক্রিয়া R (অজ্ঞাত)। তিনটি বলের ক্রিয়ার ফলে দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় আছে। মনে কর, দণ্ডটি উল্লম্ব দিকের সহিত θ কোণ করিয়া আছে।



A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইলে

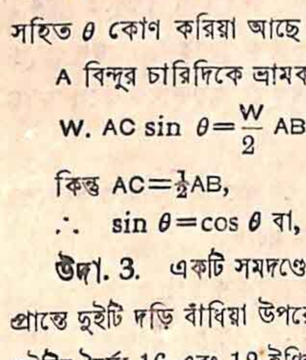
$$W.\ AC \sin\theta = \frac{W}{2}\ AB \cos\theta$$

কিন্তু $AC = \frac{1}{2}AB$,

$\therefore\ \sin\theta = \cos\theta$ বা, $\tan\theta = 1 \quad \therefore\ \theta = 45°$.

উদা. 3. একটি সমদণ্ডের দৈর্ঘ্য 20 ইঞ্চি এবং ভার 25 পাউণ্ড। ইহাকে দুই প্রান্তে দুইটি দড়ি বাঁধিয়া উপরে একটি পেরেক হইতে ঝুলাইয়া রাখা হইয়াছে। দড়ি দুইটির দৈর্ঘ্য 16 এবং 12 ইঞ্চি হইলে ইহা কি রকম অবস্থানে থাকিবে এবং দড়ি দুইটির টান কি হইবে?

O বিন্দু হইতে OA, OB দড়ির সাহায্যে সমদণ্ড AB কে ঝুলান হইয়াছে।



OA = 16 ইঞ্চি, OB = 12 ইঞ্চি। মনে কর, OA এবং OB দড়ির টান T_1 এবং T_2।

T_1, T_2 এবং দণ্ডের ভার W (মধ্যবিন্দু C-তে ক্রিয়মাণ) এই তিনটি বলের ক্রিয়ার ফলে দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় আছে। দণ্ডের ভারের উল্লম্ব ক্রিয়ারেখা O বিন্দুর ভিতর দিয়া যাইবে। অতএব OC উল্লম্বরেখা।

যেহেতু $16^2 + 12^2 = 20^2$

অর্থাৎ $AO^2 + BO^2 = AB^2$

$\therefore$ AOB কোণ সমকোণ। $\therefore\ CA = CB = CO$

ধর, দণ্ডটি উল্লম্বের সঙ্গে θ কোণ করিয়া সাম্যাবস্থায় আছে এবং $\theta = 2A$.

$\sin\theta = \sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \times \frac{12}{20} \times \frac{16}{20} = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.

অর্থাৎ $\theta = \sin^{-1}\frac{24}{25}$; ল্যামির সূত্র প্রয়োগ করিয়া,

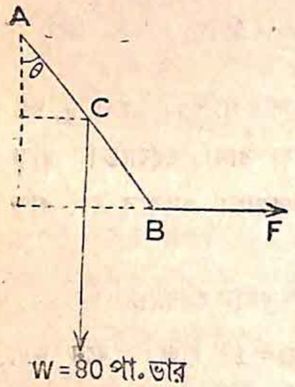
$$\frac{T_1}{\sin COB} = \frac{T_2}{\sin COA} = \frac{25}{\sin 90^\circ}$$

বা, $\frac{T_1}{\sin B} = \frac{T_2}{\sin A} = 25$, $\therefore$ $T_1 = 25 \sin B = 25.\frac{AO}{AB}$.

$$= 25 \times \frac{16}{20} = 20 \text{ পা. ভার}$$

$T_2 = 25 \sin A = 25 \times \frac{12}{20} = 15$ পা. ভার।

উদা. 4. 10 ফুট দীর্ঘ এবং 80 পাউণ্ড-ভারের একটি সমদণ্ড A বিন্দুতে একটি মসৃণ অক্ষের চারিদিকে ঘুরিতে পারে। B বিন্দুতে অনুভূমিক দিকে কি বল প্রযুক্ত হইলে দণ্ডটি এমন অবস্থানে থাকিবে যেন ইহার কেন্দ্র A-বিন্দু যে অনুভূমিক তলে আছে তাহার 4 ফুট নীচে থাকিবে?



ধর, B বিন্দুতে F বল প্রয়োগ করিলে সমদণ্ডের কেন্দ্র C উদ্দিষ্ট অবস্থানে থাকে।

দণ্ড উল্লম্বের সহিত θ কোণ করিলে

$\cos\theta = \frac{4}{5}$ $\therefore$ $\sin\theta = \frac{3}{5}$.

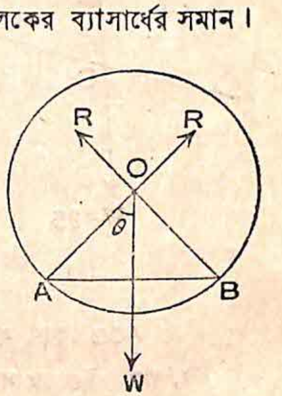
A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$80 \times 5 \sin\theta = F \times 10 \cos\theta$,

বা, $80 \times 3 = F \times 8$

$\therefore$ $F = 30$ পা. ভার।

উদা. 5. একটি ভারী গোলক একই অনুভূমিক তলে অবস্থিত দুইটি সমান্তরাল দণ্ডের উপর রক্ষিত হইয়াছে; দণ্ড দুইটির মধ্যে ব্যবধান গোলকের ব্যাসার্ধের সমান। প্রত্যেক দণ্ডের প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।



মনে কর, গোলক সমান্তরাল দণ্ড দুইটিকে A এবং B বিন্দুতে স্পর্শ করে; $AB = a$ (ব্যাসার্ধ)।

প্রতিসাম্য বিবেচনা করিয়া প্রত্যেক দণ্ডের প্রতিক্রিয়া সমান। মনে কর, ইহাদের প্রত্যেকে R। দণ্ডের প্রতিক্রিয়া এবং গোলকের ভার এই তিনটি বলের ক্রিয়ার ফলে গোলক সাম্যাবস্থায় আছে। তিনটি বল গোলকের কেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়। মনে কর প্রতিক্রিয়ার ক্রিয়ারেখা উল্লম্বের সঙ্গে θ কোণ করে। উল্লম্ব দিকে বিশ্লেষণ করিলে $2R\cos\theta = W$.

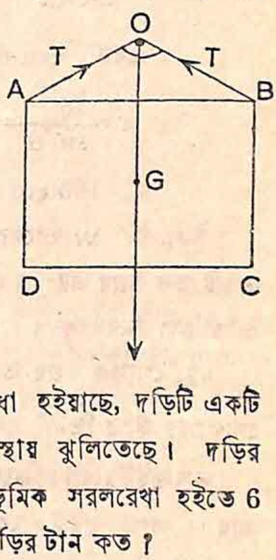
এখন $\sin\theta = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{1}{2}$; $\therefore\ \theta = 30^\circ$

$\therefore\ 2R\cos 30^\circ = W$; বা, $2R.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = W$

$\therefore\ R = \dfrac{W}{\sqrt{3}} = \dfrac{W\sqrt{3}}{3}$.

উদা. 6. 20 পাউণ্ড-ভারের একটি ছবি একটি দড়ির সাহায্যে ঝুলান হইয়াছে ; ইহার উপরের ও নীচের প্রান্ত অনুভূমিকভাবে আছে। দড়ির দুই প্রান্ত উপরের দুই কোণে বাঁধা হইয়াছে এবং দড়িটি একটি পেরেকের উপর দিয়া গিয়াছে। পেরেকের দুইদিকের দড়ি পরস্পরের সহিত 120° কোণ করিয়া থাকিলে দড়ির টান নির্ণয় কর।

মনে কর, দড়ির প্রান্তদ্বয় উপরের দুই কোণ A এবং B-তে বাঁধা হইয়াছে এবং দড়ি O-তে পেরেকের উপর দিয়া গিয়াছে।



ছবির উপর তিনটি বল ক্রিয়া করিতেছে। A এবং B বিন্দুতে দড়ির টান—প্রত্যেকে T, ছবির কেন্দ্র C-তে তাহার ভার 20 পা.। তিনটি বল O বিন্দুর ভিতর দিয়া যাইবে।

সাম্যাবস্থার জন্য $2T\cos 60^\circ = 20$ পা. ভার

$2T \times \frac{1}{2} = 20$ পা. ভার

$\therefore\ T = 20$ পা. ভার।

উদা. 7. একটি ছবির দুইটি আংটিতে একটি দড়ি বাঁধা হইয়াছে, দড়িটি একটি পেরেকের উপর দিয়া গিয়াছে এবং ছবিটি প্রতিসম অবস্থায় ঝুলিতেছে। দড়ির দৈর্ঘ্য 18 ইঞ্চি এবং পেরেকটি আংটি দুইটির যোজক অনুভূমিক সরলরেখা হইতে 6 ইঞ্চি উপরে থাকে। যদি ছবির ভার 16 পাউণ্ড হয়, তবে দড়ির টান কত ?

মনে কর, দড়ি দুইটির মধ্যে কোণ 2θ. তাহা হইলে $\cos\theta = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; দড়ির টান T হইলে (পূর্ব উদাহরণের অনুরূপে)

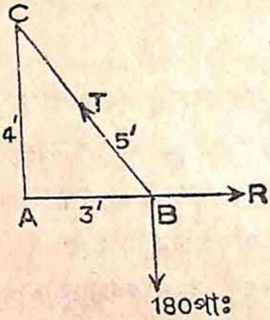
$2T\cos\theta = 16$ পা. ভার ; বা, $2T \times \frac{2}{3} = 16$ পা. ভার

$\therefore\ T = 12$ পা. ভার।

উদা. 8. তিন ফুট দীর্ঘ একটি ভারহীন অনুভূমিক ভাবে রক্ষিত দণ্ডের এক প্রান্ত একটি খাড়া দেওয়ালের গায়ে একটা বিন্দুতে আটকানো, অপর প্রান্ত একটি দড়ির সাহায্যে কব্জার 4 ফুট উপরে দেওয়ালের একটি বিন্দুতে আবদ্ধ এবং এই দড়ি সংলগ্ন

প্রান্ত হইতে 180 পাউণ্ড-ভার ঝুলানো হইয়াছে। দড়ির টান এবং দণ্ড বরাবর চাপ নির্ণয় কর।

AB ভারহীন দণ্ডের উপর তিনটি বল ক্রিয়মাণ (i) A বিন্দুতে কব্জার প্রতিক্রিয়া (ii) B বিন্দুতে দড়ির টান T এবং (iii) ঝুলান ভার। সাম্যাবস্থার জন্য A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া B বিন্দুর ভিতর দিয়া যাইতে হইবে অর্থাৎ এই প্রতিক্রিয়া R, AB বরাবর ক্রিয়া করে। ধর, দড়ি দণ্ডের সহিত θ কোণ করিয়া আছে। এখন, ল্যামির সূত্র প্রয়োগ করিয়া,



$$\frac{T}{\sin 90^\circ}=\frac{R}{\sin(90^\circ+\theta)}=\frac{180}{\sin(180^\circ-\theta)}$$

$$\text{বা, } T=\frac{R}{\cos\theta}=\frac{180}{\sin\theta}.$$

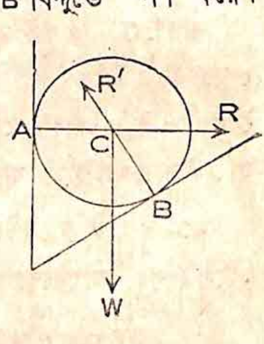
এখন $\tan\theta=\frac{4}{3}$ $\therefore$ $\sin\theta=\frac{4}{5}$ এবং $\cos\theta=\frac{3}{5}$

$$T=\frac{180}{\sin\theta}=\frac{180\times5}{4}=225 \text{ পা. ভার}$$

$$R=180\cot\theta=180\times\tfrac{3}{4}=135 \text{ পা. ভার।}$$

উদা. 9. W ভারের একটি গোলক দুইটি মসৃণ সমতলের মধ্যে রক্ষিত হইয়াছে। একটি তল উল্লম্ব এবং অপর তল উল্লম্বের সঙ্গে α-কোণ করিয়া আছে। তল দুইটির প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর। [Dacca. 1949]

ধর, গোলক উল্লম্ব তলকে A বিন্দুতে এবং অপর তলকে B বিন্দুতে স্পর্শ করে। গোলকের উপর তিনটি বল ক্রিয়মাণ।



তল দুইটির প্রতিক্রিয়া R এবং R′ এবং গোলকের ভার। তল দুইটি মসৃণ বলিয়া প্রতিক্রিয়া তলের লম্বাভিমুখে। সুতরাং গোলকের কেন্দ্র C-র ভিতর দিয়া যায়। ভার W ও কেন্দ্র C-তে ক্রিয়া করে।

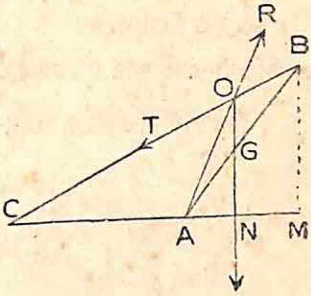
এখন ল্যামির সূত্র ব্যবহার করিয়া

$$\frac{R}{\sin WCR'}=\frac{R'}{\sin WCR}=\frac{W}{\sin RCR'}$$

$$\text{বা, } \frac{R}{\sin(90^\circ+\alpha)}=\frac{R'}{\sin 90^\circ}=\frac{W}{\sin(180^\circ-\alpha)}$$

$$\text{বা, } \frac{R}{\cos\alpha}=\frac{R'}{1}=\frac{W}{\sin\alpha}. \quad \therefore\ R=W\cot\alpha,\ R'=W\operatorname{cosec}\alpha.$$

উদা. 10. একটি সমদণ্ড AB ইহার A বিন্দুতে আবদ্ধ আছে এবং ইহা A-র ভিতর দিয়া অনুভূমিক সমতলে A বিন্দুর পশ্চাতে একটি বিন্দু C-তে সংলগ্ন BC দড়ির সাহায্যে ঐ তলের সহিত 60° কোণ করিয়া সাম্যাবস্থায় আছে। যদি AC=AB হয়, A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়ার দিক্ নির্ণয় কর।



A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া BC এবং ভারের ক্রিয়া রেখার ছেদ বিন্দু O-র ভিতর দিয়া যাইবে। AB দণ্ডের দৈর্ঘ্য a.

ধর, প্রতিক্রিয়ার ক্রিয়া রেখা অনুভূমিকের সহিত θ কোণ করে।

$$\tan\theta=\frac{ON}{AN},\ AN=\frac{a}{2}\cos 60°=\frac{a}{4},\ \frac{ON}{BM}=\frac{CN}{CM}=\frac{\frac{5}{4}a}{\frac{3}{2}a}=\frac{5}{6}$$

$$ON=\frac{5}{6}BM=\frac{5}{6}a\sin 60°=\frac{5}{6}a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

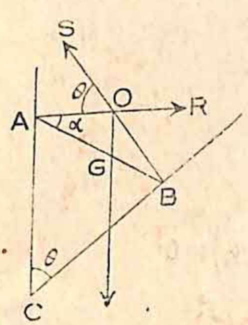
$$\therefore\quad \tan\theta=\frac{\frac{5}{6}a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{4}}=\frac{5\sqrt{3}\times 4}{12}=\frac{5}{3}\sqrt{3}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\sqrt{3}\right).$$

উদা. 11. একটি ভারী সমদণ্ডের একপ্রান্ত একটি মসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালের গায়ে এবং অন্য প্রান্ত দেওয়ালের সঙ্গে θ কোণ করিয়া আছে এরকম একটি সমতলের গায়ে। যদি দণ্ডটি অনুভূমিকের সঙ্গে α কোণ করে, প্রমাণ কর যে

$$\tan\alpha=\tfrac{1}{2}\tan\theta.$$

ক্রিয়মাণ তিনটি বল মসৃণ তল দুইটির প্রতিক্রিয়া R এবং S এবং বস্তুর ভার W=S $\sin\theta$ (উল্লম্বদিকে বিশ্লেষণ করিয়া)



A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$W.\tfrac{1}{2}AB\cos\alpha=S.AB\sin(\theta-\alpha)$$

বা, $S\sin\theta.\frac{1}{2}\cos\alpha=S\sin(\theta-\alpha)$

বা, $\frac{1}{2}\sin\theta\cos\alpha$
$=\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha.$

বা, $\cos\theta\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\alpha.$

$\therefore\ \tan\alpha=\frac{1}{2}\tan\theta.$

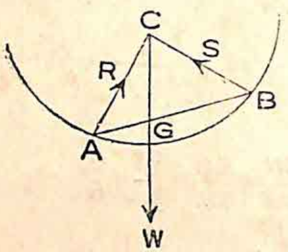
উদা. 12. এক ভারী দণ্ড অর্ধ-গোলকাকৃতি মসৃণ বাটির ভিতর রক্ষিত হইয়াছে।

দণ্ডের দৈর্ঘ্য গোলকের ব্যাসার্ধের সমান এবং ইহার ভারকেন্দ্র দণ্ডের একপ্রান্ত হইতে এক-তৃতীয়াংশ দূরে। যদি দণ্ড উল্লম্বের সঙ্গে θ কোণ করে তাহা হইলে দেখাও যে

$$\tan \theta = 2\sqrt{3}.$$

AB দণ্ড গোলকের A এবং B বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। এই দুই বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া এবং ভার (উল্লম্ব) গোলকের কেন্দ্র C বিন্দুর ভিতর দিয়া যায়, $\angle CGB = \theta$.

[ত্রিকোণমিতির সূত্র $(m+n) \cot \theta = n \cot A - m \cot B$]



এখানে $\angle CAB = \angle CBA = 60°$

যেহেতু $AB = AC = BC$.

$$(1+2) \cot \theta = 2 \cot 60° - \cot 60°$$

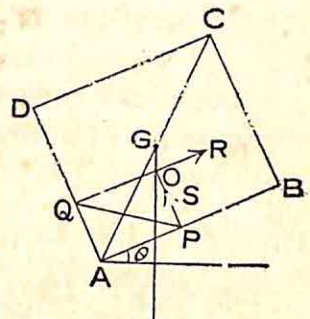
বা, $3 \cot \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\therefore \tan \theta = 3\sqrt{3}.$$

উদা. 13. একটি সমভার বর্গাকৃতি পাত তাহার দুই বাহু এক অনুভূমিক সরলরেখার উপর c ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি মসৃণ গোঁজের উপর রক্ষিত হইয়া উল্লম্ব সমতলে সাম্যাবস্থায় আছে। অপ্রতিসমভাবে সাম্যাবস্থায় বর্গের একটি বাহু অনুভূমিকের সহিত θ কোণ করিলে, দেখাও যে $c(\sin \theta + \cos \theta) = a$; $2a$ বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য।

P এবং Q মসৃণ গোঁজের প্রতিক্রিয়া AB এবং AD-র লম্বাভিমুখে ; ইহারা O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

তৃতীয় বল পাতের ভার (উল্লম্ব) O-র ভিতর দিয়া যায়।



AB এবং AD অভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া

$$R = W \sin \theta \; ; \; S = W \cos \theta$$

A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$S.AP - R.AQ - W.AG \cos (45° + \theta) = 0$$

অর্থাৎ $W \cos \theta . c \cos \theta - W \sin \theta \, c \sin \theta$

$$- Wa\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta\right) = 0$$

বা, $c(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - a(\cos \theta - \sin \theta) = 0$

বা, $(\cos \theta - \sin \theta) \{c(\cos \theta + \sin \theta) - a\} = 0$

$\therefore$ $\cos\theta - \sin\theta = 0$, $\sin\theta = \cos\theta$ অথবা $\tan\theta = 1$

$\theta = 45°$ ইহা প্রতিসাম্য অবস্থা ;

অপর সাম্যাবস্থায় $c(\cos\theta + \sin\theta) = a$.

উদা. 14. একটি সমদণ্ডের দৈর্ঘ্য $2a$; ইহার একপ্রান্ত এক খাড়া মসৃণ দেওয়ালের গায়ে ঠেস দিয়া রাখা হইয়াছে এবং ইহার একটা বিন্দু দেওয়ালের সমান্তরাল এবং b ব্যবধানে অবস্থিত একটা অনুভূমিক দণ্ডের উপর আছে। দেখাও যে দণ্ডটি উল্লম্বের সঙ্গে $\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ কোণ করিয়া আছে।

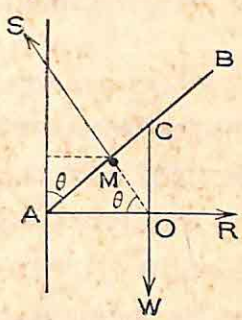
ধর, AB দণ্ডের A বিন্দু মসৃণ খাড়া দেওয়ালে ঠেস দিয়া রাখা হইয়াছে। M বিন্দু প্রদত্ত অনুভূমিক দণ্ডের উপর।

এখানে তিনটি বলের ক্রিয়ার ফলে দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় আছে :

(1) মসৃণ দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া R, দেওয়ালের লম্বাভিমুখে,

(2) মসৃণ দণ্ডের প্রতিক্রিয়া S, দণ্ডের লম্বাভিমুখে,

(3) দণ্ডের মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়মাণ তাহার উল্লম্ব নিম্নাভিমুখী ভার W। R এবং S বলদ্বয়ের ক্রিয়া রেখা O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। তিনটি বলের জন্য সাম্যাবস্থা বলিয়া তৃতীয় বল দণ্ডের ভার C বিন্দুতে ক্রিয়মাণ উল্লম্বরেখা O বিন্দুর ভিতর দিয়া গিয়াছে।



A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$S.AM - W.AO = 0$

বা, $Sb \operatorname{cosec}\theta - W a \sin\theta = 0$...(i)

উল্লম্বদিকে বিশ্লেষণ করিয়া

$S.\sin\theta = W$ ....(ii)

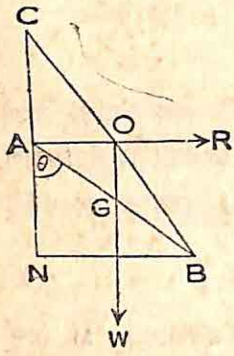
(i) এবং (ii) হইতে $\frac{Wb}{\sin^2\theta} = W a \sin\theta$; বা, $\sin^3\theta = \frac{b}{a}$.

$\therefore$ $\sin\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$.

উদা. 15. সমদণ্ড AB-র A-প্রান্ত এক উল্লম্ব প্রাচীরে ঠেস দিয়া আছে, ইহাকে একটি দড়ি BC-র দ্বারা প্রাচীরে A বিন্দুর উপরে C বিন্দুতে বাঁধিয়া দেওয়া হইয়াছে। যদি $AB = \sqrt{2}AC$ হয়, উল্লম্বের সহিত দণ্ডের নতি ও প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

[H. S, 1963]

উল্লম্ব মসৃণ প্রাচীরের প্রতিক্রিয়া R অনুভূমিক এবং দণ্ডের ভার W উল্লম্ব রেখা দুইটি O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। অতএব দড়ি এই বিন্দুর ভিতর দিয়া যায়। দণ্ডের উল্লম্বের সঙ্গে নতি θ.



আরও মনে কর $\angle NBC = \phi$.

CAB ত্রিভুজে, G বিন্দু AB-র মধ্যবিন্দু এবং GO রেখা CA-এর সমান্তরাল।

$\therefore$ O বিন্দু BC রেখার মধ্যবিন্দু। আবার CNB ত্রিভুজে O বিন্দু BC-র মধ্যবিন্দু এবং AO রেখা NB-র সমান্তরাল ; $\therefore$ AN = AC

এখন $\cos\theta = \frac{AN}{AB} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{\sqrt{2}AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$$\therefore \quad \theta = 45^\circ$$

এখন, ল্যামির সূত্র প্রয়োগ করিয়া, $\frac{R}{\sin(90^\circ+\phi)} = \frac{W}{\sin(180^\circ-\phi)}$

$$\therefore \quad R = \frac{W\cos\phi}{\sin\phi} = W\cot\phi = W \times \frac{BN}{CN} = \frac{1}{2}W.$$

প্রশ্নমালা VII

1. একটি সমদণ্ড AB-র ভার 20 কিলোগ্রাম। A বিন্দু স্থির এবং ইহার চারিদিকে দণ্ডটি ঘুরিতে পারে, B প্রান্তে দণ্ডের সহিত 45° কোণে একটি দড়ির সাহায্যে দণ্ডটিকে অনুভূমিকভাবে রাখা হইয়াছে। দড়ির টান এবং A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

2. একটি সূতার একপ্রান্ত একটি ভারী গোলকের এক বিন্দুতে এবং অপর প্রান্ত একটি মসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালের সঙ্গে বাঁধা হইয়াছে। সূতার দৈর্ঘ্য গোলকের ব্যাসার্ধের সমান; গোলকটি দেওয়াল স্পর্শ করিয়া আছে। দড়ির টান এবং দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

3. একটি সমদণ্ডের দৈর্ঘ্য a ; ইহার একপ্রান্ত একটি খাড়া মসৃণ দেওয়ালে ঠেস দিয়া রাখা হইয়াছে, অপর প্রান্তে একটি l দৈর্ঘ্যের দড়ি বাঁধিয়া দেওয়ালের একটা বিন্দুতে দড়ির অন্যপ্রান্ত বাঁধিয়া দেওয়া হইয়াছে। যদি দণ্ডটি দেওয়ালের সঙ্গে θ কোণ করিয়া সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে, প্রমাণ কর যে $\cos^2\theta = \frac{l^2-a^2}{3a^2}$ হয়।

[C. U. 1941]

4. সাম্যাবস্থায় তিনটি বল একটি ত্রিভুজ ABC-র তিনটি বাহুর লম্বভাবে ক্রিয়া

করে (সকলেই অন্তর্মুখী অথবা সকলেই বহির্মুখী)। দেখাও যে বল তিনটি sin A, sin B এবং sin C-র অনুপাতে। [C. U. 1913, 1924]

5. তিনটি বল P, Q, R একটি ত্রিভুজ ABC-র কৌণিক বিন্দুতে বিপরীত বাহুর লম্বভাবে ক্রিয়া করিয়া সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে $P : Q : R = a : b : c$.

6. একটি ভারী সমদণ্ডের একপ্রান্ত একটি মসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালের উপর এবং অপর প্রান্ত দেওয়ালের সঙ্গে θ নতিবিশিষ্ট এক মসৃণ নততলে ঠেস দিয়া রাখা হইয়াছে। যদি দণ্ডের নতি অনুভূমিকের সঙ্গে α হয় তাহা হইলে প্রমাণ কর $\tan \alpha = \frac{1}{2} \tan \theta$.

7. 1 মিটার লম্বা ও 8 কি. গ্রা. ভারী AB সমদণ্ডটি A প্রান্তে মসৃণ কব্জা দিয়া আটকানো। উহার B প্রান্তে প্রযুক্ত F কি. গ্রা. অনুভূমিক বল দণ্ডটিকে অনুভূমিক রেখার সহিত 60° হেলাইয়া স্থির রাখিয়াছে, A প্রান্তের প্রতিক্রিয়া R-এর এবং F বলের মান নির্ণয় কর। [H. S. 1969]

8. 6 ফুট দীর্ঘ AB সমদণ্ড বিনা বাধায় A-তে একটি কব্জার চারিদিকে ঘুরিতে পারে; A হইতে 15 ইঞ্চি দূরে E বিন্দুতে A দড়ির একপ্রান্ত বাঁধিয়া ইহাকে অনুভূমিক অবস্থায় রাখা হইয়াছে; দড়ির অপরপ্রান্ত A-র খাড়া উপরে C বিন্দুতে আবদ্ধ। যদি দণ্ডের ভার 40 পাউণ্ড এবং দড়ির টান 120 পাউণ্ড ভার হয়, তাহা হইলে দেখাও যে দড়ির দৈর্ঘ্য 25 ইঞ্চি।

9. 3 ফুট দীর্ঘ AB দণ্ডের ভার 2 পাউণ্ড। A প্রান্ত একটি মসৃণ প্রাচীরের উপর অবস্থিত। BC দড়ির দ্বারা ইহাকে অনুভূমিকের সহিত 30° কোণে একটি উল্লম্ব তলে ঝুলাইয়া রাখা হইয়াছে, C বিন্দু A-র খাড়া উপর। অঙ্কণ অথবা হিসাব করিয়া BC-র দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং দড়ির টান স্থির কর! [H. S. 1965]

10. W ভারের AB সমদণ্ডের A প্রান্ত একটি কব্জায় আটকানো এবং B প্রান্তে দণ্ডের সহিত 30° কোণে দড়িতে বাঁধিয়া উহাকে অনুভূমিকের সহিত 45° কোণে স্থিরাবস্থায় রাখা হইয়াছে। দড়ির টান নির্ণয় কর।

11. AB একটি ভারী সমদণ্ডের এক প্রান্ত একটি মসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালের A বিন্দুতে ঠেস দেওয়া আছে এবং C বিন্দু A বিন্দুর খাড়া উপরে অবস্থিত। দণ্ডটি BC দড়ির দ্বারা ঝুলান আছে। যদি $AB = \sqrt{2}AC$ হয় তবে দণ্ড উল্লম্ব রেখার সহিত যে কোণ করিয়া আছে তাহা নির্ণয় কর। প্রতিক্রিয়াও বাহির কর।

12. W ভার বিশিষ্ট ACB একটি সমদণ্ড যাহার B বিন্দুটি সর্বোচ্চ প্রান্ত। A প্রান্তটিকে একটি মসৃণ খাড়া দেওয়ালের গায়ে রাখিয়া CD দড়ির সাহায্যে ঐ দণ্ডটিকে টানিয়া রাখা হইয়াছে। BD অনুভূমিক এবং CD দেওয়ালটির সহিত 30° কোণে অবস্থিত। দড়িটির টান এবং দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর। [H. S. 1967]

৮

একটি বস্তুর উপর ক্রিয়মাণ একতলীয় বলশ্রেণীর সাম্যাবস্থা

(Equilibrium of a system of coplanar forces acting on a body)

উদাহরণমালা VIII

উদা. 1. 60 কিলোগ্রাম ভারের একটি সমদণ্ডের একপ্রান্ত একটি মসৃণ উল্লম্ব প্রাচীরে ঠেস দিয়া রাখা হইয়াছে; ইহার অপর প্রান্ত একটি মসৃণ অনুভূমিক সমতলে রক্ষিত হইয়াছে। যদি দণ্ডের নতি অনুভূমিকতলের সহিত 60° হয়, তাহা হইলে নীচের প্রান্তে অনুভূমিক দিকে কি বল প্রয়োগ করিলে দণ্ডটি সরিয়া যাইবে না?

ধর, AB দণ্ডের A প্রান্ত অনুভূমিক তলে আছে।

এখানে দণ্ডের ভার 60 কি. গ্রা. মসৃণ প্রাচীরের প্রতিক্রিয়া R (অনুভূমিক) মসৃণ অনুভূমিক সমতলের প্রতিক্রিয়া S (উল্লম্বদিকে) এবং প্রযুক্ত বল P ক্রিয়া করিতেছে।

অনুভূমিক এবং উল্লম্বদিকে বিশ্লেষণ করিয়া

$$R=P\ ;\ S=60 \text{ কি. গ্রা.}$$

A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া (P বল এবং S বল এই বিন্দুর ভিতর দিয়া গিয়াছে) এবং দণ্ডের দৈর্ঘ্য $2a$ ধরিয়া

$$R\,2a \sin 60^\circ = 60.\ a \cos 60^\circ$$

$$\therefore\ R = 30 \cot 60^\circ = 30\sqrt{3} \text{ কি. গ্রা. ভার।}$$

উদা. 2. 6 ফুট উচ্চ এবং 8 ফুট চওড়া একটি কবাটের ভার 112 পাউণ্ড এবং ইহা উপর ও নীচ হইতে যথাক্রমে এক ফুট দূরে দুইটি কব্জা দিয়া আটকানো আছে। নীচের কব্জার প্রতিক্রিয়া অনুভূমিক, কবাটের উপরের দূরবর্তী প্রান্তে 52 পাউণ্ড ভারের একটি বালক বসিলে উভয় কব্জার প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

ধর, নীচের কব্জার অনুভূমিক দিকে প্রতিক্রিয়া R; উপরের কব্জার প্রতিক্রিয়ার বিশ্লেষিতাংশ অনুভূমিক এবং উল্লম্বদিকে X এবং Y.

অনুভূমিক দিকে এবং উল্লম্বদিকে বিশ্লেষণ করিয়া

$$X=R \quad \cdots \quad (i)\ ;\quad Y=112+52=162 \text{ পা.} \quad \cdots \quad (ii)$$

উপরের কব্জার চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$R\times 4=112\times 4+52\times 8\ ;\quad \therefore\ R=216 \text{ পা. ভার এবং } X=216 \text{ পা. ভার}$$

এখন উপরের কব্জার প্রতিক্রিয়া $=\sqrt{216^2+164^2}=271\cdot 2$ পা. ভার (প্রায়)

উদা. 3. $2l$ দৈর্ঘ্যের এবং W ভারের একটি মই এক উল্লম্ব মসৃণ দেওয়ালে ঠেস দিয়া রাখা হইয়াছে। ইহার নীচের প্রান্ত মসৃণ মেজের উপর আছে এবং এই প্রান্তকে a দৈর্ঘ্যের দড়ি দিয়া দেওয়াল ও মেজের সংযোগস্থলের সহিত সংযুক্ত করা হইয়াছে যেন মইটি সরিয়া না যাইতে পারে। যদি 2W ভারের একজন লোক নীচের প্রান্ত হইতে $\frac{1}{2}l$ দূরে একটি ধাপে দাঁড়ায় তাহা হইলে মই-এর দুই প্রান্তে প্রতিক্রিয়া এবং দড়ির টান নির্ণয় কর।

AB মই এর A প্রান্ত মসৃণ অনুভূমিক সমতলে এবং B প্রান্ত উল্লম্ব মসৃণ দেওয়ালের গায়ে ঠেস দিয়া রাখা হইয়াছে। ধর, অনুভূমিক মেজের প্রতিক্রিয়া R, উল্লম্ব দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া S (অনুভূমিক) এবং দড়ির টান T ; আরও মনে কর, মই অনুভূমিকের সঙ্গে θ কোণ করিয়া আছে।

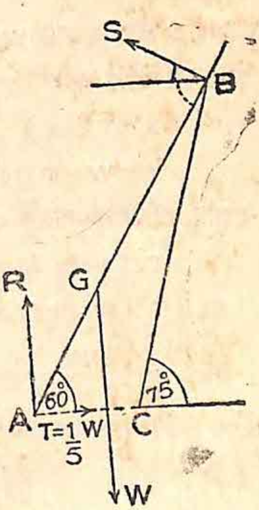
অনুভূমিক ও উল্লম্বদিকে বিশ্লেষণ করিয়া

$$S = T\ldots(i) \text{ এবং } R = W + 2W = 3W\cdots(ii)$$

A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া $S.2l \sin\theta = Wl\cos\theta + 2W\frac{1}{2}l\cos\theta$

$$\therefore \quad S.2l\sin\theta = 2Wl\cos\theta,\ S = W\cot\theta = \frac{aW}{\sqrt{4l^2 - a^2}} = T$$

উদা. 4. অনুভূমিকের সহিত 60° নত একটি মই AB র একপ্রান্ত একটি মসৃণ অনুভূমিক সমতল AC-র উপর এবং অপর প্রান্ত অনুভূমিক সমতলের সহিত 75° নতিবিশিষ্ট এক মসৃণ দেওয়াল BCতে ঠেস দিয়া রাখা হইয়াছে। ইহার A প্রান্ত C-র সঙ্গে একটি সরু দড়ি দিয়া বাঁধিয়া রাখা হইয়াছে যেন মইটি সরিয়া না যায়। যদি দড়ির টান মই-এর ভারের $\frac{1}{5}$ হয়, প্রমাণ কর যে মই-এর ভারকেন্দ্র ABকে 2 : 3 অনুপাতে বিভক্ত করে।



ধর, R অনুভূমিক তলের প্রতিক্রিয়া এবং S নততলের প্রতিক্রিয়া। ভার G বিন্দুতে ক্রিয়া করে। অনুভূমিক দিকে বিশ্লেষণ করিয়া $\frac{1}{5}W$ (দড়ির টান) $= S\cos 15^\circ\ldots(i)$

A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$-Wa\cos 60^\circ + S(a+b)\sin 75^\circ = 0$$

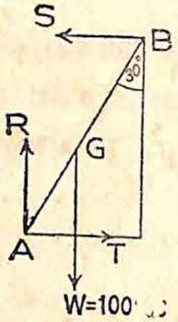
বা, $S(a+b)\cos 15^\circ = \frac{1}{2}Wa \quad \cdots(ii)$

(ii) কে (i) দিয়া ভাগ করিয়া

$a+b = \frac{5a}{2}$ অর্থাৎ $2a+2b=5a$;

বা, $3a = 2b. \therefore \ \frac{a}{b} = \frac{2}{3}.$

উদা. 5. একটি দণ্ডের ভার 100 পাউণ্ড ; ইহার এক প্রান্ত একটি মসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালের গায়ে ঠেস দিয়া ইহার সহিত 30° কোণ করিয়া রাখা হইয়াছে এবং অপর প্রান্ত ভূমিতে আছে। মই সরিয়া না যাইতে পারে এমনভাবে নীচের প্রান্তে একটি অনুভূমিক দড়ি দিয়া দেওয়ালের সঙ্গে বাঁধা আছে। ভারকেন্দ্র যদি ইহাকে 3 : 5 অনুপাতে বিভক্ত করে, দড়ির টান নির্ণয় কর।



ধর, $AG = 3x$, $BG = 5x$

A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$S.\ 8x \cos 30° - W\ 3x \sin 30° = 0$$

বা, $$8S = 100 \times 3 \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = 100\sqrt{3}$$

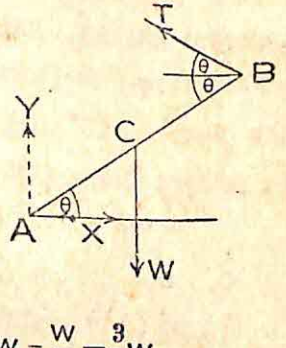
$$\therefore \quad S = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

অনুভূমিক দিকে বিশ্লেষণ করিয়া

$$T = S = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ পা. ভার।}$$

উদা. 6. W ভারের একটি সমদণ্ডের একপ্রান্ত একটি কব্জার সহিত আটকানো আছে এবং অপর প্রান্ত একটি দড়ি দিয়া বাঁধিয়া রাখা হইয়াছে। দড়ি ও দণ্ড অনুভূমিক দিকের সঙ্গে সমান কোণ θ করিয়া আছে। প্রমাণ কর যে কব্জার প্রতিক্রিয়া $\frac{W}{4}\sqrt{8+\operatorname{cosec}^2\theta}$.

AB দণ্ড A বিন্দুতে কব্জাতে আটকানো, B প্রান্তে দড়ি দিয়া বাঁধা। মনে কর, কব্জার প্রতিক্রিয়ার বিশ্লেষিতাংশ অনুভূমিক দিকে X এবং উল্লম্ব দিকে Y। ধর, দণ্ডের দৈর্ঘ্য $2a$; C বিন্দুতে ভার W ক্রিয়া করে এবং দড়ির টান T. অনুভূমিক এবং উল্লম্বদিকে বিশ্লেষণ করিয়া,



$$X = T \cos\theta \qquad \text{(i)}$$

$$Y = W - T \sin\theta \qquad \text{(ii)}$$

কব্জার চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$T.\ 2a \sin 2\theta = W a \cos\theta$$

বা, $$T\ 2.2 \sin\theta.\cos\theta = W \cos\theta$$

বা, $$T = \frac{W}{4\sin\theta}. \quad \therefore \quad X = \frac{W}{4}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \quad Y = W - \frac{W}{4} = \frac{3}{4}W$$

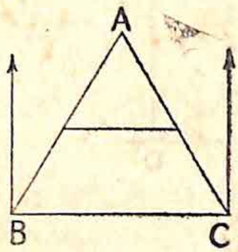
এখন কব্জার প্রতিক্রিয়া $= \sqrt{X^2+Y^2}$

$$= \frac{W}{4}\sqrt{\cot^2\theta + 9} = \frac{W}{4}\sqrt{8+\operatorname{cosec}^2\theta}.$$

উদা. 7. দুইটি সমদণ্ড AB, AC প্রত্যেকে 6 ফুট দীর্ঘ ; ইহারা A বিন্দুতে কব্জা দিয়া আটকানো আছে। B এবং C কে মসৃণ অনুভূমিক সমতলে রাখিয়া ABC-কে উল্লম্ব সমতলে রাখা হইয়াছে। 4 ফুট দীর্ঘ একটি দড়ি দণ্ড দুইটির মধ্যবিন্দুদ্বয়কে যোগ করিয়াছে। যদি প্রত্যেক দণ্ডের ভার 20 পাউণ্ড হয়, তাহা হইলে দড়ির টান এবং A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

ধর, দড়ির টান T এবং A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া S. আরও মনে কর, B এবং C বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া প্রত্যেকে R. সংযুক্ত ভাবে দণ্ড দুইটির সাম্যাবস্থা বিবেচনা করিয়া

$2R = 2W$. বা, $R = W = 20$ পা.



এখন একটি দণ্ড AB-র সাম্যাবস্থা বিবেচনা কর।

অনুভূমিক দিকে বিশ্লেষণ করিলে $T = S$

AB র মধ্যবিন্দু D-র চারিদিকে ভ্রামক লইয়া (দণ্ডের নতি অনুভূমিকের সঙ্গে θ ধর)

$$-R.\ 3\cos\theta + S.\ 3\sin\theta = 0$$

বা, $R = S\tan\theta$; $\cos\theta = \frac{2}{3}$,

$\therefore\ \tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$. $\therefore\ 20 = S\frac{\sqrt{5}}{2}$; বা, $S = T = \frac{40}{\sqrt{5}} = 8\sqrt{5}$ পা.

উদা. 8 একটি সমদণ্ডের ভার W, ইহার এক প্রান্ত মসৃণ অনুভূমিক সমতল AC-র উপর আছে ; অপর প্রান্ত প্রথম সমতলের সহিত 60° নত একটি তলের উপর আছে। যদি CB-র সমান দৈর্ঘ্যের একটি দড়ি AC-র দ্বারা দণ্ডটিকে না সরিতে পারে এরূপ রাখা হয় তাহা হইলে দড়ির টান নির্ণয় কর।

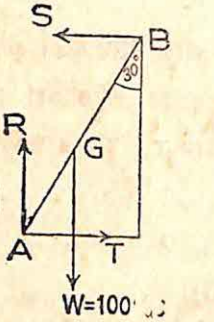
ধর, দড়ির টান T, A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া R এবং B বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া S. A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$S.\ AB\sin 60^\circ = W\cdot\frac{AB}{2}\cos 30^\circ\ ;\ \therefore\ S = \frac{W}{2}.$$

অনুভূমিক দিকে বিশ্লেষণ করিলে $T = S\cos 30^\circ = \frac{W}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{W}{4}\sqrt{3}$

উদা. 9. W ভারের একটি দণ্ড ইহার ভারকেন্দ্রের দ্বারা AC এবং BC দুইভাগে বিভক্ত হইয়াছে ; ইহাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a এবং b। দণ্ডটি উল্লম্ব সমতলে রক্ষিত হইয়াছে ; ইহার এক প্রান্ত AD মসৃণ অনুভূমিক মেজেতে আছে এবং অপর প্রান্ত মসৃণ DB দেওয়ালের গায়ে ঠেস দিয়া রাখা হইয়াছে। একটি দড়ি D-তে একটি আংটাতে দণ্ডের একটি বিন্দু P-তে যুক্ত আছে। যদি দড়ির টান T হয় এবং অনুভূমিকের সহিত দণ্ডের ও দড়ির নতি যথাক্রমে θ এবং ϕ হয়, দেখাও যে

উদা. 5. একটি দণ্ডের ভার 100 পাউণ্ড ; ইহার এক প্রান্ত একটি মসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালের গায়ে ঠেস দিয়া ইহার সহিত 30° কোণ করিয়া রাখা হইয়াছে এবং অপর প্রান্ত ভূমিতে আছে। মই সরিয়া না যাইতে পারে এমনভাবে নীচের প্রান্তে একটি অনুভূমিক দড়ি দিয়া দেওয়ালের সঙ্গে বাঁধা আছে। ভারকেন্দ্র যদি ইহাকে 3 : 5 অনুপাতে বিভক্ত করে, দড়ির টান নির্ণয় কর।



ধর, $AG = 3x$, $BG = 5x$

A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$S.\,8x\cos 30^\circ - W\,3x\sin 30^\circ = 0$$

বা, $$8S = 100\times 3\,\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = 100\sqrt{3}$$

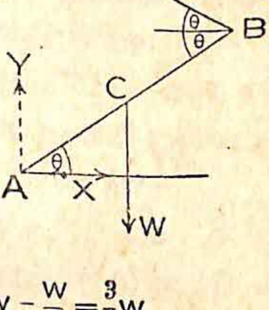
$$\therefore\quad S = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

অনুভূমিক দিকে বিশ্লেষণ করিয়া

$$T = S = \frac{25\sqrt{3}}{2}\text{ পা. ভার।}$$

উদা. 6. W ভারের একটি সমদণ্ডের একপ্রান্ত একটি কব্জার সহিত আটকানো আছে এবং অপর প্রান্ত একটি দড়ি দিয়া বাঁধিয়া রাখা হইয়াছে। দড়ি ও দণ্ড অনুভূমিক দিকের সঙ্গে সমান কোণ θ করিয়া আছে। প্রমাণ কর যে কব্জার প্রতিক্রিয়া $\frac{W}{4}\sqrt{8+\operatorname{cosec}^2\theta}$.

AB দণ্ড A বিন্দুতে কব্জাতে আটকানো, B প্রান্তে দড়ি দিয়া বাঁধা। মনে কর, কব্জার প্রতিক্রিয়ার বিশ্লেষিতাংশ অনুভূমিক দিকে X এবং উল্লম্ব দিকে Y। ধর, দণ্ডের দৈর্ঘ্য $2a$; C বিন্দুতে ভার W ক্রিয়া করে এবং দড়ির টান T. অনুভূমিক এবং উল্লম্বদিকে বিশ্লেষণ করিয়া,



$$X = T\cos\theta \qquad \text{(i)}$$

$$Y = W - T\sin\theta \qquad \text{(ii)}$$

কব্জার চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$T.\,2a\sin 2\theta = W a\cos\theta$$

বা, $$T\,2.2\sin\theta.\cos\theta = W\cos\theta$$

বা, $$T = \frac{W}{4\sin\theta}.\quad\therefore\quad X = \frac{W}{4}\frac{\cos\theta}{\sin\theta},\quad Y = W - \frac{W}{4} = \frac{3}{4}W$$

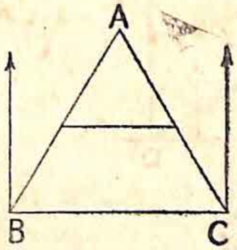
এখন কব্জার প্রতিক্রিয়া $= \sqrt{X^2+Y^2}$

$$= \frac{W}{4}\sqrt{\cot^2\theta + 9} = \frac{W}{4}\sqrt{8+\operatorname{cosec}^2\theta}.$$

উদা. 7. দুইটি সমদণ্ড AB, AC প্রত্যেকে 6 ফুট দীর্ঘ ; ইহারা A বিন্দুতে কব্জা দিয়া আটকানো আছে। B এবং C কে মসৃণ অনুভূমিক সমতলে রাখিয়া ABC-কে উল্লম্ব সমতলে রাখা হইয়াছে। 4 ফুট দীর্ঘ একটি দড়ি দণ্ড দুইটির মধ্যবিন্দুদ্বয়কে যোগ করিয়াছে। যদি প্রত্যেক দণ্ডের ভার 20 পাউণ্ড হয়, তাহা হইলে দড়ির টান এবং A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

ধর, দড়ির টান T এবং A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া S. আরও মনে কর, B এবং C বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া প্রত্যেকে R. সংযুক্ত ভাবে দণ্ড দুইটির সাম্যাবস্থা বিবেচনা করিয়া

$$2R = 2W. \quad \text{বা,} \quad R = W = 20 \text{ পা.}$$



এখন একটি দণ্ড AB-র সাম্যাবস্থা বিবেচনা কর।

অনুভূমিক দিকে বিশ্লেষণ করিলে T = S

AB র মধ্যবিন্দু D-র চারিদিকে ভ্রামক লইয়া (দণ্ডের নতি অনুভূমিকের সঙ্গে θ ধর)

$$-R.\ 3\cos\theta + S.\ 3\sin\theta = 0$$

বা, $R = S\tan\theta$; $\cos\theta = \frac{2}{3}$,

$\therefore \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}. \quad \therefore \quad 20 = S\frac{\sqrt{5}}{2}$; বা, $S = T = \frac{40}{\sqrt{5}} = 8\sqrt{5}$ পা.

উদা. 8 একটি সমদণ্ডের ভার W, ইহার এক প্রান্ত মসৃণ অনুভূমিক সমতল AC-র উপর আছে ; অপর প্রান্ত প্রথম সমতলের সহিত 60° নত একটি তলের উপর আছে। যদি CB-র সমান দৈর্ঘ্যের একটি দড়ি AC-র দ্বারা দণ্ডটিকে না সরিতে পারে এরূপ রাখা হয় তাহা হইলে দড়ির টান নির্ণয় কর।

ধর, দড়ির টান T, A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া R এবং B বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া S. A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

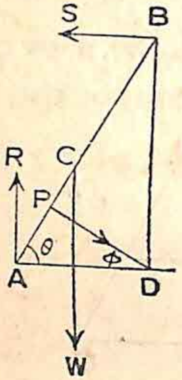
$$S.\ AB\sin 60^\circ = W.\frac{AB}{2}\cos 30^\circ \; ; \quad \therefore \quad S = \frac{W}{2}.$$

অনুভূমিক দিকে বিশ্লেষণ করিলে $T = S\cos 30^\circ = \frac{W}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{W}{4}\sqrt{3}$

উদা. 9. W ভারের একটি দণ্ড ইহার ভারকেন্দ্রের দ্বারা AC এবং BC দুইভাগে বিভক্ত হইয়াছে ; ইহাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a এবং b। দণ্ডটি উল্লম্ব সমতলে রক্ষিত হইয়াছে ; ইহার একপ্রান্ত AD মসৃণ অনুভূমিক মেজেতে আছে এবং অপর প্রান্ত মসৃণ DB দেওয়ালের গায়ে ঠেস দিয়া রাখা হইয়াছে। একটি দড়ি D-তে একটি আংটাতে দণ্ডের একটি বিন্দু P-তে যুক্ত আছে। যদি দড়ির টান T হয় এবং অনুভূমিকের সহিত দণ্ডের ও দড়ির নতি যথাক্রমে θ এবং ϕ হয়, দেখাও যে

$$T = W \frac{a \cos \theta}{(a+b) \sin (\theta - \phi)}.$$

দণ্ডের উপর চারটি বল ক্রিয়া করিতেছে—(1) দণ্ডের ভার নিম্নাভিমুখে C বিন্দুতে, (2) A বিন্দুতে মসৃণ অনুভূমিক সমতলের প্রতিক্রিয়া R ঊর্ধ্বাভিমুখে, (3) B বিন্দুতে মসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া S অনুভূমিক দিকে, (4) দড়ির টান T



অনুভূমিক দিকে বিশ্লেষণ করিয়া $T \cos \phi = S$

A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$T (a+b) \cos \theta \sin \phi + W a \cos \theta$

$= S(a+b) \sin \theta = T \cos \phi \, (a+b) \sin \theta.$

বা, $T(a+b)(\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi)$

$= W. a \cos \theta$.

$$\therefore \quad T = W \frac{a \cos \theta}{(a+b) \sin (\theta - \phi)}.$$

উদা. 10. R ব্যাসার্ধের এবং W ভারের একটি ফাঁপা স্তম্ভক উভয় প্রান্তে খোলা; ইহাকে একটি মসৃণ অনুভূমিক সমতলের উপর রাখা হইয়াছে। দুইটি r ব্যাসার্ধের সমান গোলক, $2r > R$ এবং $< 2R$, ইহার ভিতর রাখা হইল। প্রত্যেক গোলকের ভার w হইলে দেখাও যে যদি $WR = 2w(R - r)$ হয় তাহা হইলে স্তম্ভকটি ঠিক উল্টাইয়া যাইবার পূর্ব অবস্থায় আছে।

যেহেতু স্তম্ভকটি উল্টাইয়া যাইবার পূর্বাবস্থায় আছে, মাটির প্রতিক্রিয়া N কেবলমাত্র C বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

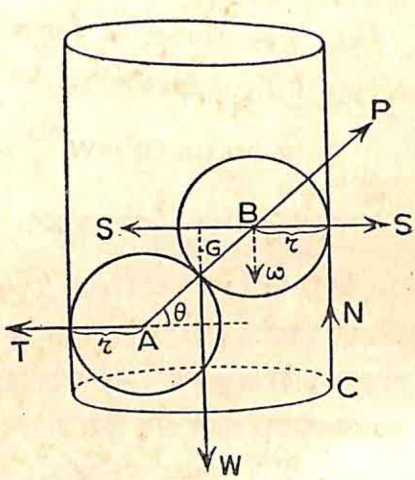
স্তম্ভকের উপর ক্রিয়মাণ বল

(1) উপরের গোলকের প্রতিক্রিয়া S

(2) নীচের গোলকের প্রতিক্রিয়া T

(3) স্তম্ভকের ভার W তাহার কেন্দ্রের ভিতর দিয়া উল্লম্ব নিম্নাভিমুখে।

(4) C বিন্দুতে মসৃণ সমতলের প্রতিক্রিয়া ঊর্ধ্বাভিমুখে।



অনুভূমিক এবং উল্লম্বদিকে বিশ্লেষণ করিয়া $S = T \cdots$(i) $N = W \cdots$(ii)

ধর, গোলক দুইটির কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখা অনুভূমিকের সহিত θ কোণ করে।

C বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া $Tr - S(r + 2r \sin \theta) + WR = 0 \cdots (iii)$

(i) এবং (iii) হইতে, $T = \frac{WR}{2r \sin \theta} \cdots (iv)$

এখন উপরের গোলকের সাম্যাবস্থা বিবেচনা কর। ইহার উপর ক্রিয়মাণ বল

(1) ইহার ভার w কেন্দ্র B বিন্দুতে উল্লম্ব নিম্নাভিমুখে, (2) স্তম্ভকের ক্রিয়া S, (3) নীচের বলের প্রতিক্রিয়া (AB অভিমুখে)

অনুভূমিক এবং উল্লম্বদিকে বিশ্লেষণ করিয়া

$$P \cos \theta = S \cdots (v) ; \ P \sin \theta = w \cdots (vi)$$

এখন (i) হইতে, $T = S = P \cos \theta = \frac{w \cos \theta}{\sin \theta} \ldots (vii)$

(iv) এবং (vii) হইতে $\frac{w \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{WR}{2r \sin \theta}$.

$\therefore \ WR = 2wr \cos \theta = 2w(R - r)$.

উদা. 11. একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DA}$ বাহু বরাবর P, Q, R, S বল ক্রিয়া করে ; A এবং B বিন্দু বৃত্তের একটি ব্যাসের উপর আছে। যদি বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকে তাহা হইলে প্রমাণ কর যে

$$R^2 = P^2 + Q^2 + S^2 + \frac{2PQS}{R}$$ [C. U. 1945]

বলগুলি সাম্যাবস্থায় আছে বলিয়া B বিন্দুতে ক্রিয়মাণ P এবং Q বলের লব্ধি D বিন্দুতে ক্রিয়মাণ R এবং S বলের লব্ধির সমান ও বিপরীতমুখী।

$\therefore \ P^2 + R^2 + 2PQ \cos (180^\circ - B) = R^2 + S^2 + 2RS \cos (180^\circ - D)$

বা, $P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B = R^2 + S^2 - 2RS \cos D$

$= R^2 + S^2 + 2RS \cos B \ldots (i)$ [কারণ $D = 180^\circ - B$.]

এখন B বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া $R.BC \sin C + S.AB \sin A = 0$.

কিন্তু $\sin C = \sin (180^\circ - A) = \sin A$.

$\therefore \ R.BC + S.AB = 0$ বা, $R \times \frac{BC}{AB} + S = 0$

বা, $R \cos B + S = 0 \quad \therefore \ \cos B = -\frac{S}{R}$

এখন সমীকরণ (i)-এতে স্থাপন করিয়া

$$P^2 + Q^2 + \frac{2PQS}{R} = R^2 + S^2 + 2RS\left(-\frac{S}{R}\right).$$

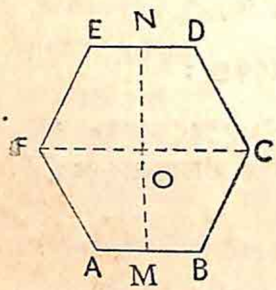
বা, $R^2 = P^2 + Q^2 + S^2 + \frac{2PQS}{R}$.

উদাহরণমালা IX

উদা. 1. দেখাও যে একটি সমষড়ভুজের ছয় শীর্ষে ছয়টি সমান ভারের কণা রাখিলে তাহাদের ভারকেন্দ্র ষড়ভুজের কেন্দ্র।

মনে কর, ABCDEF সমষড়ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলিতে w সমান ভারের কণা রাখা হইয়াছে।

এখন, A এবং B বিন্দুতে রক্ষিত সমান ভার দুইটির ভারকেন্দ্র AB-র মধ্যবিন্দু M; D এবং E বিন্দুতে রক্ষিত সমান ভার দুইটির ভারকেন্দ্র DE-র মধ্যবিন্দু N। M বিন্দুতে $2w$ এবং N বিন্দুতে $2w$ -এর ভারকেন্দ্র MN সরলরেখার মধ্যবিন্দু O। আবার C এবং F বিন্দুতে সমানভার w-এর ভারকেন্দ্র CF সররেখার মধ্যবিন্দু। MN এবং CF-এর মধ্যবিন্দু এক। ষড়ভুজের কেন্দ্র O। অতএব কৌণিক বিন্দুতে রক্ষিত ছয়টি সমান কণার ভারকেন্দ্র ষড়ভুজের কেন্দ্রে অবস্থিত।



উদা. 2. ABCD চতুর্ভুজে A, B, C, D কোণে 2, 2, 3, 3 ভার রাখা হইয়াছে। ইহাদের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

A এবং B-তে 2 এবং 2 ভারের ভারকেন্দ্র AB-মধ্যবিন্দু M.

C এবং D-তে 3 এবং 3 ভারের ভার-কেন্দ্র CD-র মধ্যবিন্দু N.

এখন M বিন্দুতে 4 এবং N বিন্দুতে 6 ভারের ভারকেন্দ্র G এমনভাবে MN-এর উপর আছে যেন $\frac{MG}{NG}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.

$\therefore$ এই চারিটি ভারের ভারকেন্দ্র AB এবং CD-র মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখার উপর আছে যেন $\frac{MG}{NG}=\frac{3}{2}$ অর্থাৎ $MG=\frac{3}{5}$ MN.

উদা. 3. একটি সমদণ্ডের দৈর্ঘ্য 4 ফুট এবং ভার 5 পাউণ্ড। ইহার উপর 1, 2, 3, 4 এবং 5 পাউণ্ড ভার একপ্রান্ত হইতে আরম্ভ করিয়া 1 ফুট অন্তর রাখা হইয়াছে। ইহাদের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

ধর, ভারকেন্দ্রের দূরত্ব প্রান্ত হইতে $\bar{x}$, তাহা হইলে

$$\bar{x}=\frac{1\times0+2\times1+3\times2+4\times3+5\times4+5\times2}{1+2+3+4+5}$$

$$=\frac{2+6+12+20+10}{20}=\frac{50}{20}=2\tfrac{1}{2} \text{ ফুট।}$$

উদা. 4 একটি ত্রিভুজাকৃতি সমপাতের তিনটি বাহু 9, 12 এবং 15 সেমি.। প্রত্যেক বাহু হইতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

ত্রিভুজটি সমকোণী, কারণ, $15^2=9^2+12^2$.

$$9 \text{ সে.মি. দীর্ঘ বাহু হইতে দূরত্ব} = \frac{w \times 12}{3w} = 4 \text{ সে.মি.}$$

$$12 \text{ সে.মি. দীর্ঘ বাহু হইতে দূরত্ব} = \frac{w \times 9}{3w} = 3 \text{ সেমি.}$$

$$15 \text{ সে.মি. দীর্ঘ বাহু হইতে দূরত্ব} = \frac{p \times w}{3w} = \frac{p}{3}.$$

এবং $p \times 15 = 9 \times 12 =$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ

অতএব দূরত্ব $= \frac{9 \times 12}{15 \times 3} = \frac{12}{5} = 2{\cdot}4$ সে.মি.।

উদা. 5. দেখাও যে একটি ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র এবং বাহুগুলির মধ্যবিন্দুতে তিনটি সমান ভারের কণার ভারকেন্দ্র একই।

মনে কর, ABC ত্রিভুজে BC, CA এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E এবং F.

D বিন্দুতে স্থাপিত w ভার = B তে $\frac{w}{2}$ এবং C-তে $\frac{w}{2}$

E বিন্দুতে স্থাপিত w ভার = C-তে $\frac{w}{2}$ এবং A-তে $\frac{w}{2}$

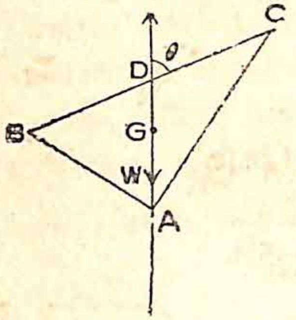
F বিন্দুতে স্থাপিত w ভার = A-তে $\frac{w}{2}$ এবং B-তে $\frac{w}{2}$

অতএব ইহারা A বিন্দুতে $\left(\frac{w}{2}+\frac{w}{2}\right)$ বা w, B বিন্দুতে w এবং C বিন্দু w-এর সমান।

কিন্তু A, B, C বিন্দুতে স্থাপিত তিনটি সমান ভার w-এর ভারকেন্দ্র এবং ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র একই।

উদা. 6. একটি ত্রিভুজাকৃতি সমপাতের বাহুগুলি 9, 12 এবং 15 সে.মি.। ইহাকে একটি দড়ির সাহায্যে দীর্ঘতম বাহুর মধ্য বিন্দু হইতে ঝুলান হইয়াছে। উল্লম্বের সহিত এই বাহুর নতি নির্ণয় কর।

ধর, BC বৃহত্তম বাহুর মধ্যবিন্দু D হইতে পাতটি ঝুলান হইয়াছে। ভার এবং দড়ির টান, এই দুইটি বল সমান ও বিপরীতমুখী। অতএব DA উল্লম্বরেখা। যেহেতু $9^2+12^2=15^2$



$\therefore$ $\angle BAC=90^\circ$. ABC সমকোণী ত্রিভুজ বলিয়া DA = DC. $\therefore$ $\theta=2C$.

এখন $\sin\theta=\sin 2C=2\sin C\cos C$

$$=2\times\frac{9}{15}\times\frac{12}{15}=\frac{24}{25}.$$

অতএব $\theta=\sin^{-1}\frac{24}{25}=\cos^{-1}\frac{7}{25}$.

উদা. 7. ABCD বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহু 10 ইঞ্চি। ইহার A, B, C, D কোণে 4, 5, 6 এবং 7 পাউণ্ড ভার রাখা হইয়াছে। ইহাদের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

AB এবং AD বাহুকে অক্ষ লইয়া ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\bar{x}$, $\bar{y}$ ধর।

$\bar{x}=\frac{5\times10+6\times10}{4+5+6+7}=\frac{110}{22}=5$ ইঞ্চি $\bar{y}=\frac{6\times10+7\times10}{22}=\frac{130}{22}=5\frac{10}{11}$ ইঞ্চি।

উদা. 8. একটি ঘনাকৃতি বাক্সের উপরের ঢাকনাটি নাই। ইহার ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

প্রতিসাম্য হইতে ভূমির লম্ব চারিটি তলের ভারকেন্দ্র ঘনের কেন্দ্র O. ভূমির ভার তাহার কেন্দ্র M বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

বাক্সের ভার-কেন্দ্র G, MO রেখার উপর এবং $MG=\dfrac{w\times0+4w\times\frac{a}{2}}{5w}=\frac{2}{5}a.$

উদা. 9. একটি সমকোণী ত্রিভুজে সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুইটি হইতে ইহার ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

ধর, সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুইটি a এবং b.

আমরা জানি, ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র এবং ইহার কোণিক বিন্দুতে স্থাপিত তিনটি সমভারের ভারকেন্দ্র এক।

a বাহু হইতে ভার-কেন্দ্রের দূরত্ব $=\frac{w.b}{3w}=\frac{b}{3}$; b বাহু হইতেদূরত্ব $=\frac{w.a}{3w}=\frac{a}{3}$.

উদা. 10. তিনজন লোক W ভারের একটি ত্রিকোণ পাত তিন কোণে বহন করিলে প্রত্যেকের উপর কত ভার পড়িবে ?

ত্রিকোণ পাতের ভারকেন্দ্র G বিন্দুতে W ইহার তিন কোণে $\frac{W}{3}$, $\frac{W}{3}$, $\frac{W}{3}$-এর সমান এবং ভারকেন্দ্র একই। অতএব প্রত্যেক ব্যক্তি $\frac{W}{3}$ ভার বহন করে।

উদা. 11. ABCD বর্গক্ষেত্রের সহিত অর্ধ বর্গক্ষেত্র BEC যুক্ত করা হইয়াছে, ABED চতুর্ভুজের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

মনে কর, বর্গক্ষেত্রের ভার W, তাহা হইলে অর্ধবর্গক্ষেত্র BEC র ভার $\frac{1}{2}$W. ধর বর্গক্ষেত্রের বাহু a. AE এবং AD বাহুদ্বয়কে অক্ষ লইয়া, মনে কর, ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\bar{x}, \bar{y})$। তাহা হইলে,

$$\bar{x}=\frac{W.\frac{a}{2}+\frac{W}{2}.\frac{4}{3}a}{W+\frac{W}{2}}=a.\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{2}}=a.\frac{7}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{7}{9}a$$

$$\bar{y}=\frac{W.\frac{a}{2}+\frac{W}{2}.\frac{a}{3}}{W+\frac{W}{2}}=a\times\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}{\frac{3}{2}}=a\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}a.$$

উদা. 12. r-ব্যাসার্ধের একটি সমবৃত্তাকার পাত হইতে একটি বৃত্তাকার অংশ কাটিয়া ফেলা হইয়াছে। এই অংশ পাতের কেন্দ্রের ভিতর দিয়া গিয়াছে এবং ব্যাস $\frac{1}{3}r$; অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

ধর, সমস্ত বৃত্তের ক্ষেত্রফল A, এবং কাটিয়া ফেলা অংশের ক্ষেত্রফল A_1

এখন $A=\pi r^2$ এবং $A_1=\pi\left(\frac{r}{6}\right)^2=\frac{1}{36}\pi r^2$.

অতএব সমগ্র পাতের ভার W হইলে কাটিয়া ফেলা অংশের ভার $\frac{1}{36}$W এবং

অবশিষ্ট অংশের ভার $W-\frac{1}{36}W=\frac{35}{36}W$.

ভারকেন্দ্র সমগ্র বৃত্তের কেন্দ্র এবং কাটিয়া ফেলা অংশের কেন্দ্রের সংযোজক সরল রেখার উপর কর্তিত অংশের অপরদিকে আছে

$$\frac{35}{36}W.OG=\frac{W}{36}.\frac{r}{6};\ \therefore\ \ OG=\frac{r}{6\times35}=\frac{r}{210}.$$

উদা. 13. 6 সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার পাত হইতে 2 সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার অংশ কাটিয়া ফেলা হইয়াছে। যদি এই ছেঁদার কেন্দ্র পাতের কেন্দ্র হইতে 3 সেন্টিমিটার দূরে থাকে, তাহা হইলে অবশিষ্ট অংশের ভার-কেন্দ্র নির্ণয় কর।

অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র কাটিয়া ফেলা অংশের কেন্দ্র এবং সমগ্র বৃত্তের কেন্দ্রের

সংযোজক সরল রেখার উপর কর্তিত অংশের অপর দিকে আছে। বৃত্তের কেন্দ্র O এবং অবশিষ্ট অংশের ভার-কেন্দ্র G।

$$(\pi.6^2-\pi.2^2)OG=\pi.2^2.3 \quad OG=\frac{4\times3}{36-4}=\frac{12}{32}=\frac{3}{8} \text{ সে.মি.।}$$

উদা. 14. 3 ফুট ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার পাতে এক ফুট ব্যাসার্ধের এমন একটি ছেঁদা করিতে হইবে যেন অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র বৃত্তের কেন্দ্র হইতে 2 ইঞ্চি দূরে হয়; ছেঁদার কেন্দ্র নির্ণয় কর।

ধর, C ছেঁদার কেন্দ্র, O সমগ্র পাতের কেন্দ্র এবং G অবশিষ্ট অংশের ভার-কেন্দ্র। ইহারা একটি সরল রেখার উপর আছে; OG = 2 ইঞ্চি = $\frac{2}{12}$ ফুট

$$\pi.1^2.OC=\pi(3^2-1^2)\times\frac{2}{12}\cdot \quad \therefore \quad OB=\frac{8\times2}{12}=\frac{4}{3} \text{ ফুট।}$$

উদা. 15. ABCDEF একটি সম ষড়ভুজ। ইহার A, B. C, D, E বিন্দুতে পাঁচটি সমান ভারের কণা রাখা হইয়াছে; ইহাদের ভার কেন্দ্র নির্ণয় কর।

প্রতিসাম্য বিবেচনা করিয়া A, B, এবং D, E তে চারিটি সমভারের ভারকেন্দ্র কেন্দ্রে অবস্থিত। এখন O কেন্দ্রে $4w$ এবং C বিন্দুতে w ভারের ভারকেন্দ্র G হইলে

$$4w.OG=w(OC-OG)\text{; বা, } 5OG=OC\text{; } \therefore \quad OG=\tfrac{1}{5}OC.$$

উদা. 16. 3, 4, 3, 5, 8, এবং 5 গ্রাম ভার একটি সমষড়ভুজ কৌণিক বিন্দু সমূহে যথাক্রমে স্থাপন করা হইয়াছে; ইহাদের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

ABCDEF ষড়ভুজের AB এবং AB-র লম্ব সরলরেখা অর্থাৎ AEকে অক্ষ লইয়া ধর, ভারকেন্দ্রের স্থানঙ্ক $(\bar{x}, \bar{y})$। তাহা হইলে (ষড়ভুজের প্রত্যেক বাহু a ধর)

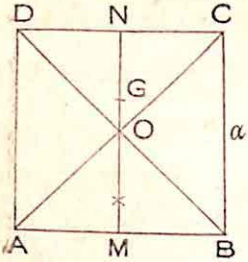
$$\bar{x}=\frac{4a+3(a+a\cos 60^\circ)+5a-5a\cos 60^\circ}{3+4+3+5+8+5}=\frac{12a-2a\times\frac{1}{2}}{28}=\frac{11}{28}a.$$

$$\bar{y}=\frac{3a\sin 60^\circ+5\times2a\sin 60^\circ+8\times2a\sin 60^\circ+5a\sin 60^\circ}{28}$$

$$=\frac{34a\sin 60^\circ}{28}=\frac{17\sqrt{3}}{28}a.$$

উদা. 17. ABCD একটি বর্গক্ষেত্র; O ইহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু। যদি AOB ত্রিভুজ অপসারিত হয়, অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর। [U.P. 1951]

ধর অপসারিত অংশের ভার w_1 কর্ণদ্বয় বর্গক্ষেত্রকে 4টি সমান ত্রিভুজে বিভক্ত করে। অতএব অবশিষ্ট অংশের ভার $3w$.

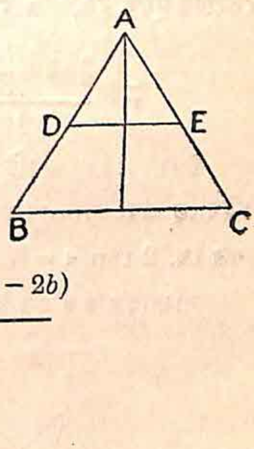


অপসারিত অংশের ভারকেন্দ্র O এবং AB-র মধ্যবিন্দু M-এর সংযোগ সরল রেখার উপর O হইতে $\frac{2}{3}$ OM দূরে। সমগ্র বর্গক্ষেত্রের ভর-কেন্দ্র O বিন্দুতে। অবশিষ্ট অংশের ভরকেন্দ্র G বর্ধিত MO-র উপর অর্থাৎ MN সরল রেখার উপর (N বিন্দু CD-র মধ্যবিন্দু)।

এখন, $3\,w.\text{OG}=w.\frac{2}{3}\text{OM}=w.\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}a$; $\therefore$ $\text{OG}=\frac{1}{9}a$ [a বর্গক্ষেত্রের বাহু]

উদা. 18. একটি ত্রিভুজ ABC হইতে ADE অংশ অপসারিত হইয়াছে ; DE সরলরেখা BC-র সমান্তরাল। যদি BC এবং DE হইতে A-র দূরত্ব যথাক্রমে a এবং b হয়, দেখাও যে BC হইতে অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\frac{a^2+ab-2b^2}{3(a+b)}$.

[C. U. 1938]



মনে কর, BC হইতে নির্ণেয় ভার কেন্দ্রের দূরত্ব $\bar{y}$; A সমগ্র ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, A_1 অপসারিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

এখন $\frac{A_1}{A}=\frac{BC^2}{DE^2}=\frac{b^2}{a^2}$ $\therefore$ $A_1=\frac{b^2}{a^2}A$.

$$\bar{y}=\frac{A.\frac{1}{3}a-\frac{b^2}{a^2}\,A\left\{(a-b)+\frac{b}{3}\right\}}{A\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}=\frac{\frac{1}{3}a-\frac{b^2}{3a^2}(3a-2b)}{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{a^3-3ab^2+2b^3}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab-2b^2}{3(a+b)}$$

উদা. 19. AB এবং AC দুইটি সমদণ্ড ; ইহাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ এবং $2b$. যদি $\angle BAC=\theta$ হয়, প্রমাণ কর যে A বিন্দু হইতে দণ্ড দুইটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব

$$\frac{(a^4+2a^2b^2\cos\theta+b^4)^{\frac{1}{2}}}{a+b}$$ [C.U. 1939]

AB এবং A-র ভিতর দিয়া AB-র লম্ব সরলরেখাকে অক্ষ লইয়া $(\bar{x}, \bar{y})$ ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ধর। তাহা হইলে—

$$\bar{x}=\frac{2a.a+2b.b\cos\theta}{2a+2b}=\frac{a^2+b^2\cos\theta}{a+b}.$$

$$\bar{y}=\frac{2a.0+2b.b\sin\theta}{2a+2b}=\frac{b^2\sin\theta}{a+b}.$$

এখন $AG^2=\bar{x}^2+\bar{y}^2=\frac{a^4+b^4+2a^2b^2\cos\theta}{(a+b)^2}$

$$\therefore\quad AG=\frac{(a^4+2a^2b^2\cos\theta+b^4)^{\frac{1}{2}}}{a+b}$$

উদা. 20. একটি ট্রাপিজিয়ামের দুইটি সমান্তরাল বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং b; ইহাদের মধ্যে দূরত্ব h ; a বাহু হইতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB বাহু $=a$, CD $=b$. AC যুক্ত কর। ABCD ট্রাপিজিয়াম ABC এবং ADC ত্রিভুজ লইয়া গঠিত।

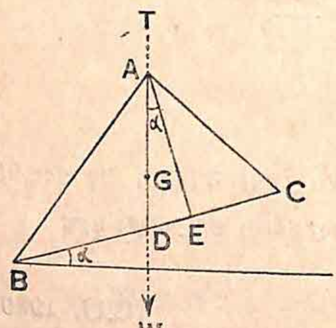
$$\triangle ABC=\tfrac{1}{2}ah,\ \triangle ADC=\tfrac{1}{2}bh.$$

a বাহু হইতে ABC ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\frac{1}{3}h$ এবং ADC ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\frac{2}{3}h$. a বাহু হইতে ট্রাপিজিয়ামের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\bar{y}$ হইলে

$$\bar{y}=\frac{\frac{1}{2}ah\times\frac{h}{3}+\frac{1}{2}bh\times\frac{2}{3}h}{\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh}=\frac{h}{3}\times\frac{a+2b}{a+b}$$

উদা. 21. একটি সমভারের ত্রিকোণপাত ABC কে A কোণ হইতে ঝুলান হইয়াছে এবং সাম্যাবস্থায় BC বাহু অনুভূমিকের সঙ্গে α কোণ করিয়া আছে। প্রমাণ কর যে, $2\tan\alpha=\cot B-\cot C$.

সাম্যাবস্থায় দড়ির টান এবং পাতের ভার সমান ও বিপরীতমুখী। অতএব AG উল্লম্ব রেখা। কিন্তু ভারকেন্দ্র G মধ্যমা AD-র উপর আছে, অতএব AD রেখা উল্লম্ব ভাবে আছে।



BC-র উপর AE লম্ব অঙ্কিত কর; তাহা হইলে $\angle EAD=\alpha$

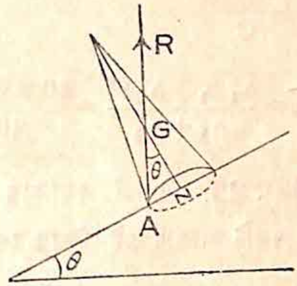
এখন, $2\tan\alpha=\frac{2ED}{AE}$

$$=\frac{EB-BD+CD-CE}{AE}\quad[\because\ BD=CD]$$

$$=\frac{EB-CE}{AE}=\frac{EB}{AE}-\frac{CE}{AE}=\cot B-\cot C.$$

উদা. 22. একটি ঘন শঙ্কুর উচ্চতা h এবং ইহার ভূমি r ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত। ইহাকে একটি নততলে না সরিয়া যায় এমন অবস্থায় রাখা হইয়াছে। যদি তলের নতি ক্রমশ বাড়ান যায় কখন শঙ্কুটি উল্টাইয়া যাইবে নির্ণয় কর।

যখন শঙ্কুটি উল্টাইয়া যাইবার উপক্রম করে তখন ইহার A-বিন্দুতে মাত্র ভূমির প্রতিক্রিয়া ক্রিয়া করে। যেহেতু এই প্রতিক্রিয়া শঙ্কুর ভারের সমান ও বিপরীতমুখী। অতএব AG সরলরেখা উল্লম্ব। তলের নতি $\theta = \angle AGN$



$\tan\theta = \tan\ AGN$

$= \frac{AN}{GN} = \frac{r}{\frac{1}{4}h} = \frac{4r}{h} = 4\tan\alpha$

α কোণের শীর্ষকোণের অর্ধেক।

উদা. 23. একটি সরু সমভার তারকে বাঁকাইয়া ABC ত্রিভুজ করা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে ইহার ভারকেন্দ্র এবং কৌণিক বিন্দু A, B, C তে তিনটি ভার $\frac{1}{2}(b+c)$ $\frac{1}{2}(c+a)$, $\frac{1}{2}(a+b)$ এর ভারকেন্দ্র এক। a, b, c যথাক্রমে BC. CA, AB বাহুর দৈর্ঘ্য।

প্রত্যেক বাহুর ভার তাহার মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়া করে।

BC বাহুর ভার aw ইহার মধ্যবিন্দু D-তে ক্রিয়মাণ, ইহা B এবং C বিন্দুতে $\frac{1}{2}aw$ এবং $\frac{1}{2}aw$ সমান অর্থাৎ BC বাহুর ভার = B বিন্দুতে $\frac{1}{2}aw$ + C বিন্দুতে $\frac{1}{2}aw$.

এইরূপে CA বাহুর ভার bw = C বিন্দুতে $\frac{1}{2}bw$ + A বিন্দুতে $\frac{1}{2}bw$

এবং AB বাহুর ভার cw = A বিন্দুতে $\frac{1}{2}cw$ + B বিন্দুতে $\frac{1}{2}cw$

তাহা হইলে, A বিন্দুতে $\frac{1}{2}(b+c)w$, B বিন্দুতে $\frac{1}{2}(c+a)w$. এবং C বিন্দুতে $\frac{1}{2}(a+b)w$.

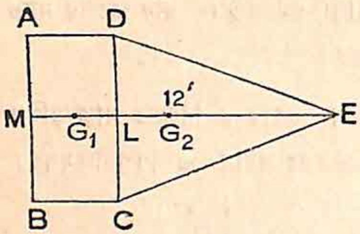
অতএব ত্রিভুজাকৃতি ABC তারের ভারকেন্দ্র এবং কৌণিক বিন্দু A, B, C তে তিনটি ভার $\frac{1}{2}(b+c)$, $\frac{1}{2}(c+a)$, $\frac{1}{2}(a+b)$-র ভারকেন্দ্র এক।

উদা. 24. একটি সমভার পিতলের পাত একটি আয়তক্ষেত্র ABCD এবং আয়তক্ষেত্রের বাহিরে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ CDE লইয়া গঠিত। AB বাহু হইতে পাতের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর। দেওয়া আছে যে—

AB = 10 সেমি., AD = 4 সেমি. এবং CE = DE = 13 সেমি.

L এবং M যথাক্রমে CD এবং AB-র মধ্যবিন্দু। ভারকেন্দ্র ELM রেখার উপর আছে। $EL = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ সেমি. $MG_1 = 2$ সেমি.,

$MG_2 = ML + \frac{1}{3}EL = 4 + 4 = 8$ সেমি.



পাতের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব মনে কর $\overline{x}$.

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 10 \times 4$

$= 40$ বর্গ সেমি.।

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

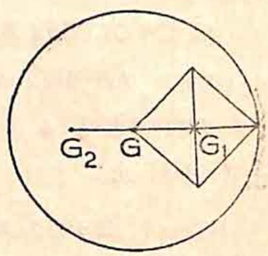
$= \frac{1}{2} \times 10 \times 12 = 60$ সেমি.।

$$\overline{x} = \frac{A_1x_1 + A_2x^2}{A_1 + A_2} = \frac{40 \times 2 + 60 \times 8}{40 + 60} = \frac{80 + 480}{100} = \frac{560}{100} = 5{\cdot}6 \text{ সেমি.।}$$

উদা. 25. একটি বৃত্তাকার পাতে একটি বর্গক্ষেত্রাকার ছেঁদা করা হইয়াছে এবং বৃত্তের একটি ব্যাসার্ধ এই ছেঁদার কর্ণ। যদি বৃত্তের ব্যাস a হয়, তাহা হইলে দেখাও যে অবশিষ্ট পাতের ভারকেন্দ্র বৃত্তের কেন্দ্র হইতে $\frac{a}{8\pi - 4}$ দূরে। [U. P. 1945

সমগ্র বৃত্তের ভারকেন্দ্র তাহার কেন্দ্র G তে অবস্থিত। বর্গক্ষেত্রাকৃতি অংশের কর্ণ $\frac{a}{2}$, ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{8}$। ধর, পাতের একক ক্ষেত্রের ভার w,

তাহা হইলে বর্গক্ষেত্রাকৃতি অংশের ভার $W_1 = \frac{a^2}{8}w$. এবং ইহার ভারকেন্দ্র G বিন্দুগামী কর্ণের মধ্যবিন্দু। $\therefore \quad GG_1 = \frac{a}{4}$.



অবশিষ্ট পাতের ক্ষেত্রফল

$$= \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{8} = \frac{a^2}{8}(2\pi - 1)$$

$$\text{ভার } W_2 = \frac{a_2}{8}(2\pi - 1)w.$$

ধর G_2 অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র। ইহা বর্ধিত G_1G-এর উপর অবস্থিত এবং $W_2GG_2 = W_1.GG_1$

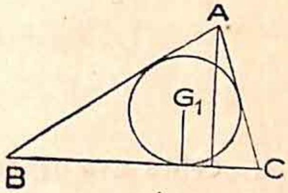
অর্থাৎ $GG_2 = \frac{a}{4}\cdot\frac{W_1}{W_2} = \frac{a}{4}\cdot\frac{1}{2\pi - 1} = \frac{a}{8\pi - 4}$.

উদা. 26. ABC একটি ত্রিভুজাকৃতি সমপাত। ইহা হইতে অন্তর্বৃত্তাকার অংশ অপসারিত হইয়াছে। দেখাও যে ত্রিভুজের BC বাহু হইতে অবশিষ্ট অংশের

ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\frac{S}{3as}\cdot\frac{2s^3-3\pi aS}{s^2-\pi S}$. যেখানে, S ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল এবং s ইহার অর্ধ পরিসীমা। [U. P. 1953 ; C.H. 1965]

ত্রিভুজের ভার $W = Sw$ অন্তর্বৃত্তের ভার $= \pi r^2 w$

ধর, A হইতে BC-র উপর লম্বের দৈর্ঘ্য p, সমগ্র ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব BC হইতে $\frac{p}{3}$; $pa = 2S$.



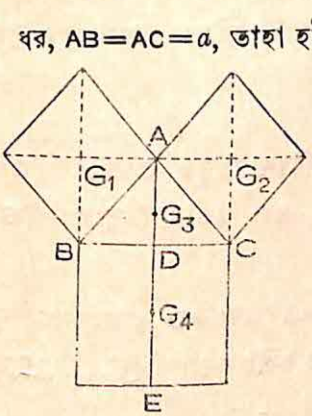
অন্তঃবৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = \frac{S}{s}$ (ত্রিকোণমিতি হইতে)

অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব BC হইতে যদি $\bar{x}$ হয়

$$\bar{x} = \frac{S\times\frac{p}{3} - \pi r^2 . r}{S - \pi r^2} = \frac{\frac{S.2S}{3a} - \pi\times\frac{S^3}{s^3}}{S - \pi\times\frac{S^2}{s^2}} = \frac{S}{3as}\cdot\frac{2s^3 - 3\pi aS}{s^2 - \pi S}$$

উদা. 27. একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর উপর বহির্দিকে তিনটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত হইয়াছে। এইরূপে গঠিত ক্ষেত্রটির ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

ধর, $AB = AC = a$, তাহা হইলে $BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.



AB এবং AC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটি সমান এবং প্রত্যেকের ভার W ধর। AB এবং AC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র G_1 এবং G_2, ত্রিভুজের শীর্ষ-বিন্দু A হইতে সমদূরবর্তী ; অতএব ইহাদের ভার 2W এই A বিন্দুতে ক্রিয়া করে। AD মধ্যমার উপর ABC ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র G_3, AD-র বর্ধিত রেখার উপর BC-র উপর অঙ্কিত ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র G_4, $AD = \frac{a}{\sqrt{2}}$ $BC = a\sqrt{2}$

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}a^2$; ভার $= \frac{1}{2}W$, BC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 2a^2$; ভার $= 2W$; $AD = \frac{1}{2}BC$.

সমগ্র ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র ADE সরলরেখার উপর আছে। ধর, A হইতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\bar{x}$.

১০ ঘর্ষণ

(Friction)

প্রয়োজনীয় জ্ঞাতব্য বিষয় ঃ

μ = ঘর্ষণাঙ্ক, R = অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া, λ = ঘর্ষণ কোণ ;

অতএব, সীমান্তঘর্ষণ = μR ও ইহা বস্তুর গতির বিপরীতদিকে ক্রিয়া করে এবং $\tan \lambda = \mu$

উদাহরণমালা—X

উদা. 1. একটি 40 পাউণ্ড ভরের বস্তু এক অমসৃণ অনুভূমিক তলে রাখা হইয়াছে। যদি 10 পাউণ্ড ভার বল অনুভূমিক দিকে প্রয়োগ করিলে ইহা চলিবার উপক্রম করে তাহা হইলে ঘর্ষণাঙ্ক এবং তলের লব্ধি প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

ধর, তলের অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া R

উল্লম্বদিকে বিশ্লেষণ করিয়া R = 40 পা. ভার ;

অনুভূমিক দিকে বিশ্লেষণ করিয়া $\mu R = 10 \quad \therefore \quad \mu = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{\cdot}25$

লব্ধি প্রতিক্রিয়া $= \sqrt{R^2 + \mu R)^2} = \sqrt{40^2 + 10^2} = 41{\cdot}23$ পা. ভার (প্রায়)।

উদা. 2. একটি নততলের দৈর্ঘ্য 10 ফুট এবং উচ্চতা 6 ফুট। নততলের সমান্তরাল ভাবে অন্যূন 12 পা. ভার বল প্রয়োগ করিলে তলের উপরিস্থ 30 পাউণ্ড ভরের বস্তুকে ধরিয়া রাখিতে পারা যায়। ঘর্ষণাঙ্ক নির্ণয় কর।

ধর, তলের অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া R তলের লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া

$R = 30 \cos \alpha = 30 \times \frac{4}{5} = 24$ পা. ভার [কারণ, $\sin \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$]

তল বরাবর বিশ্লেষণ করিয়া (যেহেতু বস্তুটি নীচের দিকে সরিতে চায় μR তল বরাবর উপরদিকে)

$$12 + \mu \times 24 = 30 \sin \alpha = 30 \times \frac{3}{5} = 18.$$

বা, $24\mu = 18 - 12 = 6. \quad \therefore \quad \mu = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0{\cdot}25$

উদা. 3. একটি অমসৃণ নততলের উচ্চতা এবং ভূমির অনুপাত 3 : 4, এই তলের উপর একটি বস্তু রাখিলে তাহাকে অনুভূমিক দিকে বস্তুর ভারের অর্ধেক বল প্রয়োগ করিয়া ধরিয়া রাখা যায়, ঘর্ষণাঙ্ক নির্ণয় কর।

ধর, অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া R, এবং তলের নতি α, প্রদত্ত $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. তলের লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া

$$R = W \cos \alpha + \frac{W}{2} \sin \alpha = W \times \frac{4}{5} + \frac{W}{2} \times \frac{3}{5} = W\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{10}\right) = \frac{11}{10} W.$$

তল বরাবর বিশ্লেষণ করিয়া, $\frac{W}{2} \cos \alpha + \mu R = W \sin \alpha$

$$\frac{W}{2} \cdot \frac{4}{5} + \mu \cdot \frac{11}{11} W = W \cdot \frac{3}{5}; \qquad \text{বা,} \quad \frac{11\mu}{10} = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \quad \mu = \frac{10}{11 \times 5} = \frac{2}{11} = 0{\cdot}181 \text{ (প্রায়)।}$$

উদা. 4. যদি 50 গ্রাম ভারের একটি বস্তু 30° নতিবিশিষ্ট একটি নততলে সীমাস্থ সাম্যাবস্থায় থাকে তাহা হইলে ঘর্ষণাঙ্ক নির্ণয় কর। তলটি যদি অনুভূমিক হইত তাহা হইলে কি ন্যূনতম বল প্রয়োগ করিয়া বস্তুটিকে সরাইতে পারা যাইত ?

$$R = 50 \cos 30^\circ = 50 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3} \text{ গ্রাম ভার।}$$

$$\mu R = W \sin \alpha \qquad \text{বা,} \quad \mu . 25\sqrt{3} = 50 \times \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{\cdot}577 \text{ (প্রায়)}$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, মনে কর P বল অনুভূমিকের সঙ্গে θ কোণ করিয়া প্রযুক্ত হইয়াছে। উল্লম্বদিকে এবং অনুভূমিক দিকে বিশ্লেষণ করিয়া

$$R + P \sin \theta = 50 \text{ ; বা, } R = 50 - P \sin \theta$$

$$P \cos \theta = \mu R = \mu(50 - P \sin \theta) = \frac{50}{\sqrt{3}} - \frac{P \sin \theta}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা,} \quad P\left(\cos \theta + \frac{\sin \theta}{\sqrt{3}}\right) = \frac{50}{\sqrt{3}}, \quad P = \frac{50}{\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta}$$

$$\text{বা,} \quad P = \frac{50}{2 \cos \theta \cos 30^\circ + \sin \theta \sin 30^\circ)} = \frac{25}{\cos(\theta - 30^\circ)}$$

ইহার ন্যূনতম মান = 25 গ্রাম ভার।

উদা. 5. একটি নততলের দৈর্ঘ্য 13 ফুট এবং উচ্চতা 5 ফুট। ইহার উপর 26 পাউণ্ড ভারের একটি বস্তু রাখা হইয়াছে। যদি ঘর্ষণাঙ্ক 0·25 হয়, তাহা হইলে কি পরিমাণ বল তল বরাবর প্রয়োগ করিলে বস্তুটি উপরদিকে চলিবার উপক্রম করিবে ?

তলের লম্বাভিমুখে এবং তল বরাবর বিশ্লেষণ কর। এখানে ঘর্ষণ বল নিম্নাভিমুখী এবং $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.

$$R = W \cos \alpha = 26 \times \frac{12}{13} = 24 \text{ পা. ভার}$$

$$P = 26 \sin \alpha + \mu \times 24 = 26 \times \tfrac{5}{13} + \tfrac{1}{4} \times 24 = 10 + 6 = 16 \text{ পা. ভার।}$$

উদা. 6. 8 পাউণ্ড ভারের একটি বস্তু 30° নতিবিশিষ্ট একটি নততলে সীমাস্থ সাম্যাবস্থায় আছে। তলের নতি যদি 60° হয় তবে কি ন্যূনতম বল তলের সমান্তরাল দিকে প্রয়োগ করিলে বস্তুটিকে ধরিয়া রাখিতে পারিবে?

প্রথম ক্ষেত্রে, $R = W \cos 30°$ এবং $\mu R = W \sin 30°$ $\therefore \mu = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, তলের লম্বাভিমুখী এবং তল বরাবর বিশ্লেষণ করিয়া

$$R = W \cos \alpha = 8 \cos 60° = 8 \times \tfrac{1}{2} = 4 \text{ পা. ভার।}$$

$$P + \mu R = W \sin \alpha \quad (\text{ঘর্ষণবল তল বরাবর উপরদিকে})$$

বা, $P + \frac{1}{\sqrt{3}} \times 4 = 8 \sin 60°$

বা, $P = \frac{8\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} = 4{\cdot}619$ পা. ভার (প্রায়)।

উদা. 7. ঘর্ষণবল একটি বস্তুকে 30° নতি বিশিষ্ট নততলের উপর ঠিক গড়াইয়া না পড়ে অবস্থায় রাখিতে পারে। দেখাও যে অন্তত বস্তুর ভারের সমান বল তল বরাবর উপরদিকে প্রয়োগ না করিলে বস্তুটিকে উপর দিকে টানিয়া তুলিতে পারে না।

[H. S. 1963]

প্রথম ক্ষেত্রে, তল বরাবর এবং তলের অভিলম্ব দিকে বিশ্লেষণ করিলে

$$W \sin \alpha = \mu R. \text{ এবং } W \cos \alpha = R; \quad \therefore \tan \alpha = \mu$$

এখানে $\alpha = 30°$ $\therefore$ $\mu = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, মনে কর P বল প্রয়োগ করিলে বস্তুটি ঠিক উপর দিকে উঠিবার উপক্রম করে। নততলের অভিলম্ব দিকে এবং নততল বরাবর বিশ্লেষণ করিলে

$$W \cos \alpha = R \ldots (i) \quad \text{এবং } W \sin \alpha + \mu R = P \ldots (ii)$$

এখানে ঘর্ষণবল নীচের দিকে

$$\therefore P = W \sin 30° + \frac{1}{\sqrt{3}} W \cos 30° = \frac{W}{2} + \frac{W}{2} = W.$$

সুতরাং প্রযুক্তবল W অপেক্ষা কম হইলে বস্তুটিকে উপরদিকে টানিয়া তুলিতে পারে না।

উদা. 8. একটি নততলের উপর একটি 30 পা. ভারের বস্তু রক্ষিত হইয়াছে, তলের সমান্তরালভাবে 12 পা. ভার প্রয়োগ করিলে ইহাকে ধরিয়া রাখিতে পারে এবং 16 পা. ভার প্রয়োগ করিলে ইহা উপরদিকে চলিবার উপক্রম করে। ঘর্ষণাঙ্ক নির্ণয় কর। [U. P. 1949]

প্রথম ক্ষেত্রে, $R = W\cos\alpha$ এবং $P + \mu R = W\sin\alpha$

$\therefore \quad P = W(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

অনুরূপে দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $P_1 = W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$

$\therefore \quad 12 = 30(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ বা, $\frac{2}{5} = \sin\alpha - \mu\cos\alpha$

$18 = 30(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ বা, $\frac{3}{5} = \sin\alpha + \mu\cos\alpha$

$\therefore \quad 2\mu\cos\alpha = \frac{1}{5},\ 2\sin\alpha = 1.$ বা, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; $\alpha = 30°$

$\therefore \quad 2\mu\cos 30° = \frac{1}{5}$, বা, $2\mu \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{5}$; $\mu = \frac{1}{5\sqrt{3}} = 0{\cdot}115$ (প্রায়)

উদা. 9. এক কিলোগ্রাম ভারের একটি বস্তু 30° নতিবিশিষ্ট একটি নততলের উপর রক্ষিত হইয়াছে। ঘর্ষণাঙ্ক $\frac{1}{\sqrt{3}}$ হইলে তলের সমান্তরাল ভাবে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কি বল প্রয়োগ করিলে ইহা সীমাস্থ সাম্যাবস্থায় থাকিবে ?

উদা. 8 এর ন্যায়,

বৃহত্তম $P_1 = W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 1\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$ কি. গ্রা. ভার

ক্ষুদ্রতম বল $P = W(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 1\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$

উদা. 10. অনুভূমিকের সহিত α কোণে নত একটি সমতলের উপর ঘর্ষণ বলের দ্বারা W ভার সীমাস্থ সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে। দেখাও যে অনুভূমিক দিকে প্রযুক্ত কোন বল $W\tan 2\alpha$ অপেক্ষা কম হইলে ইহাকে উপর দিকে সরাইতে পারে না।

প্রথম ক্ষেত্রে, $R = W\cos\alpha$ এবং $\mu R = W\sin\alpha \quad \therefore \quad \mu = \tan\alpha.$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, সাম্যাবস্থার জন্য তল বরাবর এবং তলের লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া

$P\cos\alpha = \mu R + W\sin\alpha$ এবং $P\sin\alpha = R - W\cos\alpha$

$\therefore \quad P(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$

$$P = \frac{W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = W \times \frac{\sin\alpha + \tan\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha - \tan\alpha\sin\alpha}$$

$$= W \times \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = W \times \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = W \times \tan 2\alpha.$$

উদা. 11. অনুভূমিকের সহিত 30° নত একটি তলের উপর 16 পাউণ্ড ভারের একটি বস্তু রহিয়াছে। যদি তল বরাবর উপর দিকে 2 পা. ভার বল প্রয়োগ করিয়া বস্তুটিকে নীচের দিকে না গড়াইয়া যায় এরূপভাবে রাখা যায় তবে একই দিকে কি বল প্রয়োগ করিলে বস্তুটি উপর দিকে উঠিবার উপক্রম করিবে? [C.U. 1922]

এরূপ ক্ষেত্রে প্রযুক্ত বল

$$P=\frac{W\sin(\alpha-\lambda)}{\cos\lambda} \text{ এবং } P_1=\frac{W\sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda} \quad [\ \lambda=\text{ঘর্ষণ কোণ}\ ]$$

$$\therefore\ 2=\frac{16\sin(30^\circ-\lambda)}{\cos\lambda} \text{ অর্থাৎ } \cos\lambda=8(\sin 30^\circ\cos\lambda-\cos 30^\circ\sin\lambda)$$

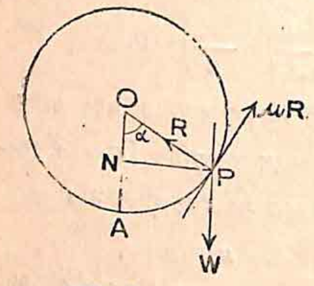
$$\text{বা, } \frac{1}{8}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\lambda \quad \text{বা, } \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\lambda=\frac{3}{8}\ \tan\lambda=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore\ P_1=16(\sin\alpha+\tan\lambda\cos\alpha)=16\left(\sin 30^\circ+\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 30^\circ\right)$$

$$=16\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=16\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\right)=14 \text{ পা. ভার।}$$

উদা. 12. ঘর্ষণাঙ্ক $\frac{1}{\sqrt{3}}$ হইলে একটি কণা a ব্যাসার্ধের গোলকের কত উঁচুতে স্থিরাবস্থায় থাকিতে পারে?

ধর, P অবস্থানে h উচ্চতায় কণাটি সীমাস্থ সাম্যাবস্থায় থাকিলে পারে।



R অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া এবং μR ঘর্ষণ বল (চিত্রে প্রদর্শিত দিকে)। ধর OP উল্লম্বের সঙ্গে α কোণ করে।

$$R=W\cos\alpha\ ;\ \mu R=W\sin\alpha.$$

$$\therefore\ \tan\alpha=\mu=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

এখন $h=AN=a-a\cos\alpha=a(1-\cos\alpha)$

$$=a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\tfrac{1}{2}a(2-\sqrt{3}).$$

উদা. 13. একটি সমভারের মই নীচের প্রান্ত অনুভূমিক অমসৃণ মাটিতে এবং অন্যপ্রান্ত অমসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালে ঠেস দিয়া সীমাস্থ সাম্যাবস্থায় আছে। নীচের এবং উপরের প্রান্তে ঘর্ষণাঙ্ক $\frac{3}{7}$ এবং $\frac{1}{3}$. মই ভূমির সঙ্গে কি কোণ করিয়া আছে নির্ণয় কর। [C.U. 1961]

R এবং S মাটির এবং দেওয়ালের অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া। অনুভূমিক এবং উল্লম্বদিকে বিশ্লেষণ করিয়া এবং A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$S=\mu R\cdots\cdots(i)$; $R+\mu' S=W\ldots\ldots(ii)$

$Wa\cos\theta=S.2a\sin\theta+\mu' S.2a\cos\theta\ldots\ldots(iii)$

(i) এবং (ii) হইতে $S\left(\frac{1}{\mu}+\mu'\right)=W$

এখন (iii) হইতে $S\left(\frac{1}{\mu}+\mu'\right)a\cos\theta=2a\,S\sin\theta+2a\mu' S\cos\theta$

$$\frac{1}{\mu}+\mu'=2\tan\theta+2\mu'; \quad \therefore \quad 2\tan\theta=\frac{1}{\mu}-\mu'=\tfrac{7}{3}-\tfrac{1}{3}=2$$

$\therefore\ \tan\theta=1$ অতএব $\theta=45^\circ$.

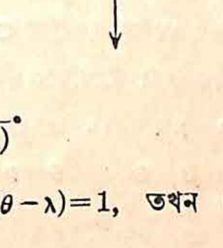
উদা. 14. অন্যূন কি বল অনুভূমিক দিকের সঙ্গে θ কোণ করিয়া প্রয়োগ করিলে অনুভূমিক তলের উপর রক্ষিত W ভারের বস্তু চলিবার উপক্রম করিবে ? θ-র মান কত হইলে বলের মান ন্যূনতম হইবে ? [C.U. 1951]

অনুভূমিক ও উল্লম্ব দিকে বিশ্লেষণ করিয়া

$P\cos\theta=\mu R\cdots\cdots(i)$ $R+P\sin\theta=W\cdots\cdots(ii)$

(i) ও (ii) হইতে

$$P\left(\frac{\cos\theta}{\mu}+\sin\theta\right)=W.$$



$$\therefore \quad P=\frac{\mu W}{\cos\theta+\mu\sin\theta}.$$

আবার $\mu=\tan\lambda$ বসাইয়া,

$$P=\frac{W\tan\lambda}{\cos\theta+\tan\lambda\sin\theta}=\frac{W\sin\lambda}{\cos(\theta-\lambda)}.$$

যখন $\cos(\theta-\lambda)$ বৃহত্তম হইবে অর্থাৎ $\cos(\theta-\lambda)=1$, তখন P ন্যূনতম। এইক্ষেত্রে $\theta-\lambda=0$ $\therefore\ \theta=\lambda$

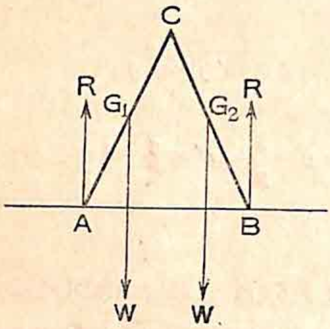
$\therefore$ θ-র মান যখন ঘর্ষণ কোণের সমান তখন P ন্যূনতম।

উদা. 15. C বিন্দুতে অবাধভাবে সংযুক্ত দুইটি সমদণ্ড AC, CB উল্লম্ব সমতলে আছে এবং ইহাদের A এবং C প্রান্ত অনুভূমিক সমতলে আছে। যদি সাম্যাবস্থা সীমান্ত হয় এবং ঘর্ষনাঙ্ক μ হয় দেখাও যে $\sin ABC=\frac{4\mu}{1+4\mu^2}$. [C. U. 1935]

প্রতিসাম্য অবস্থা বিবেচনা করিয়া A এবং Bতে প্রতিক্রিয়া সমান। সমগ্রভাবে দণ্ডদ্বয়ের সাম্যাবস্থা বিবেচনা করিলে $2R=2W \quad \therefore \quad R=W.$

BC দণ্ডের সাম্যাবস্থার জন্য C বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$R.\ 2a \sin\frac{C}{2}-\mu R.2a\cos\frac{C}{2}-Wa.\sin\frac{C}{2}=0$$



বা, $$2W\sin\frac{C}{2}-2\mu W\cos\frac{C}{2}-W\sin\frac{C}{2}=0$$

বা, $$\sin\frac{C}{2}=2\mu\cos\frac{C}{2};\ \tan\frac{C}{2}=2\mu$$

এখন, $$\sin ACB=\sin C$$

$$=\frac{2\tan\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}=\frac{4\mu}{1+4\mu^2}.$$

উদা. 16. একটি সরল দণ্ড AB-র একপ্রান্ত A অমসৃণ অনুভূমিক তলের উপর এবং অপর প্রান্ত B উল্লম্ব মসৃণ প্রাচীরে ঠেস দিয়া রহিয়াছে। যদি দণ্ডের দৈর্ঘ্য l হয় এবং A হইতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব a হয়; দেখাও যে সরিবার উপক্রম করিলে দেওয়ালের সহিত দণ্ডের নতি $\tan^{-1}\left(\frac{l\mu}{a}\right)$, μ ঘর্ষণাঙ্ক।

ধর, অনুভূমিক অমসৃণ সমতলের অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া R, তাহা হইলে দণ্ডটি সরিবার উপক্রম করিলে সীমাস্থ ঘর্ষণ μR

উল্লম্ব মসৃণ প্রাচীরের প্রতিক্রিয়া S অনুভূমিক

বস্তুর ভার W ভারকেন্দ্রের G-র ভিতর দিয়া উল্লম্ব নিম্নাভিমুখে।

অনুভূমিক এবং উল্লম্বদিকে বিশ্লেষণ কর এবং A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লও ;

$$S=\mu R \cdots (i) \quad \text{এবং} \quad R=W\ldots(ii) \quad \therefore \quad S=\mu W$$

$$Wa\sin\theta=Sl\cos\theta=\mu Wl\cos\theta$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\mu l}{a} \quad \text{অর্থাৎ} \quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{l\mu}{a}\right)$$

উদা. 17. 30 ফুট দীর্ঘ একটি মই-এর একপ্রান্ত একটি উল্লম্ব প্রাচীরে ঠেস দিয়া রহিয়াছে ; ইহার অপর প্রান্ত অমসৃণ ভূতলে আছে এবং ঘর্ষণাঙ্ক $\frac{1}{3}$. যদি মই-এর পাদদেশ প্রাচীর হইতে 6 ফুট দূরে থাকে তাহা হইলে একজন লোক যাহার ভার মই-এর ভারের চারগুণ মই সরিতে যাইবার উপক্রম না করা পর্যন্ত কত উঁচুতে উঠিতে পারে ?

R এবং S ভূতলের ও প্রাচীরের অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া।

ধর, লোকটি মই-এর শীর্ষ পর্যন্ত উঠিতে পারে, ইহা সম্ভব হয় যদি ঘর্ষণ বল μRকে লঙ্ঘন না করে।

উর্ধ্বাভিমুখে এবং অনুভূমিক দিকে বিশ্লেষণ করিয়া

$R=W+4W=5W$, F (ঘর্ষণ বল) = S

$\frac{F}{R}\leqslant\mu$; $F\leqslant\mu R\leqslant\frac{1}{2}.5W.$

A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া (ধর ভূতলের সঙ্গে দণ্ডের নতি θ)

$W.15\cos\theta+4\ W.30\cos\theta=S.30\sin\theta.$

$135\ W\cos\theta=S.30\sin\theta$

বা, $9\ W=2S\tan\theta=2F\tan\theta$

বা, $\frac{F}{W}=\frac{9}{2}\cot\theta=\frac{9}{2}.\ \frac{1}{\sqrt{24}}=\frac{9}{4\sqrt{6}}$; $\therefore\ \frac{F}{W}<\frac{5}{2}$

বা, $\frac{F^2}{W^2}<\frac{25}{4}$ এক্ষণে $\frac{F^2}{W^2}=\frac{81}{16\times6}=\frac{27}{32}<\frac{25}{4}$

অতএব লোকটি শীর্ষ পর্যন্ত উঠিতে পারে।

উদা. 18. একটি সমভারের মই দেওয়ালে ঠেস দিয়া রাখা হইয়াছে, যদি দেওয়াল এবং ভূতল সমান অমসৃণ হয়; দেখাও যে ঘর্ষণ কোণ λ হইলে উল্লম্বের সঙ্গে মইয়ের সীমান্ত নতি 2λ.

ধর, ভূতলের এবং প্রাচীরের অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া R এবং S ; উল্লম্বের সঙ্গে দণ্ডের নতি θ.

অনুভূমিক এবং উল্লম্ব দিকে বিশ্লেষণ করিয়া

$S=\mu R$........(i) এবং $R+\mu S=W$ ....(ii)

$$\therefore\ S\left(\frac{1}{\mu}+\mu\right)=W\ ;\ \text{বা,}\ S=\frac{\mu W}{1+\mu^2}$$

A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$W\ a\sin\theta=S.2a\cos\theta+\mu\ S.2a\sin\theta.$

$$=\frac{2\mu W}{1+\mu^2}\ a(\cos\theta+\mu\sin\theta)$$

$$\text{বা, } \tan\theta\left(1-\frac{2\mu^2}{1+\mu^2}\right)=\frac{2\mu}{1+\mu^2}\,;$$

$$\text{বা, } \quad \tan\theta=\frac{2\mu}{1-\mu^2}=\frac{2\tan\lambda}{1-\tan^2\lambda}=\tan 2\lambda$$

$$\therefore \quad \theta=2\lambda.$$

উদা. 19. একটি সমভার মই-এর ভার W ; তাহার একপ্রান্ত অমসৃণ অনুভূমিক ভূতলে এবং অপর প্রান্ত উল্লম্ব প্রাচীরের গায়ে ঠেস দিয়া অনুভূমিকের সঙ্গে α কোণ করিয়া আছে। দেখাও যে w ভারের একজন লোক মই-এর শীর্ষ পর্যন্ত উঠিলে মইটি সরিবে না যদি

$$\frac{W}{w}<\frac{2(1-\mu\tan\alpha)}{2\mu\tan\alpha-1}.$$

AB মই-এর A প্রান্ত ভূমি সংলগ্ন এবং B দেওয়ালে ঠেস দেওয়া আছে।

মনে কর, লোকটি মই-এর শীর্ষে এবং মই ও ভূতলের মধ্যে ঘর্ষণ বল μ, R ভূতলের অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া, S উল্লম্ব মসৃণ দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া।

$$\therefore \quad F=S\ldots(i) \quad \text{এবং } R=W+w\ldots(ii)$$

$$\text{সুতরাং } \quad \frac{F}{R}=\frac{S}{W+w}$$

A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$W.\,a\cos\alpha+w.\,2a\cos\alpha=S.2a\sin\alpha$$

$$\therefore \quad S=\tfrac{1}{2}(W+2w)\cot\alpha$$

$$\text{যেহেতু } \mu>\frac{F}{R}\,; \quad \therefore \quad \mu>\frac{(W+2w)\cot\alpha}{2(W+w)}.$$

$$\text{বা, } \quad 2\mu(W+w)\tan\alpha>W+2w$$

$$\text{বা, } \quad W(2\mu\tan\alpha-1)>2w(1-\mu\tan\alpha)$$

$$\frac{W}{w}>\frac{2(1-\mu\tan\alpha)}{2\mu\tan\alpha-1}.$$

উদা. 20. একটি সমভার মই-এর ভার W, ইহার একপ্রান্ত এক অমসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালের গায়ে ঠেস দিয়া রাখা হইয়াছে এবং অন্যপ্রান্ত ভূমিতে আছে। ইহা অনুভূমিকের সহিত 45° কোণ করিয়া রহিয়াছে। যদি μ এবং μ' যথাক্রমে মই ও

ভূমির সঙ্গে এবং দেওয়ালের সঙ্গে ঘর্ষণাঙ্ক হয়, দেখাও যে নীচের প্রান্তে অনুভূমিক দিকে যে ন্যূনতম বল মইটিকে সরাইতে পারে তাহার মান $\frac{W}{2} \times \frac{1+2\mu-\mu\mu'}{1-\mu'}$.

ধর, P উদ্দিষ্ট বল। R এবং S যথাক্রমে ভূমি ও দেওয়ালের অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া। যেহেতু মই সীমান্ত সাম্যাবস্থায় আছে এবং নীচের প্রান্ত দেওয়ালের দিকে সরিবে, অতএব নীচের প্রান্তে μR বিপরীত দিকে এবং উপরের প্রান্তে $\mu' S$ নীচের দিকে, কারণ, এই প্রান্ত উপর দিকে সরিবে।

অনুভূমিক ও উল্লম্বদিকে বিশ্লেষণ করিয়া এবং A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$P = \mu R + S \;...(i) \quad \text{এবং } R = W + \mu' S \;...(ii)$$

$$S.2a \sin 45° - \mu' S\, 2a \cos 45° = Wa \cos 45°$$

$$\text{বা, } \quad 2S(1-\mu') = W \quad \therefore \quad S = \frac{W}{2(1-\mu')}$$

$$\text{এখন } P = \mu\left(W + \frac{\mu' W}{2(1-\mu')}\right) + \frac{W}{2(1-\mu')}$$

$$= \frac{W\{2\mu - 2\mu' + \mu' + 1\}}{2(1-\mu')} = \frac{W}{2} \times \frac{1+2\mu-\mu\mu'}{(1-\mu')}.$$

উদা. 21. একটি নততলে অবস্থিত ভারকে যে নূন্যতম বল তল বরাবর উপর দিকে উঠাইতে পারে তাহার মান P। দেখাও যে তল বরাবর প্রয়োগ করিলে যে বল ইহাকে উপর দিকে উঠাইবে তাহা $P\sqrt{1+\mu^2}$; μ ঘর্ষণাঙ্ক।

ধর θ কোণ করিয়া P বল প্রযুক্ত হইয়াছে। যেহেতু বস্তুটি উপরদিকে সরিতে চাহিবে সেজন্য ঘর্ষণবল μR নীচের দিকে.

$$P \cos\theta - \mu R = W \sin\alpha \;...(i) \quad \text{এবং} \quad P \sin\theta + R = W \cos\alpha \;....(ii)$$

(ii) কে μ দিয়া গুণ করিয়া যোগ করিলে

$$P(\cos\theta + \mu \sin\theta) = W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$\text{বা, } \quad P = W \times \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\theta + \mu\sin\theta} = W \times \frac{\sin\alpha + \tan\lambda\cos\alpha}{\cos\theta + \tan\lambda\sin\theta}$$

$$= W \times \frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\theta-\lambda)}$$

ইহার ন্যূনতম মান $= W\sin(\alpha+\lambda)$

তল বরাবর বল প্রয়োগ করিলে $\theta = 0$ এবং প্রযুক্তবল $= W \times \frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda}$

$$= P\sec\lambda = P\sqrt{1+\tan^2\lambda} = P\sqrt{1+\mu^2}.$$

প্রশ্নমালা—X

1. (a) 20 পাউণ্ড ভারের একটি বস্তুকে এক অমসৃণ অনুভূমিক তলে রাখা হইয়াছে। যদি ঘর্ষণাঙ্ক 0·4 হয়, তাহা হইলে কি পরিমাণ ন্যূনতম বল অনুভূমিক দিকে প্রয়োগ করিলে বস্তুটি চলিবার উপক্রম করিবে?

(b) উপরের প্রশ্নে অনুভূমিক দিকের সঙ্গে 60° কোণে বল প্রয়োগ করিলে কি ন্যূনতম বল প্রয়োগ করিতে হইবে?

2. অনুভূমিকের সহিত 30° নতিবিশিষ্ট একটি নততলের উপর 20 পা. ভারের একটি বস্তু সীমাস্থ সাম্যাবস্থায় আছে। তলের অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া এবং ঘর্ষণ বল নির্ণয় কর। [H. S. 1960]

3. (a) অনুভূমিকের সহিত 60° নতিবিশিষ্ট একটি নততলে তল বরাবর কি ন্যূনতম বল প্রয়োগ করিলে 4 পা. ভারের একটি বস্তুকে নীচের দিকে না পড়ে মত ধরিয়া রাখিতে পারা যাইবে?

(b) উপরের প্রশ্নে সর্বাপেক্ষা কম কি বল প্রয়োগ করিয়া বস্তুটিকে তল বরাবর উপরদিকে উঠাইতে পারা যাইবে? কোন্ দিকে এই বল প্রয়োগ করিতে হইবে?

4. একটি সমভারের মই-এর একপ্রান্ত অমসৃণ মেঝের উপর আছে এবং অন্য প্রান্ত মসৃণ উল্লম্ব প্রাচীরে ঠেস দিয়া আছে এবং ইহা সীমাস্থ সাম্যাবস্থায় আছে। মেঝের ঘর্ষণাঙ্ক μ হইলে দেখাও যে উল্লম্বের সঙ্গে মইটি $\tan^{-1} 2\mu$ কোণ করিয়া আছে।

5. সাম্যাবস্থায় একটি সমদণ্ডের একপ্রান্ত ভূতলে এবং অন্যপ্রান্ত উল্লম্ব প্রাচীরে ঠেস দিয়া আছে। যদি ভূতল এবং প্রাচীর অমসৃণ হয় এবং তাহাদের ঘর্ষণাঙ্ক যথাক্রমে μ এবং μ' হয় এবং মই উভয় প্রান্তেই সরিবার উপক্রম করে তাহা হইলে অনুভূমিকের সঙ্গে দণ্ডের নতি নির্ণয় কর।

6. একটি ভার W একটি অমসৃণ নততলে সীমাস্থ সাম্যাবস্থায় আছে। তল বরাবর W বল প্রয়োগ করিলে ইহা উপরদিকে উঠিবার উপক্রম করে। নততলের নতি এবং ঘর্ষণাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U. 1927, '31, '33]

7. তল বরাবর উপরদিকে 20 পা. ভার বল প্রয়োগ করিলে 100 পা. ভারের বস্তুকে একটি অমসৃণ নততলে নীচের দিকে না সরে মত রাখা যায়; ঐ দিকে 40 পা. ভার বল প্রয়োগ করিলে ইহা উপরদিকে উঠিবার উপক্রম করে। যদি অনুভূমিকের সহিত তলের নতি 60° হয় তাহা হইলে ঘর্ষণাঙ্ক নির্ণয় কর।

8. একটি অমসৃণ সমতল অনুভূমিকের সহিত 60° কোণে অবস্থিত। যদি ঘর্ষণাঙ্ক $\frac{1}{\sqrt{3}}$ হয় তাহা হইলে তলের সহিত সমান্তরাল অন্যূন কত বল 4 পাউণ্ডভারের একটি বস্তুকে গড়াইয়া পড়িতে বাধা দিবে?

9. 56 পাউণ্ডভার 45° নতি-বিশিষ্ট একটি অমসৃণ তলের উপর সাম্যাবস্থায় আছে। অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

10. একটি অমসৃণ অনুভূমিক তলের উপর অবস্থিত 32 কিগ্রা. ভরের একটি বস্তুর উপর ঐ তলে 8 কি. গ্রা. বল প্রয়োগ করিলে উহা নড়িবার উপক্রম করে। ঘর্ষণাংক ও পূর্ণ প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

11. একটি অমসৃণ নততলের ভূমির দৈর্ঘ্য 4 ফুট এবং উচ্চতা 3 ফুট। 8 পাউণ্ড-ভার একটি বল নততলের সমান্তরাল ক্রিয়া করিয়া উহার উপরের 20 পাউণ্ড ভার বিশিষ্ট একটি দ্রব্যকে সীমাস্থ সাম্যবস্থায় রক্ষা করে। তলের ঘর্ষণাঙ্ক নির্ণয় কর।

12. 30 ফুট দীর্ঘ একটি মইয়ের একপ্রান্ত একটি মসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালে এবং অপর প্রান্ত দেওয়াল হইতে 6 ফুট দূরত্বে অমসৃণ মাটিতে অবস্থিত; মাটির ঘর্ষণাঙ্ক $\frac{1}{2}$. যে লোকের ভার মইয়ের চারগুণ সে কত উচ্চতায় উঠিতে পারিবে নির্ণয় কর।

13. 100 কি. গ্রা. ভরের একটি বস্তুকে একটি নততলে রাখা হইয়াছে এবং তল বরাবর 40 কি. গ্রা. ভারের একটি বল ইহাকে কেবলমাত্র স্থিতাবস্থায় রাখিতে সমর্থ। এই বলকে 80 কি. গ্রা. ভারে বর্ধিত করিলে বস্তুটি উপর দিকে গড়াইয়া যাইতে উপক্রম করে। ঘর্ষণাঙ্ক নির্ণয় কর। [H. S. 1967]

14. একটি সম মইয়ের একপ্রান্ত অমসৃণ অনুভূমিক মাটিতে এবং অপর প্রান্ত অমসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালে অবস্থিত। নিম্নপ্রান্তে এবং উপর প্রান্তে ঘর্ষণাঙ্ক যথাক্রমে $\frac{3}{7}$ এবং $\frac{1}{3}$. যখন মই সরিয়া যাইতে উপক্রম করিবে তখন ইহা ভূমির সহিত কত কোণে অবস্থিত নির্ণয় কর।

15. 30° নতি বিশিষ্ট একটি অমসৃণ নততলে 30 পাউণ্ডের ভার সীমাস্থ সাম্যবস্থায় আছে। নতি 60°-তে বর্ধিত করিলে যে ক্ষুদ্রতম অনুভূমিক বল ইহাকে নীচের দিকে গড়াইয়া পড়িতে বাধা দিবে তাহা নির্ণয় কর। তল বরাবর যে ক্ষুদ্রতম বল ইহাকে উপর দিকে টানিয়া উঠাইতে পারে তাহাও নির্ণয় কর।

16. 30 পাউণ্ড ভারের একটি বস্তু 60° নতিবিশিষ্ট এক অমসৃণ নততলে রক্ষিত যদি বস্তু এবং তলের মধ্যে ঘর্ষণাঙ্ক $\frac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তাহা হইলে তল বরাবর উপরের দিকে কোন্ বল বস্তুটিকে (i) নীচের দিকে গড়াইয়া পড়িতে বাধা দিবে, (ii) উপরের দিকে টানিয়া উঠাইতে উপক্রম করিবার পক্ষে যথেষ্ট নির্ণয় কর। [H. S. 1964]

Machines

প্রয়োজনীয় জ্ঞাতব্য বিষয় ঃ

(i) অতিক্রান্ত বাধা = W, প্রযুক্ত উদ্যম = P হইলে,

যান্ত্রিক সুবিধা (M. A.) = $\frac{W}{P}$

(ii) বেগানুপাত = $\frac{\text{উদ্যমের প্রয়োগ বিন্দুর বেগ}}{\text{ভারের প্রয়োগ বিন্দুর বেগ}}$

$= \frac{\text{কোন সময়ে উদ্যমের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ}}{\text{একই সময়ে ভারের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ}}$

(iii) কার্য = বল × বলের অভিমুখে তাহার প্রয়োগ বিন্দুর সরণ।

(iv) যন্ত্রের যোগ্যতা = $\frac{\text{অতিক্রম করিবার জন্য উদ্যমের কৃতকার্য}}{\text{উদ্যমের কৃত সম্পূর্ণ কার্য}}$

A. **লিভার** (The Lever) :

একটি লিভারের উপর প্রযুক্ত বল সমূহ হইল, (*a*) আলম্ব বিন্দু C-এ প্রতিক্রিয়া R, (*b*) B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বাধা W এবং (*c*) A বিন্দুতে প্রযুক্ত উদ্যম P [প্রত্যেকটি বল লিভারের উপর লম্বভাবে ক্রিয়মাণ]

অতএব, সাম্যাবস্থার জন্য $\frac{W}{P} = \frac{AC}{BC}$

(i) **প্রথম শ্রেণীর লিভার ঃ** (আলম্ব বিন্দু, উদ্যম ও বাধার প্রয়োগ বিন্দুর মধ্যে অবস্থিত হইলে)

সাম্যাবস্থার জন্য, $R = P + W$

(ii) **দ্বিতীয় শ্রেণীর লিভার ঃ** (উদ্যম ও আলম্ব বিন্দুর মধ্যে ভার অবস্থিত হইলে)

সাম্যাবস্থার জন্য, $R = W - P$ ও $\frac{W}{P} = \frac{AC}{BC}$ এবং সর্বদা $AC > BC$ হইবে।

(iii) **তৃতীয় শ্রেণীর লিভার ঃ** (আলম্ব বিন্দু ও ভারের মধ্যে উদ্যমের প্রয়োগ বিন্দু অবস্থিত হইলে)

সাম্যাবস্থার জন্য, $R = P - W$, ও $\frac{W}{P} = \frac{AC}{BC}$ এবং সর্বদা $AC < BC$ হইবে।

উদাহরণমালা XI—A

উদা. 1. 10 ফুট দীর্ঘ একটি সরল লিভারের একপ্রান্তে 9 পা. ভার যদি অপর প্রান্তে 21 পা. ভারকে সাম্যাবস্থায় রাখে, তাহা হইলে বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

ধর, ভার হইতে আলম্বের দূরত্ব x ফুট ; তাহা হইলে

$21x=9(10-x)=90-9x$; বা, $30x=90$; $\therefore\ x=3$ ফুট

ক্ষুদ্রতর বাহু 3 ফুট এবং দীর্ঘতর বাহু $10-3$ বা 7 ফুট।

উদা. 2. একটি প্রথম শ্রেণীর লিভারে বাহুদ্বয় 20 সেমি. এবং 30 সেমি. দীর্ঘ। যদি ক্ষুদ্রতর বাহুর প্রান্তে 15 কিলোগ্রাম ভার প্রযুক্ত হয়, তাহা হইলে কি পরিমাণ উদ্যম ইহাকে সাম্যাবস্থায় রাখিতে পারে ?

$15\times 20=P\times 30$; $\therefore\ P=\frac{15\times 20}{30}=10$ কিলোগ্রাম।

উদা. 3. যখন 15 পা. এবং 5 পা, ভার একটি ভারহীন লিভারের দুইপ্রান্ত হইতে ঝুলানো হয় তখন আলম্ব কম ভার হইতে 7 ফুট দূরে। যখন উভয় ভারের প্রত্যেককে 2 পাউণ্ড বাড়ানো হয় তখন আলম্ব কোথায় হইবে ?

ধর, অপর বাহুর দৈর্ঘ্য x ফুট, তাহা হইলে

$15x=5\times 9$; $\therefore\ x=3$ ফুট; লিভারের দৈর্ঘ্য $=9+3=12$ ফুট

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, মনে কর আলম্ব কম ভার হইতে y ফুট দূরে, তাহা হইলে

$(5+2)y=(15+2)(12-y)$; বা, $7y=12\times 17-17y$

বা, $24y=17\times 12$ $\therefore\ y=\frac{17}{2}=8\frac{1}{2}$ ফুট।

উদা. 4. একটি দণ্ডের একপ্রান্ত একটি প্রস্তরখণ্ডের উপর রাখিয়া উহা হইতে দণ্ডের এক-চতুর্থাংশ দূরে 40 পাউণ্ড ভার ঝুলানো হইয়াছে। অপর প্রান্তে কি উদ্যমের দ্বারা ইহাকে সাম্যাবস্থায় রাখিতে পারা যাইবে ? প্রস্তরখণ্ডের উপর চাপ কত ?

$Pl=40\times\frac{1}{4}l$; $\therefore\ P=10$ পা. ভার

প্রস্তরখণ্ডের উপর চাপ $=40-10=30$ পা. ভার।

উদা. 5 দ্বিতীয় শ্রেণীর একটি লিভারের আলম্বের উপর চাপ 8 পাউণ্ড ; উদ্যম এবং ভারের যোগফল 14 পা. ভার। যদি ইহারা 16 ইঞ্চি ব্যবধানে হয়, তাহা হইলে আলম্ব হইতে ইহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।

আলম্বের উপর চাপ $=W-P$ $\therefore\ W-P=8$ পা. ভার

দেওয়া আছে $W+P=14$ পা. ভার

$\therefore\ W=11$ পা. ভার এবং $P=3$ পা. ভার

ধর, আলম্ব হইতে ভারের দূরত্ব x, তাহা হইলে

$$11x = 3(x+16) = 3x+48 \text{ ; বা, } \quad 8x = 48$$

$\therefore \quad x = 6$ ইঞ্চি ; উদ্যমের দূরত্ব $= 6 + 16 = 22$ ইঞ্চি।

উদা. 6. দ্বিতীয় শ্রেণীর একটি লিভারের দৈর্ঘ্য 6 ফুট। ইহা 70 পাউণ্ড ভার বহন করে এবং আলম্বের উপর চাপ উদ্যমের চতুর্গুণ। উদ্যম কত এবং আলম্ব হইতে ভারের দূরত্ব কি ?

আলম্বের উপর চাপ $= W - P$; $\quad \therefore \quad 4P = 70 - P$; বা, $\quad 5P = 70$

সুতরাং $P = 14$ পা. ভার।

মনে কর, আলম্ব হইতে ভারের দূরত্ব x ফুট ; তাহা হইলে

$70x = 14\,(6 - x) = 48 - 14x$; বা, $\quad 84x = 84. \quad \therefore \quad x = 1$ ফুট।

সুতরাং নির্ণেয় উদ্যম 14 পা. ভার এবং নির্ণেয় দূরত্ব 1 ফুট।

উদা. 7. তৃতীয় শ্রেণীর একটি লিভারের উদ্যম ভারের 5 গুণ, আলম্বের উপর চাপ 32 পাউণ্ড। ভার নির্ণয় কর।

এখানে $P = 5W$; $P - W = 32$ পা. ভার $\quad \therefore \quad 5W - W = 32$ পা. ভার

অর্থাৎ $4W = 32$ পা. ভার $\quad \therefore \quad W = 8$ পা. ভার।

উদা. 8. একজন লোক একখণ্ড ভারী পাথর উঠাইবার উদ্দেশ্যে তাহার নীচে শাবল চালাইয়া উহার পাথর সংলগ্ন প্রান্ত হইতে 6 ইঞ্চি দূরে একটি আলম্বের উপর রাখিয়া অন্য প্রান্ত হইতে শরীরের সমস্ত চাপ দিল। শাবল অনুভূমিক আছে, ইহার দৈর্ঘ্য 6 ফুট এবং লোকটির ভার 120 পাউণ্ড। সে পাথরের উপর কি বল প্রয়োগ করে এবং আলম্বের উপর চাপ কত ?

এখানে শাবল একটি প্রথম শ্রেণীর লিভার। পাথরের উপর প্রযুক্ত বল, পাথরের ভর W-এর সমান ও বিপরীতমুখী। আলম্ব হইতে ভারের দূরত্ব $= 6$ ইঞ্চি $= \frac{1}{2}$ ফুট।

$W \times \frac{1}{2} = 120 \times (6 - \frac{1}{2}) \quad \therefore \quad W = 120 \times 11 = 1320$ পা. ভার

আলম্বের উপর চাপ $= 1320 + 120 = 1440$ পা. ভার।

উদা. 9. একখণ্ড ঘনাকৃতি পাথরের ভার 400 কিলোগ্রাম এবং প্রত্যেক বাহু এক মিটার। ইহার তলায় 1·6 মিটার দীর্ঘ শাবলের 20 সেমি. প্রবেশ করাইয়া দেওয়া হইয়াছে। এখন পাথরটিকে উঠাইবার জন্য শাবলের অপর প্রান্তে কত বল প্রয়োগ করিতে হইবে ?

ABC শাবলের C প্রান্ত ভূতল সংলগ্ন। ইহাই আলম্ব। এখানে শাবল একটি দ্বিতীয় শ্রেণীর লিভার। পাথরের B কিনারা C হইতে 20 সেমি. দূরে এবং B বিন্দুতে চাপ পাথরের ভারের অর্ধেক $= \frac{1}{2} \times 400$ কিগ্রা. $= 200$ কিগ্রা.

লিভারের দৈর্ঘ্য AC = 1·6 মিটার = 160 সেমি.

এখন, $P \times 160 = 200 \times 20$; $\therefore$ $P = \frac{200 \times 20}{160} = 25$ কিলোগ্রাম।

উদা. 10. 6 ইঞ্চি লম্বা সুপারিভাঙ্গা জাঁতির ভিতর জাঁতির কব্জা হইতে 1 ইঞ্চি দূরে সুপারি রাখিয়া বাহুদ্বয়ের প্রান্তে 4 পা. ভারের সমান চাপ দিলে ইহা ভাঙ্গে। সুপারির ঠিক উপরে কত ভার রাখিলে ইহা ভাঙ্গিবে ?

সুপারিভাঙ্গা জাঁতি দ্বিতীয় শ্রেণীর দুইটি লিভার। কব্জা ইহার আলম্ব। এখানে উদ্যম P = 4 পা. ভার। $W \times 1 = 4 \times 5$ $\therefore$ W = 20 পা. ভার।

সুপারির ঠিক উপরে ভার রাখিয়া উহাকে ভাঙ্গিতে হইলে ভারের মান = 20 + 4 = 24 পা. ভার।

B. কপিকল (Pulleys) :

কপির ক্ষেত্রে সাধারণতঃ কপির সংখ্যা n, ভার W এবং উদ্যম P, ধরা হয়।

(a) একটি মাত্র আবদ্ধ কপি :

$$\text{যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{W}{P} = 1.$$

(b) একটি মাত্র সরণ-ক্ষম কপি :

$$\text{যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{W}{P} = 2.$$

(c) প্রথম প্রণালীর কপিকল :

(i) কপিসমূহ ভারহীন হইলে,

$$\text{যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{W}{P} = 2^n.$$

(ii) কপিসমূহের ভার $w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots w_n$ হইলে,

$$\text{যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{W}{P} = 2^n - \frac{w_1 + 2w_2 + 2^2 w_3 + \cdots\cdots + 2^{n-1} w_n}{P}.$$

[**দ্রষ্টব্য : 1.** কপিসমূহের ভার সমান হইলে,

$$w_1 = w_2 = \cdots\cdots = w_n = w.$$

$$\therefore \text{ যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{W}{P} = 2^n - \frac{w(2^n - 1)}{P}.$$

2. কপিগুলি যত ভারী হইবে যান্ত্রিক সুবিধা তত কম হইবে।]

(iii) স্থির অবলম্বনের উপর চাপ = R

$$= W\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + w_1\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + w_2\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + w_3\left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) + \cdots\cdots + w_n\left(1 - \frac{1}{2}\right).$$

(d) দ্বিতীয় প্রণালীর কপিকল :

(i) নীচের ব্লকের কপির ভার w হইলে,

$$\text{যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{W}{P} = \frac{nW}{w+W}.$$

(ii) W-এর তুলনায় নীচের ব্লকের কপির ভার w অত্যন্ত ক্ষুদ্র হইলে অর্থাৎ ভারহীন মনে করিলে,

$$\text{যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{W}{P} = n.$$

(e) তৃতীয় প্রণালীর কপিকল :

(i) সরণক্ষম $(n-1)$ কপির ভার $w_1, w_2, \cdots\cdots w_{n-1}$ হইলে,

$$W = (2^n - 1)P + (2^{n-1} - 1)w_1 + (2^{n-2} - 1)w_2 + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots + (2^2 - 1)w_{n-2} + (2-1)w_{n-1}.$$

(ii) কপিসমূহের ভার সমান হইলে, $w_1 = w_2 = \cdots w_{n-1} = w$

$$W = (2^n - 1)\, P + (2^n - n - 1)W.$$

(iii) কপি সমূহ ভার হীন হইলে,

$$\text{যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{W}{P} = 2^n - 1.$$

উদাহরণমালা—XI—B

উদা. 1. নিম্নলিখিত প্রশ্ন তিনটিতে প্রথম প্রণালীর কপিকলে কপিসমূহ ভারহীন, n কপির সংখ্যা, W ভার এবং P উদ্যম।

(i) $n = 4$, $P = 10$ কিলোগ্রাম ভার ; W নির্ণয় কর।

(ii) $n = 4$, $W = 100$ পা. ভার, P নির্ণয় কর।

(iii) $W = 200$ কিগ্রা. ভার, $P = 25$ কিগ্রা. ভার, n নির্ণয় কর।

সমাধান :

(i) প্রথম প্রণালীর কপিকলে. কপিগুলি ভারহীন হইলে, $\frac{W}{P} = 2^n$

$\therefore\ W = 2^4 \times 10 = 160$ কি. গ্রা. ভার

(ii) $P = \frac{W}{2^n} = \frac{100}{2^4} = \frac{100}{16} = 6\frac{1}{4}$ পা. ভার

(iii) $\frac{W}{P} = 2^n \quad \therefore\ \frac{200}{25} = 2^n$; বা, $2^n = 8 = 2^3 \quad \therefore\ n = 3.$

উদা. 2. (প্রথম প্রণালীর কপিকল) নিম্নলিখিত প্রশ্ন তিনটিতে প্রত্যেক কপির ভার w, n কপির সংখ্যা, W ভার এবং P উদ্যম :

(i) $n=4$. $w=2$ পা. ভার ; W $=50$ পা. ভার ; P নির্ণয় কর।

(ii) $n=3$, P $=2$ কি.গ্রা. ভার, $w=1$ কি.গ্রা. ভার ; W নির্ণয় কর।

(iii) $n=5$, W$=258$ কি. গ্রা. ভার, P$=10$ কি. গ্রা. ভার ; w নির্ণয় কর।

সমাধান :

(i) $2^n \text{P}=\text{W}+w\,(2^n-1)$ সূত্র ব্যবহার করিয়া

$\therefore\ 2^4\text{P}=50+2\,(2^4-1)$; বা, $16\text{P}=50+30=80$

$\therefore\ \text{P}=5$ পা. ভার।

(ii) $2^3\times 2=\text{W}+1\,(2^3-1)$; বা, $16-7=\text{W}$

$\therefore\ \text{W}=9$ কি. গ্রা. ভার

(iii) $2^5\times 10=258+w\,(2^5-2)$; বা, $320-258=31w$

$\therefore\ w=\frac{62}{31}=2$ কি. গ্রা. ভার।

উদা. 3. (তৃতীয় প্রণালীর কপিকল) নিম্নলিখিত প্রশ্ন তিনটিতে কপি ভারহীন ; n কপির সংখ্যা, W ভার এবং P উদ্যম :

(i) $n=4$, P$=1$ পা. ভার ; W নির্ণয় কর।

(ii) $n=5$, W$=62$ কি. গ্রা. ভার ; P নির্ণয় কর।

(iii) W$=120$ কি. গ্রা. ভার ; P$=8$ কি. গ্রা. ভার ; n নির্ণয় কর।

সমাধান :

আমরা জানি $\frac{\text{W}}{\text{P}}=2^n-1$

(i) $\text{W}=1(2^4-1)=15$ প. ভার

(ii) $62=\text{P}(2^5-1)$ $\therefore$ $\text{P}=\frac{62}{31}=2$ কি. গ্রা. ভার।

(iii) $120=8(2^n-1)$; বা, $15=2^n-1$; বা, $2^n=16=2^4$. $\therefore$ $n=4$.

উদা. 4. (তৃতীয় প্রণালীর কপিকল)। নিম্নলিখিত প্রশ্ন তিনটিতে প্রত্যেক কপির ভার w, n কপির সংখ্যা, W ভার এবং P উদ্যম।

(i) $n=4$, $w=1$ পা. ভার, P$=2$ পা. ভার ; W নির্ণয় কর।

(ii) $n=3$, $w=\frac{1}{2}$ পা. ভার, W$=72$ পা. ভার ; P নির্ণয় কর।

(iii) $n=5$, P$=2$ কি. গ্রা. ভার ; W$=88$ কি. গ্রা. ভার ; w নির্ণয় কর।

সমাধান :

যখন প্রত্যেক কপির ভার w তখন $\text{W}=(2^n-1)\,\text{P}+w\,(2^n-n-1)$

(i) $W=(2^4-1)2+1(2^4-4-1)=30+11=41$ পা. ভার।

(ii) $72=(2^3-1)P+\frac{1}{2}(2^3-3-1)=7P+\frac{1}{2}\times 4=7P+2$

বা, $7P=70$ $\therefore$ $P=10$ পা. ভার।

(iii) $88=(2^5-1)2+w(2^5-5-1)=62+26w$

$\therefore$ $26w=88-62=26$ $\therefore$ $w=1$ কি. গ্রা. ভার।

উদা. 5. প্রথম প্রণালীর কপিকলে চারিটি কপি থাকিলে যান্ত্রিক সুবিধা কি হয় ?

যান্ত্রিক সুবিধা $=2^4=16$.

উদা. 6. প্রথম প্রণালীর কপিকলে চারিটি কপি আছে, যদি ইহাদের ভার নিম্নতম কপি হইতে আরম্ভ করিয়া যথাক্রমে 4, 3, 2 এবং 1 পাউণ্ড হয়, তাহা হইলে 4 পাউণ্ড ভার উদ্যমের দ্বারা কত ভার উত্তোলন সম্ভব ?

$2^4P=W+w_1+2w_2+2^2w_3+2^3w_4$ সূত্র হইতে

$\therefore$ $2^4\times 4=W+4+2\times 3+4\times 2+8\times 1$

$\therefore$ $W=64-(4+6+8+8)=64-26=38$ পা. ভার।

উদা. 7. তৃতীয় প্রণালীর কপিকলে তিনটি গতিশীল কপি আছে, ইহাদের ভার নীচের কপি হইতে আরম্ভ করিয়া যথাক্রমে 1, 2 এবং 3 পাউণ্ড। 8 উদ্যমের দ্বারা কত ভার উত্তোলন সম্ভব ?

$$W=(2^4-1)8+(2^3-1)1+(2^2-1)2+(2-1)3$$
$$=15\times 8+7+3\times 2+3=120+7+6+3=136 \text{ পা. ভার।}$$

উদা. 8. প্রথম প্রণালীর কপিকলে তিনটি কপি থাকিলে এবং তাহাদের ভার সর্বনিম্ন কপি হইতে আরম্ভ করিয়া যথাক্রমে 5, 4 এবং 3 পাউণ্ড ভার হইতে 50 পাউণ্ড উদ্যমের দ্বারা কত ভার উত্তোলন সম্ভব ?

$2^3P=W+w_1+2w_2+2^2w_3$

$2^3.50=W+5+2\times 4+2^2\times 3=W+5+8+12$

$W=400-25=375$ পা. ভার।

উদা. 9. দ্বিতীয় প্রণালীর কপিকলে নীচের ব্লকে চারিটি কপি আছে, ইহার ভার 20 পা. এবং দড়ির একপ্রান্ত এই ব্লকে যুক্ত, ; 10 পা. ভার উদ্যমের দ্বারা কত ভার উত্তোলন করা সম্ভব ?

যেহেতু দড়ির একপ্রান্ত নীচের ব্লকে যুক্ত, অতএব উপরের ব্লকে কপির সংখ্যা 5. (নীচের ব্লকের কপির সংখ্যা অপেক্ষা একটি বেশী)

$W+w=nP$ সূত্র হইতে $\therefore$ $W=9\times 10-20=70$ পা. ভার।

উদা. 10. দ্বিতীয় প্রণালীর কপিকলে নীচের ব্লকে একটি ঝুড়ি ঝুলানো আছে। ঝুড়িতে একজন লোক বসিয়া দড়ির মুক্ত প্রান্ত ধরিয়া টানিয়া ঝুড়িসহ সাম্যাবস্থায়

আছে। যদি ঝুড়িসহ লোকটির ভার W হয়, দড়ি উল্লম্বভাবে আছে মনে করিলে, লোকটি কি পরিমাণ বলে টানে ?

ধর, প্রযুক্ত উদ্যম বা টান P.

এখানে বাধা = W − P (লোকের ভার − দড়ির টান)

$$\therefore \quad W-P=nP\;;\; \text{বা,}\quad (n+1)P=W \quad \therefore \quad P=\frac{W}{n+1}.$$

উদা. 11 প্রথম প্রণালীর কপিকলে চারিটি কপির সর্বনিম্ন কপি হইতে 156 পা. ভারের একজন লোক ঝুলিতেছে। আবদ্ধ কপির উপর দিয়া যে দড়ি গিয়াছে তাহার প্রান্ত ধরিয়া টানিয়া সে নিজেকে সাম্যাবস্থায় রাখিয়াছে। প্রত্যেক কপির ভার যদি 10 পাউণ্ড হয়, সে কি পরিমাণ বল প্রয়োগ করিতেছে ?

এখানে রোধ = লোকের ভার − দড়ির টান = 156 − P

$$2^4P=W+w(2^4-1)\cdots \text{সূত্র হইতে } 2^4P=(156-P)+10\times 15$$

$$\text{বা,}\quad 17P=156+150=306\;;\quad \therefore P=18 \text{ পা. ভার।}$$

উদা. 12. যদি তৃতীয় প্রণালীর কপিকলে চারিটি ভারহীন কপি ঘুরিয়া যে চারিটি দড়ি গিয়াছে তাহারা 6 সেমি. অন্তর একটি ভারহীন দণ্ডে যুক্ত হয়, তাহা হইলে দণ্ডের কোন্ বিন্দু হইতে ভার ঝুলাইলে দণ্ডটি অনুভূমিক থাকিবে ?

মনে কর, দীর্ঘতম দড়ি দণ্ডের যে বিন্দুতে যুক্ত হইয়াছে সেই বিন্দু হইতে x দূরে ভার ঝুলান হয়। তাহা হইলে

$$x=\frac{T_4\times 0+T_3\times 6+T_2\times 12+T_1\times 18}{T_4+T_3+T_2+T_1}$$

এখন $T_1=P,\ T_2=2P,\ T_3=2^2P,\ T_4=2^3P$

$$\therefore \quad x=\frac{2^2P\times 6+2P\times 12+P\times 18}{(2^3+2^2+2+1)P}=\frac{(24+24+18)P}{15P}$$

$$=\frac{66}{15}=\frac{22}{5}=4\cdot 4 \text{ সেমি।}$$

উদা. 13. যে প্রণালীর কপিকলে প্রত্যেক দড়ি ভারবহনকারী দণ্ডে সংযুক্ত তাহাতে প্রত্যেক কপির ব্যাস 7 সেমি. হইলে এবং তিনটি ভারহীন কপি থাকিলে, কোন বিন্দু হইতে ভার ঝুলাইলে দণ্ডটি অনুভূমিক থাকিবে ?

এখানে প্রত্যেক দড়ি $\frac{7}{2}$ সেমি. দূরে। মনে কর, দীর্ঘতম দড়ি যে বিন্দুতে প্রযুক্ত তাহা হইতে x সেমি. দূরে ভার ঝুলাইতে হয়

$$x=\frac{T_3\times 0+T_2\times \frac{7}{2}+T_1\times 7}{T_3+T_2+T_1}=\frac{2P+\frac{7}{2}+P\times 7}{(2^2+2+1)P}=\frac{14}{7}=2 \text{ সেমি.}$$

উদা. 14. তৃতীয় প্রণালীর ভারহীন কপিকলে যান্ত্রিক সুবিধা 127 হইলে কপির সংখ্যা নিরূপণ কর। [C. U. 1952]

তৃতীয় প্রণালীর কপিকলে যান্ত্রিক সুবিধার সূত্র

$\frac{W}{P}$(যান্ত্রিক সুবিধা) $= 2^n - 1$

$\therefore\ 127 = 2^n - 1$; বা, $2^n = 128 = 2^7 \quad \therefore\ n = 7.$

উদা. 15. 10 স্টোন ভারের একজন লোক এক দড়িবিশিষ্ট কপিকলের সাহায্যে 6 হন্দর ভার উঠায়। প্রত্যেক ব্লকে ছয়টি কপি আছে। মাটির উপর লোকটির চাপ নির্ণয় কর। যে দণ্ড হইতে কপিকল ঝুলান হইয়াছে তাহার উপর কি পরিমাণ পীড়ন (stress) হইতেছে ? [B. E. 1936]

লোকটির উপর নীচের দিকে তাহার ভার, উপরদিকে দড়ির টান এবং মাটির প্রতিক্রিয়া ক্রিয়া করিতেছে।

$\therefore$ মাটির উপর চাপের প্রতিক্রিয়া $+ P =$ লোকের ভার

মাটির উপর চাপের প্রতিক্রিয়া $= 140 - P$

এখন $6 \times 112 = 12P \quad \therefore\ P = 56$ পা. ভার [বাধা $= nP$]

চাপ $= 140 - 56 = 84$ পা. ভার

দণ্ডের উপর পীড়ন বা টান = ঝুলানো ভার $+ P = 6 \times 112 + 56 = 728$ পা. ভার

উদা. 16. প্রথম প্রণালীর কপিকলে তিনটি কপি আছে; ভার এবং উদ্যমের সমষ্টি 90 পা. ভার। কপিগুলি ভারহীন হইলে উদ্যম কত ? [C.U. 1947]

দেওয়া আছে, $W + P = 90$ পা. ভার$\cdots$(i)

যেহেতু প্রথম প্রণালীর কপিকলে $\frac{W}{P} = 2^n = 2^3 = 8 \quad \therefore\ W = 8P$

এখন (i) হইতে $8P + P = 90$ পা. ভার ; বা, $9P = 90$ পা. ভার।

$\therefore\ P = 10$ পা. ভার।

উদা. 17. একজন লোকের ভার 154 পা. ; সে যে প্রণালীর কপিকলে একটিমাত্র দড়ি সকল কপি ঘুরিয়া যায় তাহার দ্বারা 3 হন্দর ভার উঠাইতেছে। প্রত্যেক ব্লকে চারিটি কপি আছে এবং দড়ি উপরের ব্লকে যুক্ত হইয়াছে। কপিগুলি ভারহীন মনে করিলে যদি লোকটি উল্লম্ব নীচের দিকে টানে তাহা হইলে মাটির উপর তাহার চাপ নির্ণয় কর। [C. U 1962]

ভার $= nP$, $\therefore\ 3 \times 112 = 8P$; বা, $P = 42$ পা. ভার।

মাটির উপর চাপ = লোকের ভার − দড়ির টান $P = 154 - 42 = 112$ পা. ভার।

উদা. 18. দ্বিতীয় প্রণালীর কপিকলে 6 পা. ভার উদ্যম 28 পা. ভারকে উত্তোলন করিতে পারে এবং 8 পা. ভার উদ্যম 42 পা. ভার উত্তোলন করিতে পারে। দুই ব্লকে কপির সংখ্যা এবং নীচের ব্লকের ভার নিরূপণ কর।

দ্বিতীয় প্রণালীর কপিকলে $W+w=nP$

[W ঝুলানো ভার, w নীচের ব্লকের ভার, P উদ্যম এবং n কপির সংখ্যা]

এখানে $28+w=6n$ ...... (i) এবং $42+w=8n$ ...... (ii)

বিয়োগ করিয়া, $14=2n \quad \therefore \; n=7.$

এখন (i) হইতে $28+w=42$; $\therefore \; w=42-28=14$ পা. ভার।

উদা. 19. দ্বিতীয় প্রণালীর একটি কপিকলে w এবং w' যথাক্রমে W এবং W′ ভার উত্তোলন করিতে পারে। দুইটি ব্লকে কপির সংখ্যা এবং নীচের ব্লকের ভার নিরূপণ কর।

ধর, কপির সংখ্যা n এবং x নীচের ব্লকের ভার

$$W+x=nw \cdots \text{(i)} \quad W'+x=nw' \cdots \text{(ii)}$$

$$W'-W=n(w'-w) \text{ ; বা, } n=\frac{W'-W}{w'-w}$$

এখন (i) হইতে, $W+x=\frac{W'-W}{w'-w}w$; বা, $x=\frac{W'-W}{w'-w}w-W$

$$=\frac{W'w-Ww-Ww'+Ww}{w'-w}=\frac{W'w-Ww'}{w'-w}$$

C. নততল (Inclined Plane) :

P উদ্যমের দ্বারা W ভার একটি নততলে স্থির অবস্থায় আছে ; নততলে নতি α।

সুতরাং, $\frac{\text{নততলের উচ্চতা}}{\text{নততলের দৈর্ঘ্য}}=\sin\alpha$

(a) যদি উদ্যম P অনুভূমিক দিকে প্রয়োগ করা হয় :

যান্ত্রিক সুবিধা $=\frac{W}{P}=\frac{\text{নততলের ভূমির দৈর্ঘ্য}}{\text{নততলের উচ্চতা}}=\cot\alpha$; $\therefore \; P=W\tan\alpha$

(b) যদি উদ্যম P নততলের সমান্তরালভাবে উপরের দিকে ক্রিয়া করে :

যান্ত্রিক সুবিধা $=\frac{W}{P}=\frac{\text{নততলের দৈর্ঘ্য}}{\text{নততলের উচ্চতা}}=\operatorname{cosec}\alpha$; $\therefore \; P=W\sin\alpha$

(c) যদি উদ্যম P নততলের সহিত θ কোণে নতভাবে উপরের দিকে ক্রিয়া করে :

যান্ত্রিক সুবিধা $=\frac{W}{P}=\frac{\cos\theta}{\sin\alpha} \quad \therefore \; P\cos\theta=W\sin\alpha.$

উদাহরণমালা—XI—C

উদা. 1. অনুভূমিক দিকে কি উদ্যম প্রয়োগ করিলে নিম্নলিখিত বস্তুগুলি প্রদত্ত নততলে স্থিরাবস্থায় থাকিবে ?

(i) নততলের দৈর্ঘ্য 20 ফুট, উচ্চতা 12 ফুট ; বস্তুর ভার 16 পাউণ্ড ;

(ii) নততলের উচ্চতা 6 ফুট, ভূমি 32 ফুট ; বস্তুর ভার 96 পাউণ্ড ;

(iii) নততলের উচ্চতা 13 মিটার, দৈর্ঘ্য 85 মিটার ; বস্তুর ভার 168 কিগ্রা ;

সমাধান :

(i) $P = W \tan \alpha$

যেহেতু দৈর্ঘ্য 20 ফুট এবং উচ্চতা 12 ফুট ; অতএব $\sin \alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

$\therefore \tan \alpha = \frac{3}{4}$. সুতরাং $P = 16 \times \frac{3}{4} = 12$ পা. ভার

(ii) যেহেতু উচ্চতা 6 ফুট এবং ভূমি 32 ফুট ; $\therefore \tan \alpha = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$

$P = W \tan \alpha = 96 \times \frac{3}{16} = 18$ পা. ভার

(iii) যেহেতু উচ্চতা 13 মিটার. দৈর্ঘ্য 85 মিটার অতএব $\sin \alpha = \frac{13}{85}$

$$\left[\text{এখন } \cot^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha - 1 = \left(\frac{85}{13}\right)^2 - 1 = \frac{84^2}{13^2}, \cot \alpha = \frac{84}{13} \right]$$

$$P = W \tan \alpha = 168 \times \frac{13}{84} = 26 \text{ কিগ্রা. ভার।}$$

উদা. 2. তল বরাবর উপরদিকে কি উদ্যম প্রয়োগ করিলে নিম্নলিখিত বস্তুগুলি প্রদত্ত নততলে স্থিরাবস্থায় থাকিবে ?

(i) নততলের নতি 13 তে 5, দৈর্ঘ্য 65 ফুট ; বস্তুর ভার 130 পাউণ্ড।

(ii) নততলের উচ্চতা 7 ফুট, ভূমি 24 ফুট ; বস্তুর ভার 100 পাউণ্ড ;

(iii) নততলের উচ্চতা 400 সেমি., দৈর্ঘ্য 1 মিটার ; বস্তুর ভার 1 কিলোগ্রাম।

সমাধান :

(i) $P = W \sin \alpha$; এখানে $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ $\therefore P = 130 \times \frac{5}{13} = 50$ পা. ভার

(ii) $P = W \sin \alpha$; এখানে $\tan \alpha = \frac{7}{24}$; $\sin \alpha = \frac{7}{25}$, $W = 100$ পা. ভার

$\therefore P = 100 \times \frac{7}{25} = 28$ পা. ভার

(iii) $P = W \sin \alpha$; এখানে $\sin \alpha = \frac{400}{1000} = \frac{2}{5}$, $W = 1$ কিগ্রা. $= 1000$ গ্রাম,

$P = 1000 \times \frac{2}{5} = 400$ গ্রাম ভার।

উদা. 3. একটি মসৃণ নততলের উচ্চতা 6 ফুট এবং দৈর্ঘ্য 10 ফুট ; কি পরিমাণ বল অনুভূমিক দিকে প্রযুক্ত হইলে 40 পাউণ্ড ভারের বস্তুকে তলের উপর স্থিরাবস্থায় রাখা যাইবে ? তলের উপর কত চাপ পড়ে ?

$P=W \tan \alpha$; এখানে $\sin \alpha=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$; $\therefore \tan=\frac{3}{4}$.
$P=40\times\frac{3}{4}=30$ পা. ভার
$R=W \sec \alpha=40\times\frac{5}{4}=50$ পা. ভার।

উদা. 4, একটি বস্তুকে এক নততলে, তল বরাবর উপরদিকে বস্তুর ভারের অর্ধেক পরিমাণ বল প্রয়োগ করিয়া স্থিরাবস্থায় রাখা হইয়াছে। তলের নতি নির্ণয় কর।

এখানে, উদ্যম $P=\frac{W}{2}$, $P=W \sin \alpha$ প্রযোজ্য

$\therefore \frac{W}{2}=W \sin \alpha$; বা, $\sin \alpha=\frac{1}{2}$; $\therefore \alpha=30^\circ$.

উদা. 5 60° নতিবিশিষ্ট নততলের উপর একটি বস্তু রাখিয়া অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণে বল প্রয়োগ করিয়া ইহাকে স্থিরাবস্থায় রাখা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে উদ্যম এবং প্রতিক্রিয়া প্রত্যেকেই বস্তুভারের সমান।

তিনটি বলের ক্রিয়াতে বস্তুটি স্থিরাবস্থায় আছে ; (1) বস্তুর ভার W নিম্নাভিমুখে, (2) প্রযুক্ত বল P এবং (3) মসৃণ নততলের প্রতিক্রিয়া তলের লম্বাভিমুখে।

এখানে যে কোন দুইটি বলের মধ্যে কোণ $=120^\circ$

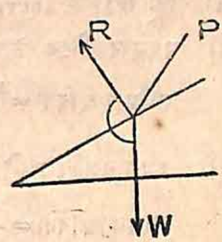
ল্যামির সূত্র প্রয়োগ করিলে

$$\frac{P}{\sin 120^\circ}=\frac{R}{\sin 120^\circ}=\frac{W}{\sin 120^\circ}; \quad \therefore P=R=W$$

উদা. 6. অনুভূমিকের সহিত 30° নতিবিশিষ্ট নততলে একটি বস্তুকে রাখিয়া তলের সহিত 30° কোণে বল প্রয়োগ করিয়া ইহাকে স্থিরাবস্থায় রাখা হইয়াছে ; ভার ও উদ্যমের অনুপাত নির্ণয় কর।

তিনটি বলের ক্রিয়ার ফলে বস্তুটি স্থিরাবস্থায় আছে।

(1) বস্তুর ভার W (2) প্রযুক্ত বল P এবং (3) নততলের প্রতিক্রিয়া R



এখানে R এবং W এর মধ্যে কোণ 150° ;

R এবং P-এর মধ্যে কোণ 60°.

ল্যামির সূত্র প্রয়োগ করিলে

$$\frac{P}{\sin RW}=\frac{W}{\sin RP}; \quad \text{বা, } \frac{P}{\sin 150^\circ}=\frac{W}{\sin 60^\circ}$$

$$\text{বা, } \frac{P}{\frac{1}{2}}=\frac{W}{\frac{\sqrt{3}}{2}}; \quad \therefore \frac{W}{P}=\frac{\sqrt{3}}{1}$$

উদা. 7. P উদ্যম তল বরাবর প্রযুক্ত হইলে W ভারের বস্তুকে এবং অনুভূমিক দিকে প্রযুক্ত হইলে w ভারের বস্তুকে একটি প্রদত্ত নততলে সাম্যাবস্থায় রাখিতে পারে ; দেখাও যে $P^2 = W^2 - w^2$

প্রথম ক্ষেত্রে $P = W \sin \alpha$ এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $P = w \tan \alpha$

$\therefore \quad W^2 - w^2 = P^2 (\operatorname{cosec}^2 \alpha - \cot^2 \alpha) = P^2.$

উদা. 8. 30° নতিবিশিষ্ট একটি মসৃণ নততলের উপর 180 পা. ভারের একটি বস্তু অনুভূমিক দিকে প্রযুক্ত বলের দ্বারা সাম্যাবস্থায় আছে, বলের মান নির্ণয় কর।

$P = W \tan \alpha = 180 \tan 30^\circ = 180 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 60\sqrt{3}$ পা. ভার।

D. স্ক্রু (The Screw) :

স্ক্রু-র কোণ $= \alpha$, পাটাতনের উপর ভার $= W$, উদ্যম $= P$, লিভারের বাহুর দৈর্ঘ্য $= L$, ঘর্ষণ গুণাঙ্ক $= \mu = \tan \lambda$. স্ক্রু-র থাক $= p$ এবং উহার মধ্যক ব্যাস $= D$.

$$\therefore \quad \tan \alpha = \frac{\text{স্ক্রু-র থাক}}{\text{স্ক্রু-র চোঙের ভূমির পরিধির দৈর্ঘ্য}} = \frac{p}{\pi D}$$

$P = W \tan (\alpha + \lambda)$, যখন বস্তুটিকে উপরের দিকে তোলা হয়

এবং $P = W \tan (\alpha - \lambda)$, যখন বস্তুটিকে নীচের দিকে নামান হয়।

আবার স্ক্রু-কে উহার অক্ষের চারিদিকে একপাক ঘুরাইবার জন্য অনুভূমিক ভ্রামক T হয়, তবে $T = P \times \frac{D}{2}$.

$\therefore \quad T = W.\frac{D}{2} \tan (\alpha + \lambda)$, যখন বস্তুটিকে উপরে তোলা হয়,

এবং $T = W.\frac{D}{2} \tan (\alpha - \lambda)$, যখন বস্তুটিকে নীচে নামান হয়।

(a) স্ক্রু-জ্যাক (screw-jack) :

(i) যখন বস্তুটিকে উপরে তোলা হয় :

$$\text{যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{W}{P} = \frac{2L}{D \tan (\alpha + \lambda)},$$

(ii) যখন বস্তুটিকে নীচে নামান হয় :

$$\text{যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{W}{P} = \frac{2L}{D \tan (\alpha - \lambda)}.$$

[দ্রষ্টব্য : যখন ঘর্ষণ জনিত বাধা অগ্রাহ্য করা হয়, তখন উভয় ক্ষেত্রেই যান্ত্রিক সুবিধা সমান।

সুতরাং, যান্ত্রিক সুবিধা $= \frac{W}{P} = \frac{2\pi L}{p}$].

(b) ডিফারেন্সিয়াল স্ক্রু-জ্যাক (Differential screw jack) :

p_1 = বড় স্ক্রু-র থাক ; p_2 = ছোট স্ক্রু-র থাক হইলে, $p = p_1 - p_2$ = স্ক্রু-জ্যাকের থাক্।

(i) স্ক্রু-জ্যাকের বেগানুপাত $= \dfrac{2\pi L}{p_1 - p_2}$.

(ii) যোগ্যতা $= \dfrac{\text{যান্ত্রিক সুবিধা}}{\text{বেগানুপাত}}$.

উদাহরণমালা—XI-D

উদা. 1. একটি উল্লম্ব স্ক্রু-র থাক 1 ইঞ্চি, $3\frac{1}{2}$ ফুট দীর্ঘ বাহুর প্রান্তে 20 পা. ভারের সমান উদ্যম প্রয়োগ করিয়া কত ভার উত্তোলন করা যায় ?

$L = 3\frac{1}{2}$ ফুট $= \frac{7}{2} \times 12$ ইঞ্চি, $p = 1$ ইঞ্চি

$\dfrac{W}{P} = \dfrac{2\pi L}{p}$, $\therefore$ $W = \dfrac{2 \times 22 \times 7 \times 12}{7 \times 2 \times 1} \times 20 = 5280$ পা. ভার।

উদা. 2. একটি স্ক্রু-র প্রতি ইঞ্চিতে সাতটি থাক আছে। ইহাকে 1 ফুট দীর্ঘ বাহুর প্রান্তের উদ্যম প্রয়োগ করিয়া ঘুরানো হয়। উদ্যম ও ভারের অনুপাত নির্ণয় কর।

p = থাক $= \frac{1}{7}$ ইঞ্চি $= \frac{1}{84}$ ফুট ; $L = 1$ ফুট

$\dfrac{W}{P} = \dfrac{2\pi L}{p} = \dfrac{2\pi \times 1 \times 84}{1} = \dfrac{528}{1}$, $\quad \dfrac{P}{W} = \dfrac{1}{528}$

উদা. 3. একটি স্ক্রু-র থাক $\frac{1}{7}$ ইঞ্চি। ইহাকে 4 ফুট দীর্ঘ বাহুর প্রান্তে উদ্যম প্রয়োগ করিয়া চালান হয়। কত উদ্যম প্রয়োগ করিয়া 66 হন্দর ভার উত্তোলন করা যায়।

এখানে $W = 66$ হন্দর $= 66 \times 112$ পা. ভার। $p = \frac{1}{7}$ ইঞ্চি $= \frac{1}{7 \times 12}$ ফুট।

$P = \dfrac{Wp}{2\pi L} = \dfrac{66 \times 112 \times 1}{7 \times 12 \times 2\pi \times 4} = \dfrac{66 \times 2 \times 7}{12 \times 22} = \dfrac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ পা. ভার।

উদা. 4. একটি স্ক্রু-র উদ্যম প্রয়োগের বাহু 2 ফুট দীর্ঘ ; ইহার প্রতি ইঞ্চিতে দুইটি তার আছে। এক টন ভার উত্তোলন করিতে কত উদ্যম প্রয়োগ করিতে হইবে ?

$W = 2240$ পা. ভার, $p = \dfrac{1}{2 \times 12}$ ফুট, $L = 2$ ফুট. $P = ?$

$P = \dfrac{Wp}{2\pi L} = \dfrac{2240 \times 7}{2 \times 12 \times 2 \times 22 \times 2} = \dfrac{245}{33} = 7\frac{14}{33}$ পা. ভার।

উদা. 5. একটি স্ক্রুতে 7 ফুট দীর্ঘ লিভারের উভয় প্রান্তে 10 পা. ভার উদ্যম প্রয়োগ করিয়া যদি 1000 পা. ভার চাপ উৎপাদন করা যায়, তাহা হইলে স্ক্রু-র থাক নির্ণয় কর।

$L = 7$ ফুট, $P = 10$ পা. ভার, $W = 1000$ পা. ভার, p নির্ণয় করিতে হইবে।

$$P.2\pi \times 7 = 1000\ p.$$

$$\therefore \quad p = \frac{10 \times 2 \times 22 \times 7}{7 \times 1000} = 44 \text{ ফুট} = \frac{44 \times 12}{100} \text{ ইঞ্চি} = \frac{132}{25} = 5\tfrac{7}{25} \text{ ইঞ্চি।}$$

উদা. 6. একটি স্ক্রু-র-ব্যাস 10 সেন্টিমিটার এবং থাক 1 সেন্টিমিটার ; কত উদ্যম প্রয়োগ করিলে 110 কিলোগ্রাম ভার উত্তোলন সম্ভব হইবে ?

$L = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ সেমি., $p = 1$ সেমি.

$$P = \frac{Wp}{2\pi L} = \frac{110 \times 7}{2 \times 22 \times 5} = 3{\cdot}5 \text{ কি. গ্রা. ভার।}$$

উদা. 7. একটি কীলকের ছেদ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ; ইহার বাহুগুলি 8, 12, 12 ইঞ্চি। ইহা একখণ্ড পাথর চিড়িবার জন্য ব্যবহৃত হইতেছে। 100 পা. ভার বল ইহার পৃষ্ঠদেশে প্রয়োগ করিলে ইহার দুই সমবাহুর প্রত্যেকের উপর কি চাপ পড়িবে ?

ধর, চাপ P ; তাহা হইলে P এবং P-এর লব্ধি সমান 100 পা. ভার ;

$$100 \text{ পা. ভার} = 2P \times \frac{4}{12}\ ; \quad \therefore \quad P = \frac{100 \times 3}{2} = 150 \text{ পা. ভার।}$$

উদা. 8. একটি স্ক্রু-র থাক $\frac{1}{4}$ ইঞ্চি, ইহাকে ঘুরাইবার লিভারের দৈর্ঘ্য 4 ফুট ; কত উদ্যম 15 হন্দর ভার উত্তোলন করিবে ?

$W = 15$ হন্দর $= 15 \times 112$ পা. ভার ; $p = \frac{1}{4}$ ইঞ্চি $= \frac{1}{48}$ ফু. ; $L = 4$ ফু.

$$P = \frac{Wp}{2\pi . L} = \frac{15 \times 112 \times 7}{48 \times 2 \times 22 \times 4} = \frac{245}{176} = 1\tfrac{69}{176} \text{ পা. ভার।}$$

উদা. 9. একটি স্ক্রু-জ্যাকের থাক 0·8 সে.মি. এবং হাতলের দৈর্ঘ্য 16 সে.মি.। স্ক্রু-জ্যাকটি একটি 500 কিলোগ্রাম ভারের একটি গাড়ীর একপ্রান্তে বসান হইল। গাড়ীর এই প্রান্তটি হাতলের প্রান্তে 5 কিলোগ্রাম ভার বল প্রয়োগ করিয়া উপরের দিকে তোলা যায়। বেগানুপাত, যান্ত্রিক সুবিধা ও যোগ্যতা নির্ণয় কর।

$$\text{বেগানুপাত} = \frac{2\pi L}{p} = \frac{2\pi \times 16}{0{\cdot}8} = 40\pi = 125{\cdot}7$$

$$\text{যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{W}{P} = \frac{500}{5} = 100.$$

$$\text{যোগ্যতা} = \frac{\text{যান্ত্রিক সুবিধা}}{\text{বেগানুপাত}} = \frac{100}{125{\cdot}7} \times 100\% = 79{\cdot}5\%$$

উদা. 10. একটি ডিফারেন্সিয়াল স্ক্রু-জ্যাকের স্ক্রু দুইটির থাক 0·4 সে.মি. ও 0·6 সে.মি.। জ্যাকটির যোগ্যতা 70% হইলে 25 সে.মি. দীর্ঘ একটি হাতলের প্রান্তে কি উদ্যম প্রয়োগ করিয়া 3500 কিলোগ্রাম ভারকে সাম্যাবস্থায় রাখা যাইবে।

$$\text{বেগানুপাত} = \frac{2\pi L}{p_1 - p_2} = \frac{2 \times \pi \times 25}{0{\cdot}6 - 0{\cdot}4} = 250\pi.$$

$$\text{যোগ্যতা} = \frac{\text{যান্ত্রিক সুবিধা}}{\text{বেগানুপাত}}\text{; যেহেতু যোগ্যতা} = 70\%$$

$$\therefore \quad \text{যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{70}{100} \times 250 \times \frac{22}{7} = 550.$$

এক্ষণে উদ্যম P হইলে, ভার = 3500 কিগ্রা.

$$\therefore \quad \frac{3500}{P} = \text{যান্ত্রিক সুবিধা} = 550$$

$$\therefore \quad P = \frac{3500}{550} = 6{\cdot}36 \text{ কিলোগ্রাম (প্রায়)।}$$

প্রশ্নমালা—XI

1. যদি প্রথম প্রণালীর কপিকলে চারটি সরণক্ষম কপি থাকে এবং সর্বনিম্ন কপি হইতে আরম্ভ করিয়া কপিগুলির ভার যথাক্রমে 4, 3, 2 এবং 1 পা. হয়, তাহা হইলে 10 পা. ভার উদ্যম কত ভার উত্তোলন করিতে পারে ?

2. একটি দড়ির কপিকলে নীচের ব্লকের ভার 10 পাউণ্ড। নীচের ব্লকে অন্তত কয়টি কপি থাকিলে 30 পাউণ্ডের কম উদ্যম প্রয়োগ করিয়া 150 পা. ভার উত্তোলন করা যাইবে ? উদ্যমের পরিমাণ নির্ণয় কর।

3. একজন লোকের ভার 60 কি.গ্রা., সে দ্বিতীয় প্রণালীর কপিকলের সাহায্যে 224 কিগ্রা. ভার উঠাইতেছে। প্রত্যেক ব্লকে চারিটি কপি আছে। যদি লোকটি উল্লম্ব নীচের দিকে টানে, কপি ও নীচের ব্লকের ভার গণ্য না করিলে মাটির উপর কি চাপ পড়িবে ?

4. তৃতীয় প্রণালীর কপিকলে তিনটি গতিশীল কপি থাকিলে যান্ত্রিক সুবিধা নির্ণয় কর।

5. তৃতীয় প্রণালীর কপিকলে কত সংখ্যক ভারহীন কপি থাকিলে, 6 কিগ্রা. ভার উদ্যমের দ্বারা 90 কিগ্রা ভার উত্তোলন সম্ভব হইবে ?

6. তৃতীয় প্রণালীর কপিকলে তিনটি কপি আছে। সর্বনিম্ন কপির ভার 1 পাউণ্ড এবং তাহার উপর দ্বিতীয় কপির ভার 2 পাউণ্ড। 75 পাউণ্ড ভার উত্তোলন করিতে হইলে কি পরিমাণ উদ্যমের প্রয়োজন হইবে ?

7. (*a*) দ্বিতীয় প্রণালীর কপিকলে 7টি কপি আছে। যদি 6 পাউণ্ড ভারের উদ্যম 32 পাউণ্ড ভারকে সাম্যাবস্থায় রাখিতে পারে তবে নীচের ব্লকের ভার নির্ণয় কর।

(*b*) একটি দ্বিতীয় প্রণালীর কপিকলে 4 এবং 5 পাউণ্ড ভার যথাক্রমে 14 এবং 20 পাউণ্ড ভারকে সাম্যাবস্থায় রাখে। কপির সংখ্যা ও নীচের ব্লকের ভার নির্ণয় কর।

[H.S. 1962, '68]

8. একটি দ্বিতীয় প্রণালীর কপিকলে দেখা গেল যে w পাউণ্ড ভার W ভারকে সাম্যাবস্থায় রাখে এবং w' পাউণ্ড ভার W′ ভারকে সাম্যাবস্থায় রাখে। কপির সংখ্যা ও নীচের ব্লকের ভার নির্ণয় কর।

9. 10 ইঞ্চি লম্বা সুপারি ভাঙ্গা জাঁতির ভিতর জাঁতির মাথা হইতে $\frac{5}{8}$ ইঞ্চি দূরে সুপারি রাখিয়া অপর প্রান্তে $3\frac{1}{2}$ পাউণ্ড ভার বল প্রয়োগ করিলে ইহা ভাঙ্গে। সুপারির ঠিক উপরে কত বল রাখিলে ইহা ভাঙ্গিবে ?

10. (*a*) একটি দ্বিতীয় প্রণালীর কপিকলে 6 কিলোগ্রাম ভার 28 কিলোগ্রাম ভারকে সাম্যাবস্থায় রাখে এবং 8 কিলোগ্রাম ভার 42 কিলোগ্রাম ভারকে সাম্যাবস্থায় রাখে। কপির মোট সংখ্যা ও নীচের ব্লকের ভার নির্ণয় কর।

(*b*) একটি প্রথম শ্রেণীর সরল লিভারে আলম্বের উপর চাপ 12 পাউণ্ড ভার এবং আলম্বের দুই পার্শ্বের বল দুইটির পার্থক্য 4 পাউণ্ড ভার। তাহারা যে বাহুদ্বয়ে ক্রিয়া করে তাহার অনুপাত নির্ণয় কর।

[H.S. 1967]

11. একটি ডিফারেন্সিয়াল স্ক্রু-জ্যাকের স্ক্রু দুইটির থাক 3 ইঞ্চি ও 4 ইঞ্চি। জ্যাকটির যোজ্যতা 60% হইলে এবং উহার হাতলের প্রান্তে 35 পাউণ্ড উদ্যম প্রয়োগ করিয়া একটি 13,200 পাউণ্ড ভারকে সাম্যাবস্থায় রাখা হইয়াছে। ঐ জ্যাকটির হাতলের দৈর্ঘ্য কত ছিল ?

12. দুইটি ডিফারেন্সিয়াল স্ক্রু-জ্যাকের একটির স্ক্রু দুইটির থাক a_1 ও a_2 এবং অপরটির b_1 ও b_2. ঐ জ্যাক দুইটির যোগ্যতা যথাক্রমে $x\%$ এবং $y\%$. উহাদের হাতলের প্রান্তে একই উদ্যম প্রয়োগ করিয়া যথাক্রমে W_1 ও W_2 ভারকে সাম্যাবস্থায় রাখা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, উহাদের হাতলের দৈর্ঘ্যের অনুপাত $W_1\, y(a_1-a_2) : W_2\, x(b_1-b_2)$.

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা—I

1. 16 পা. ভার এবং 9 পা. ভার ; **2.** 12 পা. এবং 5 পা. ভার ; **3.** 25 গ্রাম ভার ; **4.** 120° ; **8** $2\sqrt{2}$; **9.** AC বরাবর 2AC ; **14.** 4 পা. ভার।

প্রশ্নমালা—II

1. 5 পা. ভার, $5\sqrt{3}$ পা. ভার ; **2.** $-8\sqrt{2}$ পা. ভার, $8\sqrt{2}$ পা. ভার ; **4.** প্রত্যেক 200 গ্রাম ভার ; **6.** অপর উপাংশ 50 গ্রাম ভার, লব্ধি $50\sqrt{3}$ গ্রাম ভার ; **7.** $Q=P\sqrt{2}$, $\alpha=135°$; **8.** 20 পা. ভার ; **22.** P এর প্রান্ত বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া Q-র মানের ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত ; **27.** DC অভিমুখে 2P বল।

প্রশ্নমালা—III

1. 28·8 পাউণ্ড ও 38·4 পাউণ্ড ; **2.** যখন তিনটি বলই একই সরলরেখায় এবং প্রথম বলটি শেষের বল দুইটির বিপরীত দিকে ক্রিয়া করিলে ; **4.** 4 পাউণ্ড ভার, 5 পাউণ্ড ভার ; **8.** $2\frac{4}{5}$ পাউণ্ড ভার ও $9\frac{3}{5}$ পাউণ্ড ভার ; **10.** 20 পাউণ্ড ভার, 15 পাউণ্ড ভার ;

প্রশ্নমালা—IV

1. 20 পাউণ্ড ভার ও 30 পাউণ্ড ভার ; **2.** (i) 36 পাউণ্ড ভার, (ii) 72 পাউণ্ড ভার ; **3.** বেশী ভার বহনকারী হইতে দণ্ডটির $\frac{5}{311}$ অংশ দূরে ; **5.** 70 পাউণ্ড ভার ও 98 পাউণ্ড ভার, 4 ফুট ; **6.** 7 : 5 ; **7.** 28·2 ও 40·8 পাউণ্ড ভার ; **8.** 2 ফুট ; **9** $102\frac{2}{3}$ ও $51\frac{1}{3}$ পাউণ্ড ভার ; **10.** 20 পাউণ্ড ভার, 8 ইঞ্চি ও 4 ইঞ্চি ; **12.** 35 ও 40 পা. ভার ; **13.** $46\frac{7}{8}$ ও $28\frac{1}{8}$ কিলোগ্রাম ভার ; **14.** 24 ও 36 কিগ্রা. ; **15.** 58 ও 42 পাউণ্ড ভার ; **16.** 6 ইঞ্চি ; **17.** $3\frac{1}{2}$ ও $4\frac{1}{2}$ টন ভার ; **18.** 2 পাউণ্ড ভার ; **19.** $12\frac{1}{2}$ ও $31\frac{1}{2}$ পা. ভার।

প্রশ্নমালা—V

1. $10\sqrt{2}$ ফুট উপরে ; **2.** 29 কিগ্রা, 21 কিগ্রা ; **3.** 14·4 এবং 33·6 পা. ভার ; **4.** 3 পাউণ্ড ভার ; **5.** $P\sqrt{3}$, BC-এর লম্বাভিমুখে ; বর্ধিত BC-কে BC-র দেড়গুন দূরে ছেদ করে ; **6.** B হইতে $2\frac{7}{8}$ ফুট দূরে ; **7.** $20\sqrt{5}$ পাউণ্ড ভার, $\tan^{-1}\frac{1}{2}$, 10 ফুট ; **8.** 5 কিগ্রা. ভার ; **9.** 28·2 ও 40·8 পাউণ্ড ভার ; **10.** $\frac{M}{M+N}$; **11.** $12\frac{1}{2}$ ও $31\frac{1}{2}$ পা. ভার ; **12.** 58 ও 42 পাউণ্ড ভার ;

15. (i) F=13, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের A বিন্দুতে স্পর্শক বরাবর ;

(ii) F=13, A হইতে BC-র উপর লম্ব বরাবর ;

প্রশ্নমালা—VI

1. 36 ফুট. পাউণ্ড ; 3. $(P-Q)a$; 5. প্রদত্ত 10 কিগ্রা. বলের সমান্তরাল এবং 20 সেমি. দূরে একটি 10 কিগ্রা বল ; 6. $5a$, বর্গক্ষেত্রের বাহু a হইলে।

প্রশ্নমালা—VII

1. $20\sqrt{2}$ পা. ভার. ও $20\sqrt{2}$ পা. ভার ; 2. $\frac{2W}{\sqrt{3}}, \frac{W}{\sqrt{3}}$;
7. $\frac{4}{3}\sqrt{39}$ কিগ্রা. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ কিগ্রা ; 9. $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ ফুট, $\sqrt{7}$ পাউণ্ড ভার ; 10. $\frac{W\sqrt{2}}{2}$;
11. 45°, $\frac{W}{2}$ (W = দণ্ডের ভার) ; 12. $\frac{2W}{\sqrt{3}}, \frac{W}{\sqrt{3}}$.

প্রশ্নমালা—VIII

3. $\frac{W}{2}$; 4. 80 কিগ্রা., 100 কিগ্রা. ; 15. 125 পা. ভার।

প্রশ্নমালা—IX

1. $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$; 2. 11·345 ইঞ্চি (প্রায়) ; 3. $\bar{x}=\frac{1}{2}z$, $\bar{y}=\frac{19}{30}a$;
5. CD সরলরেখার উপর C হইতে 16 সেমি দূরে ; 8. 1·8 ফুট ; 10. $8\frac{5}{11}$ ইঞ্চি ;
12. কর্ণ AC-র উপর $\frac{AC}{21}$ দূরে সরিয়া যাইবে ; 13. $\frac{5}{8}$ সেমি. দূরে ;
14. $\frac{11a}{6}$ দূরে (a = বর্গক্ষেত্রের বাহু) ; 15. 1 ফুট 4 ইঞ্চি ; 16. 8 ইঞ্চি।

প্রশ্নমালা—X

1. (a) 8 পা. ভার, (b) $\frac{80(5-2\sqrt{3})}{13}$ পা. ভার ; 2. $10\sqrt{3}$ পা. ভার, ; 10 পা. ভার ; 3. $\frac{W}{\sqrt{3}}$; 6. 30°, $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 7. $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 8. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ পাউণ্ড ভার ;
9. $28\sqrt{2}$ পাউণ্ড ভার ; 10. $\frac{1}{4}$, $8\sqrt{17}$ কিগ্রা. অনুভূমিকের সহিত $\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{1}{4}\right)$ কোণে ; 11. $\frac{1}{4}$; 12. শেষপ্রান্ত পর্যন্ত ; 13. $\frac{1}{4}$; 14. 45° ;
15. $10\sqrt{3}$ পাউণ্ড ভার, $20\sqrt{3}$ পাউণ্ড ভার ; 16. $10\sqrt{3}$ পাউণ্ড ভার, $20\sqrt{3}$ পাউণ্ড ভার।

প্রশ্নমালা—XI

1. 134 পা. ভার ; 2. 3, $26\frac{2}{3}$ পা. ভার ; 3. 32 কিগ্রা. ; 4. 7 ;
5. 4 ; 6. 10 পা. ভার ; 7. (a) 10 পাউণ্ড ভার ; (b) 6 এবং 10 পাউণ্ড ভার ;
8. $\frac{W-W'}{w-w'}$, $\frac{Ww'-W'w}{w-w'}$; 9. 42 পাউণ্ড ভার ; 10. (a) 6, 8 কিগ্রা, ভার ;
(b) 2 : 1 ; 11. $8\frac{1}{3}$ ফুট ;

HIGHER SECONDARY EXAMINATION—1978

MATHEMATICS

First Paper

GROUP—A

1. (*a*) যদি $\frac{x}{y} \propto x+y$ এবং $\frac{y}{x} \propto x-y$, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, x^2-y^2 ধ্রুবক।

(*b*) যদি x, y-এর সহিত সরল ভেদে এবং y, z-এর সহিত বিপরীত অর্থাৎ ব্যস্ত ভেদে থাকে, তাহা হইলে নিম্নলিখিত উক্তিগুলির মধ্যে কোন্‌টি সত্য? যুক্তি দিয়া লিখ।

(i) x, z এর সহিত সরলভেদে থাকে ;

(ii) x, z এর সহিত ব্যস্তভেদে থাকে।

(*c*) (i) যদি α এবং $\beta - x(x-3)=4$ এর দুইটি বীজ হয়, তাহা হইলে $\alpha^2+\beta^2$ এর মান কত হইবে নির্ণয় কর।

(ii) যদি $2x^2-5x+K=0$-এর একটি বীজ অপরটির দ্বিগুণ হয় তবে K-এর মান বাহির কর।

Ans. (*a*) $\because \frac{x}{y} \propto x+y \quad \therefore \frac{x}{y}=K_1(x+y), \cdots\cdots(1)$

যেথানে $K_1(\neq 0)$ একটি ভেদ-ধ্রুবক।

আবার যেহেতু $\frac{y}{x} \propto x-y \quad \therefore \frac{y}{x}=K_2(x-y), \cdots\cdots(2)$

যেথানে $K_2(\neq 0)$ একটি ভেদ-ধ্রুবক

(1) ও (2) হইতে পাই,

$$\frac{x}{y} \times \frac{y}{x}=K_1(x+y) \times K_2(x-y)$$

বা, $1=K_1K_2(x^2-y^2)$ বা, $x^2-y^2=\frac{1}{K_1K_2}$

$\therefore x^2-y^2=$ ধ্রুবক ($\because$ K_1 ও K_2 ধ্রুবক)।

(*b*) $\because x \propto y \quad \therefore x=K_1 y, \cdots\cdots(1)$

যেথানে $K_1(\neq 0)$ একটি ভেদ-ধ্রুবক।

আবার যেহেতু $y \propto \frac{1}{z} \quad \therefore yz=K_2, \cdots\cdots(2)$

যেথানে $K_2(\neq 0)$ একটি ভেদ-ধ্রুবক।

(1)×(2) করিয়া পাওয়া যায়, $xyz=K_1K_2y$

বা, $xz=K_1K_2$ $(\because \ y\neq 0)$ $\therefore$ $xz=$ ধ্রুবক।

$\because$ x, z-এর সহিত ব্যস্তভেদে থাকে। $\therefore$ (ii) শুদ্ধ।

(c) (i) $\therefore$ $x(x-3)=4$ $\therefore$ $x^2-3x(-4)=0\cdots\cdots(1)$

$\therefore$ α ও β, (1)নং সমীকরণের বীজদ্বয় $\therefore$ $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-4$

প্রদত্ত রাশি$=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(3)^2-2\times(-4)=9+8=17.$

(ii) মনে কর, প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় α ও 2α.

$\therefore$ $\alpha+2\alpha=\frac{5}{2}$ $\therefore$ $3\alpha=\frac{5}{2}$ $\therefore$ $\alpha=\frac{5}{6}$.

আবার, $\alpha\times 2\alpha=\frac{K}{2}$ বা, $2\alpha^2=\frac{K}{2}$ বা, $2\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{K}{2}$

বা, $\frac{2\times 25\times 2}{36}=K.$ বা, $K=\frac{25}{9}$.

2. (a) একটি শ্রেণী সমান্তর প্রগতিতে আছে। উহার প্রতি পদকে তিনগুণ করিয়া যে নূতন শ্রেণী হইবে তাহাও কি সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে? যুক্তি সহ উত্তর দাও।

(b) একটি সমান্তর শ্রেণীর 12-তম পদ -13 এবং প্রথম চারটি পদের যোগফল 24 হইলে উহার প্রথম 10টি পদের যোগফল বাহির কর।

(c) $A+iB$ (A ও B বাস্তব সংখ্যা) এই আকারে প্রকাশ কর : $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$.

Ans. (a) নূতন শ্রেণীটিও সমান্তর প্রগতিতে থাকিবে যাহার সাধারণ অন্তর হইবে প্রথম সমান্তর প্রগতির তিনগুণ।

ধরা যাক, প্রদত্ত সমান্তর প্রগতিটি হইল a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d,\cdots\cdots$

উপরোক্ত প্রগতির প্রত্যেক পদকে 3 দ্বারা গুণ করিলে নূতন শ্রেণীটি হইবে,

$3a$, $3a+3d$, $3a+6d,\cdots\cdots$স্পষ্টতঃ নূতন শ্রেণীটি একটি সমান্তর প্রগতি যাহার সাধারণ অন্তর হইল $3d$.

(b) মনে কর, সমান্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ$=a$ এবং সাধারণ অন্তর$=b$.

শর্তানুসারে, $t_{12}=a+11b=-13\cdots\cdots(1)$

আবার, $S_4=\frac{4}{2}\{2a+(4-1)b\}=24$ বা, $2(2a+3b)=24$

বা, $2a+3b=12\cdots\cdots(2)$

$$\begin{array}{l} 2a+22b=-26\cdots\cdots(1)\times 2 \\ 2a+\ 3b=\ \ 12\cdots\cdots(2) \\ \hline \end{array}$$

(বিয়োগ করিয়া) $19b=-38$

বা, $b=\frac{-38}{19}=-2$ $\therefore$ (1) হইতে পাওয়া যায় $a+11\times(-2)=-13$.

বা, $a-22=-13$ বা, $a=22-13=9$

$\therefore$ $S_{10}=\frac{10}{2}\{2a+(10-1)b\}=5\{2\times9+9\times(-2)\}$
$=5\{18-18\}=5\times0=0.$

(c) প্রদত্ত রাশি $=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3=\left\{\frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}\right\}^3=\left\{\frac{1+i^2+2i}{1-i^2}\right\}^3$

$=\left\{\frac{1-1+2i}{1-(-1)}\right\}^3=\left(\frac{2i}{2}\right)^3=i^3=i^2\times i=(-1)\times i$

$=-i=0+i\times(-1)$, যাহা $A+iB$ আকারের।

3. (a) People এই শব্দটির অক্ষরগুলি একযোগে লইয়া কতগুলি শব্দ পাওয়া যাইবে, যাহাদের মধ্যে দুটি P পাশাপাশি থাকিবে না ?

(b) ${}^nC_r+{}^nC_{r-1}={}^{n+1}C_r$ এই সূত্রটি প্রমাণ কর।

(c) বর্গমূল নির্ণয় কর : $5+2\sqrt{6}$.

Ans. (a) People শব্দটির মধ্যে মোট ছয়টি অক্ষর আছে যাহাদের মধ্যে P দুইটি, e দুইটি এবং বাকী অক্ষরগুলি বিভিন্ন।

$\therefore$ মোট বিন্যাস সংখ্যা $=\frac{\lfloor 6}{\lfloor 2\,\lfloor 2}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times2}=180.$

এখন, কতগুলি বিন্যাসে দুইটি P একত্রে আছে তাহা নির্ণয়ের জন্য ঐ P দুইটিকে একটি অক্ষর ধরিয়া কয়টি বিন্যাস হয় তাহা দেখিতে হইবে। এস্থলে মোট অক্ষর হইল 5টি এবং তাহাদের মধ্যে e দুইটি আছে।

$\therefore$ ঐরূপ বিন্যাস সংখ্যা $=\frac{\lfloor 5}{\lfloor 2}=\frac{5\times4\times3\times2}{2}=60$

$\therefore$ যে বিন্যাসগুলিতে দুইটি P একত্রে থাকিবে না সেগুলির সংখ্যা
$=180-60=120.$

(b) বামপক্ষ $={}^nC_r+{}^nC_{r-1}$

$$=\frac{\lfloor n}{\lfloor r.\,\lfloor n-r}+\frac{\lfloor n}{\lfloor r-1\,\lfloor n-r+1}$$

$$=\frac{\lfloor n}{r.\,\lfloor r-1.\,\lfloor n-r}+\frac{\lfloor n}{\lfloor r-1.\,(n-r+1).\lfloor n-r}$$

$$=\frac{\lfloor n}{\lfloor r-1.\,\lfloor n-r}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r+1}\right)$$

$$=\frac{\lfloor n}{\lfloor r-1.\,\lfloor n-r}\left\{\frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}\right\}$$

$$=\frac{\lfloor n\times(n+1)}{\lfloor r-1.\lfloor n-r.r.(n-r+1)}=\frac{\lfloor n+1}{r.\lfloor r-1.(n-r+1)\lfloor n-r}$$

$$=\frac{\lfloor n+1}{\lfloor r.\lfloor n-r+1}=\frac{\lfloor n+1}{\lfloor r.\lfloor n+1-r}={}^{n+1}C_r.$$

(c) প্রদত্তরাশি $=5+2\sqrt{6}=3+2+2.\sqrt{3}.\sqrt{2}$

$$=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2+2.\sqrt{3}.\sqrt{2}.=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

4. (a) ধনাত্মক অখণ্ড সূচকের ক্ষেত্রে "দ্বিপদ উপপাদ্যের" উক্তি লিখ।

(b) $(a+x)^n$এর বিস্তৃতির মধ্যে সাধারণ পদটি লিখ। (n=অখণ্ড ধনাত্মক রাশি)।

(c) $\left(2x+\frac{1}{3x^2}\right)^9$-এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি নির্ণয় কর।

Ans. (a) n অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা হইলে,

$$(a+x)^n=a^n+{}^nc_1\,a^{n-1}x+{}^nc_2\,a^{n-2}x^2+\cdots+{}^nc_r\,a^{n-r}x^r+\cdots+x^n.$$

(b) $(r+1)$তম পদ হইল সাধারণ পদ।

∴ সাধারণ পদটি হইল ${}^nC_r\,a^{n-r}x^r$.

(c) মনে কর, $(r+1)$ তম পদটি x বর্জিত।

এখন $t_{r+1}={}^9C_r.(2x)^{9-r}.\left(\frac{1}{3x^2}\right)^r$

$$={}^9C_r.\,2^{9-r}.\,(\tfrac{1}{3})^r.\,x^{9-r-2r}={}^9C_r.\,2^{9-r}.\,(\tfrac{1}{3})^r.\,x^{9-3r}$$

∵ t_{r+1} তম পদটি x বর্জিত

∴ $9-3r=0$ ∴ $3r=9$ বা $r=3$.

∴ $(3+1)$ তম অর্থাৎ চতুর্থ পদটি x বর্জিত এবং পদটি হইল,

$${}^9C_3.\,2^{9-3}.(\tfrac{1}{3})^3=\frac{9\times8\times7}{\lfloor 3}.2^6.\frac{1}{3^3}$$

$$=\frac{9\times8\times7\times64}{3\times2\times3\times9}=\frac{1792}{9}=199\tfrac{1}{9}.$$

5. (a) e^xএর শ্রেণী বিবেচনা করিয়া প্রমাণ কর:

$$z=1+\log_e z+\left(\frac{\log_e z}{\lfloor 2}\right)^2+\left(\frac{\log_e z}{\lfloor 3}\right)^3+\cdots\infty \text{ পর্যন্ত।}$$

(b) যদি $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\infty$ হয়, তাহা হইলে প্রয়োজনীয় সর্তে, যাহা তোমাকে বলিতে হইবে,

প্রমাণ কর : $x=y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\cdots\infty$ ।

(*c*) বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হারে কত টাকা লগ্নী করিয়া 18 বৎসরে সুদে মূলে মোট 10,000 টাকা পাওয়া যাইবে ?

[প্রদত্ত : $\log 10\cdot4=1\cdot0170333$,
$\log 4936\cdot29=3\cdot6934006$.]

Ans. (*a*) $e^x=1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\infty$ পর্যন্ত ।

এখন $z=e^{\log_e z}$

[মনে কর, $p=e^{\log_e z}$

$\therefore \log_e p=\log_e(e^{\log_e z})=(\log_e z)(\log_e e)$

বা, $\log_e p=\log_e z\times1=\log_e z \quad \therefore p=z \quad \therefore z=e^{\log_e z}$]

$\therefore z=e^{\log_e z}=1+\log_e z+\frac{(\log_e z)^2}{\lfloor 2}+\frac{(\log_e z)^3}{\lfloor 3}$
$+\cdots\cdots\infty$ পর্যন্ত ।

(*b*) $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\infty$ পর্যন্ত

$=\log_e(1+x)$, যেখানে $-1<x\leqslant1$

$\therefore 1+x=e^y$

$\therefore x=e^y-1=(1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^2}{3!}+\cdots\cdots\infty$ পর্যন্ত$)-1$

$=y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\cdots\infty.$

(*c*) মনে কর, মূলধন = P টাকা ।

$\therefore 10{,}000=P(1+\frac{4}{100})^{18}=P(1+0\cdot04)^{18}=P\times(1\cdot04)^{18}$

$\therefore \log 10^4=\log\{P\times(1\cdot04)^{18}\}$

বা, $4=\log P+18\log 1\cdot04=\log P+18\times0\cdot0170333$

বা, $\log P=4-0\cdot3065994=3\cdot6934006$

বা, $\log P=\log(4936\cdot29)$

$\therefore P=4936\cdot29 \quad \therefore$ মূলধন $=4936\cdot29$ টাকা ।

Group—B

6. (*a*) দেখাও যে : $\cos 75^\circ=\frac{\sqrt3-1}{2\sqrt2}$

(*b*) একটি ধনাত্মক সূক্ষ্ম কোণকে দুই ভাগে ভাগ করা হইয়াছে যাহাদের tangents হইতেছে $\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{3}$, মূল কোণটি কত বাহির কর ।

(*c*) প্রমাণ কর : $\cot 2A+\tan A=\operatorname{cosec} 2A$

Ans. (*a*) বামপক্ষ $=\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)$

$$=\cos 45^\circ \cos 30^\circ-\sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

(*b*) মনে কর, মূল কোণটি $=\theta$ এবং $\theta=\alpha+\beta$,

শর্তানুসারে, $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ এবং $\tan\beta=\frac{1}{3}$.

এখন $\tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$

$=\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1=\tan 45^\circ$. $\therefore\ \theta=45^\circ$.

(*c*) বামপক্ষ $=\cot 2A+\tan A=\dfrac{\cos 2A}{\sin 2A}+\dfrac{\sin A}{\cos A}$

$$=\frac{\cos 2A.\cos A+\sin 2A.\sin A}{\sin 2A\cos A}=\frac{\cos(2A-A)}{\sin 2A\cos A}$$

$$=\frac{\cos A}{\sin 2A\cos A}=\frac{1}{\sin 2A}=\text{cosec } 2A.$$

7. (*a*) $\tan 2A$ কে $\tan A$র সাপেক্ষে প্রকাশ কর।

(*b*) যদি $\tan x=\dfrac{b}{a}$ হয়, তাহা হইলে $a\cos 2x+b\sin 2x$ এর মান নির্ণয় কর।

(*c*) $\sin 30^\circ$এর মান হইতে $\sin 15^\circ$এর মান নির্ণয় কর।

Ans. (*a*) $\tan 2A=\tan(A+A)=\dfrac{\tan A+\tan A}{1-\tan A.\tan A}=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$.

(*b*) প্রদত্ত রাশি $=a\cos 2x+b\sin 2x$

$$=\frac{a(1-\tan^2 x)}{1+\tan^2 x}+\frac{b\times 2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{a(1-\tan^2 x)+2b\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$=\frac{a\left\{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}+2b\times\frac{b}{a}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{a\times\frac{a^2-b^2}{a^2}+\frac{2b^2}{a}}{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\frac{\frac{a^2-b^2+2b^2}{a}}{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$$

$$=\frac{a^2+b^2}{a}\times\frac{a^2}{a^2+b^2}=a.$$

(*c*) 15° সূক্ষ্মকোণ বলিয়া $\cos 15^\circ$ ও $\sin 15^\circ$ উভয়েই ধনাত্মক। আবার যেহেতু $15^\circ<45^\circ$, $\sin 15^\circ<\cos 15^\circ$.

$\therefore\ \cos 15^\circ-\sin 15^\circ>0$.

এখন $\cos 15^\circ + \sin 15^\circ = \sqrt{1+\sin 30^\circ} = \sqrt{1+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ......(1)

$\cos 15^\circ - \sin 15^\circ = \sqrt{1-\sin 30^\circ} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ......(2)

(1) – (2) করিয়া পাই

$$2 \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

8. (*a*) প্রমাণ কর : $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(*b*) সাধারণ মান বাহির কর : $\sin 2\theta = \cos \theta$.

(*c*) কোন ত্রিভুজে $(a^2+b^2)\sin(A-B) = (a^2-b^2)\sin(A+B)$ হইলে, দেখাও যে ত্রিভুজটি হয় সমদ্বিবাহু নতুবা সমকোণী।

Ans. (*a*) মনে কর, $\tan^{-1}x = \theta$. $\quad \therefore \tan\theta = x$

বা, $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = x \qquad \therefore \frac{\pi}{2} - \theta = \cot^{-1}x$

বা, $\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x = \cot^{-1}x \qquad$ বা, $\frac{\pi}{2} = \tan^{-1}x + \cot^{-1}x$

$\therefore \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$.

(*b*) $\because \sin 2\theta = \cos\theta$

বা, $2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$ বা, $\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$

অতএব, হয় $\cos\theta = 0 \qquad$ নতুবা, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$.

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad$ বা, $\theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$,

যেখানে $n = 0$ বা যে কোন পূর্ণসংখ্যা।

(*c*) $\because (a^2+b^2)\sin(A-B) = (a^2-b^2)\sin(A+B)$

$\therefore \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$

বা, $\frac{a^2+b^2+a^2-b^2}{a^2+b^2-(a^2-b^2)} = \frac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{\sin(A+B)-\sin(A-B)}$

[যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা]

বা, $\frac{2a^2}{2b^2} = \frac{2\sin A\cos B}{2\cos A\sin B}$

বা, $\frac{4R^2 \sin^2 A}{4R^2 \sin^2 B}=\frac{\sin A \cos B}{\cos A \sin B}$ $\left(\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R\right)$

বা, $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}=\frac{\sin A \cos B}{\cos A \sin B}$

বা, $\sin^2 A \cos A \sin B=\sin^2 B \sin A \cos B$

বা, $\sin A \cos A=\sin B \cos B$ $(\because A\neq 0°, B\neq 0°)$

বা, $2 \sin A \cos A=2 \sin B \cos B$

বা, $\sin 2A=\sin 2B=\sin (180°-2B)$

$\therefore$ $2A=2B$ বা, $2A=180°-2B$

$\therefore$ $A=B$ বা, $A+B=90°$

$\therefore$ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু নতুবা সমকোণী।

9. (*a*) $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$-এর ক্ষেত্রে $\cos 2\theta$-র লেখ অঙ্কন কর। যখন $\cos 2\theta=\frac{1}{2}$, তখন ঐ লেখ হইতে θ নির্ণয় কর।

(*b*) নিম্নলিখিত উক্তিটি কি সত্য হইতে পারে? যুক্তি দিয়া লিখ।

$3x+4=6-5 \tan 2x$ সমীকরণটির একটি সমাধান $x=\frac{\pi}{4}$.

(*c*) $x=-\frac{\pi}{2}$ এবং $x=0$-র মধ্যে $\sin x-\cos x=0$ সমীকরণটির কোন সমাধান পাওয়া কি সম্ভব? যুক্তি দিয়া লিখ।

Ans. (*a*) $y=\cos 2\theta$ অপেক্ষকের লেখ অংকন করিতে হইবে।

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\cos 2\theta$	1	·94	·77	·5	·17	−·17	−·5	−·77	−·94	−1

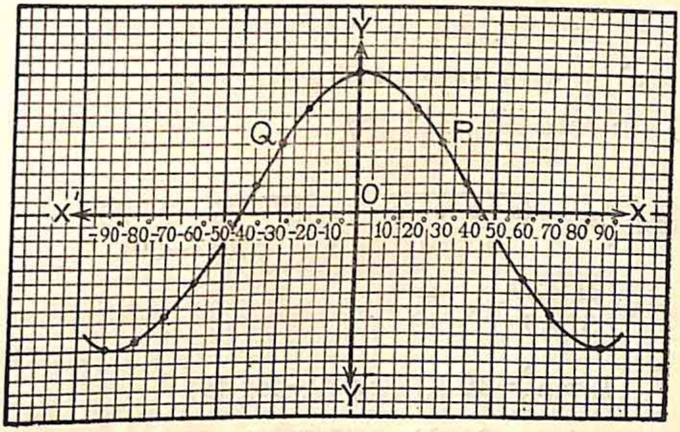
θ	−10°	−20°	−30°	−40°	−50°	−60°	−70°	−80°	−90°
$\cos 2\theta$	·94	·77	·5	·17	−·17	−·5	−·77	−·94	−1

x-অক্ষ বরাবর লেখা কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর 2 গুণ দ্বারা 10° এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর 10 গুণ দ্বারা 1 একক সূচিত করিয়া উপরের

বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত বক্ররেখা দ্বারা যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট লেখটি পাওয়া গেল।

$\theta=0$	5	6
$y=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

একই একক লইয়া $y=\frac{1}{2}$ সরলরেখাটি অঙ্কন করা হইল।



মনে কর, উহা $y=\cos 2\theta$-এর লেখকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। গণনা করিয়া দেখা গেল অনুরূপ θ-এর মান হইল 30° ও -30°.

(b) $x=\frac{\pi}{4}$ হইলে $2x=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

এখন যেহেতু $\tan 90^\circ$-এর মান অনির্দিষ্ট, স্পষ্টত: $x=\frac{\pi}{4}$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি সমাধান হইতে পারে না।

(c) $\sin x-\cos x=0$ $\quad\therefore\quad \sin x=\cos x$

বা, $\frac{\sin x}{\cos x}=1$ $\quad$ বা, $\tan x=1=\tan\frac{\pi}{4}$.

$\therefore\quad x=n\pi+\frac{\pi}{4}$, যেখানে $n=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots$

এখন $n=0$ হইলে $x=\frac{\pi}{4}$.

$$n=-1 \text{ ,, } x=-\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}.$$

স্পষ্টতঃ প্রদত্ত সমীকরণটির $x=-\frac{\pi}{2}$ ও 0-এর মধ্যে কোন সমাধান নাই।

10. (a) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 50, 36 এবং 28; বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত $\log 19=1{\cdot}2787536$, $\log 29=1{\cdot}4623980$.
$L \tan 51^\circ 0'=10{\cdot}0916308$, $L \tan 51^\circ 1'=10{\cdot}0918891$.

(*b*) কোন ত্রিভুজে নিম্নলিখিত ফলটি কি শুদ্ধ ?

$a=b\cos C-c\cos B.$

যদি শুদ্ধ না হয়, তাহা হইলে শুদ্ধ ফলটি কি ?

(*c*) কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাত $\sqrt{2}:2:(\sqrt{3}+1)$ ত্রিভুজটির কোণগুলির সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

Ans. (*a*) মনে কর, বৃহত্তম বাহু 50 হইল *a*. ∴ A কোণটি বৃহত্তম কোণ,

$$s=\frac{50+36+28}{2}=\frac{114}{2}=57.$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{(57-36)(57-28)}{57(57-50)}}$$

$$=\sqrt{\frac{21\times29}{57\times7}}=\sqrt{\frac{29}{19}}.$$

$$\therefore\quad L\tan\frac{A}{2}=10+\tfrac{1}{2}(\log 29-\log 19)$$

$$=10+\tfrac{1}{2}(1{\cdot}4623980-1{\cdot}2787536)=10+\tfrac{1}{2}\times{\cdot}1836444$$

$$=10+{\cdot}0918222=10{\cdot}0918222.$$

স্পষ্টতঃ $L\tan\frac{A}{2}$, $L\tan 51^\circ0'$ ও $L\tan 51^\circ1'$ এর মধ্যবর্তী।

∴ $\frac{A}{2}$ হইল $51^\circ0'$ এবং $51^\circ1'$ এর মধ্যবর্তী।

ধরা যাক, $\frac{A}{2}=51^\circ0'x''$

$10{\cdot}0918891-10{\cdot}0916308={\cdot}0002583$

$10{\cdot}0918222-10{\cdot}0916308={\cdot}0001914$

অন্তর $1'\equiv{\cdot}0002583$

$$\therefore\quad {\cdot}0001914\equiv\left(\frac{60\times1914}{2583}\right)=44''\ (\text{প্রায়})$$

$$\therefore\quad \frac{A}{2}=51^\circ0'44''\qquad\therefore\quad A=102^\circ1'28''.$$

(*b*) প্রদত্ত ফলটি শুদ্ধ নয়। শুদ্ধ ফলটি হইল $a=b\cos C+c\cos B$.

(*c*) মনে কর, $a:b:c=\sqrt{2}:2:(\sqrt{3}+1)$

আবার $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C.$

$$\therefore\quad \frac{\sin A}{\sqrt{2}}=\frac{\sin B}{2}=\frac{\sin C}{\sqrt{3}+1}\quad\text{বা,}\quad \frac{\sin A}{\frac{1}{2}}=\frac{\sin B}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sin C}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}$$

[$2\sqrt{2}$ দ্বারা প্রত্যেকটি অনুপাতের হরকে ভাগ করিয়া]

বা, $\frac{\sin A}{\sin 30^\circ}=\frac{\sin B}{\sin 45^\circ}=\frac{\sin C}{\sin 105^\circ}$......(1)

$$\left[\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right]$$

(1) হইতে উপসংহারে আসা যায় যে, কোণগুলির সম্ভাব্য মান $30^\circ, 45^\circ, 105^\circ$ হইতে পারে। ($\because$ $30^\circ+45^\circ+105^\circ=180^\circ$).

Group—C

11. (*a*) OX ও OY কোন লম্ব-কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়। আবার O এবং OX কোন মেরু স্থানাঙ্কের যথাক্রমে মূল বিন্দু ও মূল রেখা।

(i) যদি P বিন্দুর মেরু স্থানাঙ্ক $(2, 30^\circ)$ হয়, তবে উহার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(ii) যদি P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(0, 2)$ হয়, তবে উহার মেরু স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(iii) কোন সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ $y=x\tan\alpha$ হইলে উহার মেরু-সমীকরণ নির্ণয় কর।

(*b*) A ও B দুইটি বিন্দু যাহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-5, 3)$ ও $(2, 4)$; P বিন্দু এমনভাবে চলমান যে $PA : PB=3:2$; P-এর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। ইহা কিরূপ বক্ররেখা নির্দেশ করে ?

Ans. (*a*) (i) কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক হইল $(2\cos 30^\circ, 2\sin 30^\circ)$

$$\equiv\left(2.\frac{\sqrt{3}}{2}, 2.\frac{1}{2}\right)\equiv(\sqrt{3}, 1).$$

(ii) মনে কর, $(0, 2)\equiv(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\therefore$ $r\cos\theta=0\cdots(1)$ এবং $r\sin\theta=2\cdots(2)$

(1) হইতে পাওয়া যায়, $\cos\theta=0=\cos 90^\circ$ $\therefore$ $\theta=90^\circ$.

$\therefore$ (2) হইতে পাওয়া যায়, $r\sin 90^\circ=2$ বা, $r=2$.

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুটির মেরু স্থানাঙ্ক $(2, 90^\circ)$.

(iii) $y=x\tan\alpha$ সমীকরণে $x=r\cos\theta$ এবং $y=r\sin\theta$ বসাইয়া পাওয়া যায়, $r\sin\theta=r\cos\theta\tan\alpha$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\alpha$ বা, $\tan\theta=\tan\alpha$

$\therefore$ $\theta=\alpha$, যাহা হইল নির্ণেয় মেরু-সমীকরণ।

(*b*) মনে কর, একটি অবস্থানে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (h, k)

$\therefore \frac{PA}{PB}=\frac{3}{2} \quad \therefore \frac{\sqrt{(h+5)^2+(k-3)^2}}{\sqrt{(h-2)^2+(k-4)^2}}=\frac{3}{2}$

বা, $4(h^2+10h+25+k^2-6k+9)=9(h^2-4h+4+k^2-8k+16)$

বা, $5h^2+5k^2-76h-48k+44=0$

$\therefore$ P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল $5x^2+5y^2-76x-48y+44=0$ যাহা একটি বক্ররেখা এবং প্রকৃতপক্ষে একটি বৃত্তের পরিধি।

12. (*a*) $x+2y+3=0$ ও $3x+4y+7=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী ও $y=-\frac{5}{8}x$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(*b*) $3x-4y-5=0$ ও $4x+3y+2=0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। যে কোণের মধ্যে মূলবিন্দু অবস্থিত, সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডক কোন্‌টি?

Ans. (*a*) $x+2y+3=0 \cdots\cdots$(i) $\quad 3x+4y+7=0 \cdots\cdots$(ii)

(i) ও (ii) হইতে বজ্রগুণন করিয়া পাওয়া যায়, $\frac{x}{14-12}=\frac{y}{9-7}=\frac{1}{4-6}$

বা, $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{1}{-2} \quad \therefore x=-1,\ y=-1$

$\therefore$ (i) নং ও (ii) নং সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1, -1)$.

$y=-\frac{5}{8}x$ সরলরেখার সমান্তরাল যে কোন সরলরেখার সমীকরণ,

$$y=-\tfrac{5}{8}x+c \cdots\cdots \text{(iii)}$$

(iii) নং সরলরেখা $(-1, -1)$ বিন্দুগামী হইলে $-1=\frac{5}{8}+c$ হইবে।

বা, $c=-1-\frac{5}{8}=-\frac{13}{8}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ $y=-\frac{5}{8}x-\frac{13}{8}$ বা, $5x+8y+13=0$.

(*b*) প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ হইল $\frac{3x-4y-5}{\sqrt{9+16}}=\pm\frac{4x+3y+2}{\sqrt{16+9}}$

বা, $3x-4y-5=\pm(4x+3y+2)$

ডানপক্ষে '+' চিহ্ন লইয়া, একটি সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল,

$x+7y+7=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$(i)

বামপক্ষে '−' চিহ্ন লইয়া, একটি সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল,

$7x-y-3=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$(ii)

দ্বিতীয় অংশ :—

প্রদত্ত সরলরেখাদ্বয়ের ধ্রুবক পদদ্বয় বিপরীত চিহ্নযুক্ত [−5 ও 2]; সুতরাং ডানপক্ষে '−' চিহ্ন লইয়া যে সমীকরণ পাওয়া গিয়াছে তাহাই উদ্দিষ্ট সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইবে।

∴ যে কোণের মধ্যে মূলবিন্দু আছে সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল $7x-y-3=0$.

13. (*a*) পরীক্ষা করিয়া দেখাও যে, $x^2+y^2-x-4y+7=0$ সমীকরণটি কোন বৃত্তকে বুঝায় কিনা।

(*b*) নিম্নলিখিত উক্তিগুলির মধ্যে কোন্‌টি ঠিক এবং কেন ?

"(2, 1) বিন্দুটি $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ বৃত্তের (i) উপরে; (ii) ভিতরে; (iii) বাহিরে অবস্থিত।"

(*c*) প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2-4=0$ এবং $2x^2+2y^2-11=0$ বৃত্তদ্বয় এককেন্দ্রীয়।

Ans. (*a*) $\because\ x^2+y^2-x-4y+7=0 \quad \therefore\ x^2-x+y^2-4y=-7$

বা, $x^2-2.\frac{1}{2}.x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2-2.2.y+2^2=-7+\left(\frac{1}{2}\right)^2+(2)^2$

বা, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=-7+\frac{1}{4}+4=-2\frac{3}{4}<0$

x ও yএর বাস্তব মানের জন্য $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0,\ (y-2)^2\geqslant 0$

$\therefore\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2<0$ হইতে পারে না।

∴ প্রদত্ত সমীকরণটি কোন বাস্তব বৃত্তের (real circle) সমীকরণ নহে।

(*b*) $\because\ x^2+y^2-4x-6y+9=0 \quad \cdots \quad \cdots$ (i)

$\therefore\ x^2-4x+4+y^2-6y+9=-9+4+9$

বা, $(x-2)^2+(y-3)^2=4=(2)^2$, যাহা $(x-\alpha)+(y-\beta)^2=a^2$ রূপের।

∴ (i) নং বৃত্তের কেন্দ্র $A\equiv(2, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ $(a)=2$ একক।

মনে কর, $P\equiv(2, 1)$ ∴ $AP=\sqrt{(2-2)^2+(3-1)^2}=2$ একক।

∵ $AP=a$, অতএব P বিন্দুটি বৃত্তের উপরে অবস্থিত।

(*c*) $\because\ x^2+y^2-4=0 \quad \cdots \quad \cdots$(i)

$\therefore\ x^2+y^2=4=(2)^2$, যাহা $x^2+y^2=a^2$ রূপের।

∴ (i)নং বৃত্তটির কেন্দ্র (0, 0)।

$\because \quad 2x^2+2y^2-11=0 \quad .... \quad \cdots$(ii)

$\therefore \quad x^2+y^2=\frac{11}{2}=\left(\sqrt{\frac{11}{2}}\right)^2$ যাহা $x^2+y^2=a^2$ রূপের।

$\therefore$ (ii) নং বৃত্তটির কেন্দ্র (0, 0)।

$\therefore$ প্রদত্ত বৃত্তদ্বয় এককেন্দ্রীয়।

14. (*a*) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2$ উপবৃত্তের উপরিস্থিত (3, 2) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(*b*) $4x^2-9y^2=36$ পরাবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা (eccentricity) কত? (3, 0) বিন্দুতে এই পরাবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

Ans. (*a*) $\because \quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2 \qquad \therefore \quad 4x^2+9y^2=72 \cdots\cdots$(i)

(i)নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে differentiate করিয়া পাওয়া যায়

$8x+18y.\frac{dy}{dx}=0$ বা, $\frac{dy}{dx}=-\frac{8x}{18y}=-\frac{4x}{9y}$

$\therefore$ (3, 2) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$এর মান হইল $-\frac{4\times 3}{9\times 2}=-\frac{2}{3}$.

$\therefore$ (3, 2) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ হইল $y-2=-\frac{2}{3}(x-3)$

বা, $3y-6=-2x+6$ বা, $3y+2x=12$

(*b*) $\because \; 4x^2-9y^2=36$

$\therefore \quad \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$, যাহা $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ রূপের।

এখানে $a^2=9, b^2=4 \qquad \because \quad b^2=a^2(e^2-1)$

$\therefore \quad 4=9(e^2-1)$ বা, $9-e^2=13 \quad \therefore \quad e=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

দ্বিতীয় অংশ ঃ (3, 0) বিন্দুতে প্রদত্ত পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$4x.3-9y.0=36$ বা, $x=3 \quad \cdots \quad \cdots$(i)

(i) নং স্পর্শকের প্রবণতা = ∞

$\therefore$ (3, 0) বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের প্রবণতা$=0$;

$\therefore$ (3, 0) বিন্দুতে অভিলম্বটির সমীকরণ হইল $y-0=0(x-3)$

বা, $y=0$, যাহা প্রকৃতপক্ষে x-অক্ষের সমীকরণ।

15. (a) নিম্নলিখিত উক্তিগুলির মধ্যে কোন্‌টি সত্য ?

"কোন অধিবৃত্তের অক্ষের সমান্তরাল যে কোন সরলরেখা ইহাকে (i) একটিমাত্র বিন্দুতে, (ii) দুইটি বিন্দুতে (iii) দুইয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করে।"

(b) (1, 2) বিন্দুতে $y^2=4x$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(c) $2x+3y=1$ সরলরেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক। অধিবৃত্তটির নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Ans. (a) মনে কর, অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$ যাহার অক্ষ হইল x-অক্ষ।

$\therefore$ অধিবৃত্তটির অক্ষের সমান্তরাল যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ $y=\kappa$.

$y=\kappa$, $y^2=4ax$ সমীকরণে বসাইয়া পাই

$\kappa^2=4ax$ বা, $x=\dfrac{\kappa^2}{4a}$, যাহা x-এর একটি একঘাতের সমীকরণ যাহার বীজ প্রকৃতপক্ষে অধিবৃত্তটির সহিত $y=\kappa$ সরলরেখার ছেদবিন্দুর ভুজ সূচিত করে।

$\therefore$ কোন অধিবৃত্তের অক্ষের সমান্তরাল যে-কোন সরলরেখা উহাকে একটিমাত্র বিন্দুতে ছেদ করে।

(b) $\because$ $y^2=4x$ $\quad\therefore$ $\dfrac{d}{dx}(y^2)=\dfrac{d}{dx}(4x)$

বা, $2y\dfrac{dy}{dx}=4$ $\quad\therefore$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$.

(1, 2) বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx}$এর মান হইল $\dfrac{2}{2}=1$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ হইল $y-2=1(x-1)$ বা, $y-x=1$.

(c) $y^2=4ax$ $\quad\cdots\quad\cdots$(i)

$\because$ $2x+3y=1$ $\quad\cdots\quad\cdots$(ii) $\quad\therefore$ $x=\dfrac{1-3y}{2}$

xএর মান (i)নং সমীকরণে বসাইয়া পাওয়া যায় $y^2=4a\left(\dfrac{1-3y}{2}\right)$

বা, $y^2+6ay-2a=0$ $\quad\cdots\quad\cdots$(iii)

যাহা y-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যাহার বীজদ্বয় (i) নং অধিবৃত্ত ও (ii) নং সরলরেখার ছেদবিন্দুদ্বয়ের কোটি সূচিত করে।

$\therefore$ (ii)নং সরলরেখা (i)নং অধিবৃত্তের স্পর্শক হইলে (iii)নং দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

$\therefore$ $(6a)^2-4.1.(-2a)=0$ বা, $36a^2=8a$ $\quad\therefore$ $a=\frac{2}{9}$ ($\because$ $a\neq0$).

Second paper

Group—A

1. (*a*) একটি অপেক্ষক $f(x)$-এর সংজ্ঞা নিম্নে দেওয়া হইল :

$$f(x) = \begin{matrix} -x \text{ যখন } x \leqslant 0 \\ x \text{ যখন } 0 < x < 1. \end{matrix}$$

$f(x)$-এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

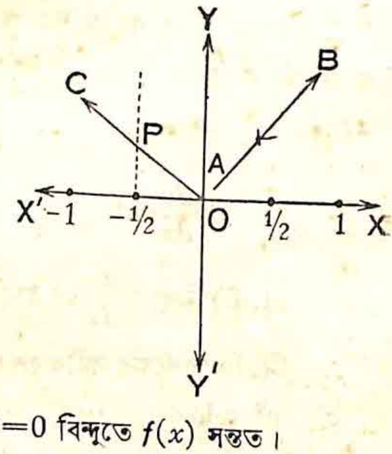
এই লেখচিত্র হইতে $x = -\frac{1}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$-এর মান নির্ণয় কর এবং $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত (continuous) কিনা বল।

(*b*) নিম্নলিখিত যে কোন একটি সীমার মান নির্ণয় কর।

(i) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ (ii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{1}{x}\{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\}$.

Ans. (*a*) $f(x) = -x$ যখন $x \leqslant 0$এর লেখ হইল $\overrightarrow{OC}$ রেখা যাহা $\angle YOX'$কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$f(x) = x$ যখন $0 < x < 1$এর লেখ হইল $\overline{AB}$।



এক্ষেত্রে প্রদত্ত অপেক্ষক $f(x)$-এর লেখ একত্রে $\overrightarrow{OC}$ রেখা ও OAB রেখা।

$x = -\frac{1}{2}$ সরলরেখা (যাহা y-অক্ষের সমান্তরাল) $\overrightarrow{OC}$কে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

P বিন্দুর কোটি $\frac{1}{2}$. $\therefore \ f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

এক্ষেত্রে স্পষ্টতঃ $\underset{x \to 0}{Lt} f(x) = 0 = f(0)$ বলিয়া $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত।

(*b*) (i) $$\underset{x \to 0}{Lt} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \underset{x \to 0}{Lt} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \underset{x \to 0}{Lt} \left\{ \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right\}^2 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left\{ \underset{\frac{x}{2} \to 0}{Lt} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right\}^2 = \frac{1}{2} \times (1)^2 = \frac{1}{2}.$$

(ii) $$\underset{x \to 0}{Lt} \frac{1}{x}\{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\}$$

$$= \underset{x \to 0}{Lt} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \underset{x\to 0}{Lt} \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \underset{x\to 0}{Lt} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \underset{x\to 0}{Lt} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\underset{x\to 0}{Lt}\sqrt{1+x}+\underset{x\to 0}{Lt}\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

2. (*a*) $y=\frac{1}{x}$ হইলে $\frac{dy}{dx}$-এর মান বাহির কর। x-এর কোন্ মানের জন্য এই $\frac{dy}{dx}$ এর মান বাহির করা সম্ভব হইবে না ?

(*b*) নিম্নলিখিত যে কোন দুইটি ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর :

(i) $y=e^x \sec x$; (ii) $y=\frac{\sin x}{\log x}$;

(iii) $y=\frac{x+2}{(x-1)(x+5)}$; (iv) $y=x^5+\frac{6}{x}-\tan x^2$.

Ans. (*a*) $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$ $\therefore$ $\frac{dy}{dx}=(-1)x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$.

$x=0$ এর জন্য $\frac{dy}{dx}$ এর মান বাহির করা সম্ভব নয়।

(*b*) (i) $y=e^x \sec x$ $\therefore$ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(e^x).\sec x+e^x.\frac{d}{dx}(\sec x)$

$=e^x \sec x+e^x \sec x \tan x=e^x \sec x(1+\tan x)$.

(ii) $y=\frac{\sin x}{\log x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(\log x)\frac{d}{dx}(\sin x)-(\sin x).\frac{d}{dx}(\log x)}{(\log x)^2}$$

$$=\frac{(\log x)\cos x-(\sin x)\times\frac{1}{x}}{(\log x)^2}=\frac{x(\log x)\cos x-\sin x}{x(\log x)^2}.$$

(iii) $\because$ $y=\frac{x+2}{(x-1)(x+5)}$ $\therefore$ $\log y=\log\frac{x+2}{(x-1)(x+5)}$

$=\log(x+2)-\log(x-1)-\log(x+5)$

xএর সাপেক্ষে উভয়পক্ষকে differentiate করে পাওয়া যায়

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+5}$$

বা, $\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+5}\right)$

$=\frac{x+2}{(x-1)(x+5)}\left\{\frac{(x-1)(x+5)-(x+2)(x+5)-(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x+5)}\right\}$

$=\frac{x+2}{(x-1)(x+5)}\left\{\frac{x^2+4x-5-x^2-7x-10-x^2-x+2}{(x+2)(x-1)(x+5)}\right\}$

$=\frac{-x^2-4x-13}{(x-1)^2(x+5)^2}.$

(iv) $y=x^5+\frac{6}{x}-\tan x^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=5x^4-\frac{6}{x^2}-(\sec^2 x^2)\frac{d}{dx}(x^2)=5x^4-\frac{6}{x^2}-2x \sec^2 x^2.$

3. (*a*) $y=x^6$ হইলে সংজ্ঞা অবলম্বন করিয়া $\frac{dy}{dx}$-এর মান বাহির কর।

(*b*) $y=4 \cos 5x$ হইলে প্রমাণ কর যে $\frac{d^2y}{dx^2}=-25y.$

(*c*) $x>\frac{1}{2}$ হইলে দেখাও যে $x(4x^2-3)$-এর মান ক্রমবর্ধমান হইবে।

Ans. (*a*) $y=x^6.$ মনে কর, $f(x)=x^6.$

$\therefore f'(x)=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\underset{x\to 0}{Lt}\frac{(x+h)^6-x^6}{h}$

$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{x^6+{}^6c_1x^5h+{}^6c_2x^4h^2+\cdots\cdots+h^6-x^6}{h}$

$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{h({}^6c_1x^5+{}^6c_2x^4h+\cdots\cdots+h^5)}{h}$

$=\underset{h\to 0}{Lt}(6x^5+{}^6c_2x^4h+\cdots\cdots+h^5) \quad [\because h\neq 0]$

$=6x^5.$

(*b*) $y=4 \cos 5x$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-4(\sin 5x)\frac{d}{dx}(5x)=-4(\sin 5x)\times 5=-20 \sin 5x.$

$\frac{d^2y}{dx^2}=-20.\frac{d}{dx}(\sin 5x)=-20(\cos 5x)\times\frac{d}{dx}(5x)$

$=-20\times 5 \cos 5x=-100 \cos 5x$

$=-25\times 4 \cos 5x=-25y.$

(c) মনে কর, $f(x)=x(4x^2-3)$ $\therefore$ $f(0)=0(4\times 0-3)=0$

$f'(x)=4x^2-3+x(8x)=4x^2-3+8x^2$

$=12x^2-3=3(4x^2-1)$

$f'(x)>0$ হইবে যদি $3(4x^2-1)>0$ হয়

অর্থাৎ যদি $4x^2-1>0$ হয়

অর্থাৎ যদি $x^2>\frac{1}{4}$ হয়

অর্থাৎ যদি $x>\frac{1}{2}$ হয়।

$\therefore$ $x>\frac{1}{2}$ হইলে $f(x)$-এর মান ক্রমবর্ধমান হইবে।

Group—B

4. নিম্নলিখিত যে কোন দুইটির মান নির্ণয় কর :

(i) $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; (ii) $\int x^2\cos x^3 dx$

(iii) $\int\frac{xdx}{\sqrt{(3x^2+1)}}$; (iv) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

Ans. (i) $I=\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{dx}{e^x+\frac{1}{e^x}}=\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$

মনে কর, $e^x=z.$ $\therefore$ $e^x=\frac{dz}{dx}$ বা, $e^x dx=dz.$

$\therefore$ $I=\int\frac{dz}{z^2+1}=\tan^{-1}z+c=\tan^{-1}(e^x)+c.$

(ii) $I=\int x^2\cos x^3\,dx.$ মনে কর, $z=x^3.$

$\therefore$ $\frac{dz}{dx}=3x^2$ বা, $\frac{dz}{3}=x^2 dx$

$\therefore$ $I=\int\frac{\cos zdz}{3}=\frac{1}{3}\int\cos zdz=\frac{1}{3}\sin z+c=\frac{\sin x^3}{3}+c.$

(iii) $I=\int\frac{xdx}{\sqrt{3x^2+1}}$ মনে কর, $z^2=3x^2+1.$

$\therefore$ $2z\frac{dz}{dx}=6x$ বা, $\frac{zdz}{3}=xdx$

$\therefore$ $I=\int\frac{zdz}{3z}=\frac{1}{3}\int dz=\frac{z}{3}+c=\frac{\sqrt{3x^2+1}}{3}+c.$

(iv) $I=\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{4dx}{4\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{4dx}{(2\sin x\cos x)^2}$

$=\int\frac{4dx}{\sin^2 2x}=4\int\operatorname{cosec}^2 2x\,dx=-\frac{4\cot 2x}{2}+c$

$=-2\cot 2x+c.$

5. নিম্নলিখিত যে কোন দুইটির মান নির্ণয় কর :

(i) $\int_0^1 x^2e^x\,dx$; (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\,dx$

(iii) $\int_1^2 \log x\,dx$; (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$.

Ans. (i) $\int x^2e^x dx=x^2\int e^x.dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2)\int e^x dx\right\}dx$

$=x^2e^x-\int\{2xe^x\}dx=x^2e^x-2\int xe^x dx$

$=x^2e^x-2\left[x\int e^x dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int e^x dx\right\}dx\right]$

$=x^2e^x-2[xe^x-\int e^x dx]=x^2e^x-2[xe^x-e^x]+c$

$=e^x(x^2-2x+2)+c.$

$\therefore\ \int_0^1 x^2e^x dx=\left[e^x(x^2-2x+2)\right]_0^1$

$=e(1-2+2)-e^0(0-0+2)=e-1\times 2=e-2.$

(ii) $\int x\cos x\,dx=x\int\cos x\,dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int\cos x\,dx\right\}dx$

$=x\sin x-\int\{1\times\sin x\}dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$

$=x\sin x+\cos x+c.$

$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\,dx=\left[x\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}-(0\times\sin 0+\cos 0)$

$=\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-(0+1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)-1.$

(iii) $\int\log x\,dx=\int(\log x).1.dx$

$=\log x\int 1.dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(\log x)\int 1.dx\right\}dx$

$$=(\log x)x-\int\left(\frac{1}{x}\times x\right)dx=x\log x-\int dx$$
$$=x\log x-x+c=x(\log x-1)+c.$$
$$\therefore\quad \int_1^2 \log x\,dx=\Big[x(\log x-1)\Big]_1^2=2(\log 2-1)-1.(\log 1-1)$$
$$=2(\log 2-1)-1(0-1)=2\log 2-2+1=2\log 2-1.$$

(iv) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$ মনে কর, $z=\sin x \quad \therefore\; dz=\cos x dx.$

যখন $x=0,\quad z=\sin 0=0$; যখন $x=\frac{\pi}{2},\quad z=\sin\frac{\pi}{2}=1$

$$\therefore\quad I=\int_0^1\frac{dz}{1+z^2}=\Big[\tan^{-1}z\Big]_0^1=\tan^{-1}(1)-\tan^{-1}(0)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}.$$

6. (*a*) যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট সমাকলের (definite integral) সংজ্ঞা দাও।

(*b*) যদি $c=\int e^x\cos x\,dx$ এবং $s=\int e^x\sin x\,dx$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে $c+s=e^x\sin x.$

(*c*) একটি সমতল ক্ষেত্র $y=x^2,\; y=0$ এবং $x=1$ এই তিনটি রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ; ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

Ans. (*a*) যে কোন পাঠ্য পুস্তক দেখ।

(*b*) $c=\int e^x\cos x\,dx.$

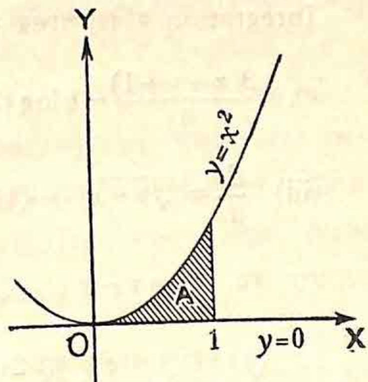
Integration by parts পদ্ধতিতে পাওয়া যায়,

$$c=e^x\int\cos x\,dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(e^x)\int\cos x\,dx\right\}dx$$
$$=e^x\sin x-\int\{e^x\sin x\}dx$$

বা, $c+\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x$

বা, $c+s=e^x\sin x.$

$(\because\; s=\int e^x\sin x\,dx).$



(*c*) A অঞ্চলের ক্ষেত্রফল

$$=\int_0^1 y\,dx=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$=\tfrac{1}{3}(1^3-0^3)=\tfrac{1}{3}$$ বর্গ একক।

7. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির যে কোন দুইটির সমাধান কর :

(i) $y(1+x)dx+x(1+y)dy=0$;

(ii) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{3x+3y+1}$; (iii) $\frac{dy}{dx}=\sqrt{y-x}$;

(iv) $\frac{dy}{dx}=-2y$ ($x=0$ হইলে $y=2$ হইবে, এই শর্তাধীনে।)

Ans. (i) $\because \ y(1+x)dx+x(1+y)dy=0$

$\therefore \ \frac{1+x}{x}dx+\frac{1+y}{y}dy=0$ বা, $\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{y}+1\right)dy=0$

$\therefore$ Integration করিয়া পাওয়া যায়, $\log x+x+\log y+y=c$

বা, $\log(xy)+x+y=c$, যাহা হইল নির্ণেয় সমাধান,

(ii) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{3x+3y+1}$ ......(1)

মনে কর, $x+y+1=v$,

$\therefore \ 1+\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$ $\therefore \ \frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}-1.$

$\therefore$ (1) হইতে পাওয়া যায়

$$\frac{dv}{dx}-1=\frac{v}{3(x+y)+1}=\frac{v}{3(v-1)+1}$$

বা, $\frac{dv}{dx}=\frac{v}{3v-2}+1=\frac{v+3v-2}{3v-2}=\frac{4v-2}{3v-2}$

বা, $\frac{3v-2}{2(2v-1)}dv=dx$ বা, $\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}-\frac{1}{2(2v-1)}\right\}dv=dx$

বা, $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\times\frac{2}{2v-1}\right)dv=dx$

Integration করিয়া পাওয়া যায় $\frac{3v}{4}-\frac{1}{8}\log(2v-1)=x+c$

বা, $\frac{3(x+y+1)}{4}-\frac{1}{8}\log(2x+2y+1)=x+c$, যাহা হইল নির্ণেয় সমাধান।

(iii) $\frac{dy}{dx}=\sqrt{y-x}$......(1)

মনে কর, $v^2=y-x$ $\therefore \ 2v\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{dy}{dx}-1$ বা, $\frac{dy}{dx}=2v.\frac{dv}{dx}+1$

$\therefore$ (1) হইতে পাওয়া যায় $2v.\frac{dv}{dx}+1=v$ বা, $2v.\frac{dv}{dx}=v-1$

বা, $\frac{2v}{v-1}.dv=dx$ বা, $2\left(1+\frac{1}{v-1}\right)dv=dx$

Integration করিয়া পাওয়া যায়, $2\{v+\log(v-1)\}=x+c$

$\therefore$ $2\{\sqrt{y-x}+\log(\sqrt{y-x}-1)\}=x+c$, যাহা হইল নির্ণেয় সমাধান।

(iv) $\frac{dy}{dx}=-2y$ $\quad\therefore \frac{dy}{y}=-2dx$

$\therefore$ Integration করিয়া পাওয়া যায় $\log y=-2x+c\cdots\cdots(1)$

এখন যখন $x=0$, তখন $y=2$.

$x=0$ এবং $y=2$, (1)নং সমীকরণে বসাইয়া পাওয়া যায় $\log 2=c$.

$\therefore$ $\log y=-2x+\log 2$, যাহা হইল নির্ণেয় সমাধান।

GROUP—C

8. নিম্নলিখিত বিবৃতিগুলির যে কোন দুইটি যুক্তি দিয়া সংশোধন কর অথবা সমর্থন কর।

(i) একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল, P, Q এবং R সাম্যাবস্থায় আছে; প্রত্যেকটি বলের পরিমাপ সমভাবে বর্ধিত করিলেও তাহারা সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

(ii) কোন একটি বস্তুর ভারকেন্দ্র, বস্তুটির অন্তর্গত কোন একটি বিন্দু হইতে বাধ্য।

(iii) মাথায় একটি ভারী বাক্স লইয়া একটি বাড়ীর ছাদ হইতে কোন চোর লাফ দিল; যতক্ষণ সে বাতাসের মধ্য দিয়া পড়িতে থাকিবে ততক্ষণ সে মাথায় বাক্সটির ভার অনুভব করিবে না।

(iv) কোন ট্রেন সমগতিতে চলিলে ইঞ্জিনের টান ও বাধা বল সাম্যাবস্থায় থাকে।

Ans. (i) প্রদত্ত বিবৃতিটি সঠিক নহে।

একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বলকে সাম্য অবস্থায় থাকিতে হইলে উহাদের লেমির সূত্র বা বলের ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত প্রতিজ্ঞা সিদ্ধ করিতে হইবে।

এক্ষেত্রে P, Q, R সাম্যাবস্থায় আছে। কিন্তু উহাদের প্রত্যেকটি বলের পরিমাপ সমভাবে বর্দ্ধিত করিলে নূতন বলগুলি লেমির সূত্র বা বলের ত্রিভুজ-সূত্রের বিপরীত প্রতিজ্ঞা সিদ্ধ করিবে না।

(ii) বিবৃতিটি ঠিক।

প্রত্যেক বস্তুর ভারকেন্দ্র নাই। কিন্তু যে বস্তুর ভারকেন্দ্র আছে তাহা বস্তুটির অন্তর্গত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে বাধ্য কারণ বস্তুর মধ্যস্থ যে নির্দিষ্ট বিন্দুর (যদি উহা থাকে) মধ্য দিয়া কোন বস্তুর ভার সর্বদাই ক্রিয়া করে তাহাকে ঐ বস্তুর ভারকেন্দ্র বলে।

(iii) বিবৃতিটি ঠিক।

আমরা জানি, যখন কোন লিফ্‌ট m ভর সম্পন্ন কোন লোককে লইয়া f ত্বরণে নীচে নামে তখন $mg-R=mf$, যেখানে R হইল ব্যক্তিটির উপর লিফ্‌টের প্রতিক্রিয়া।

$\therefore \quad R = m(g-f).$

যখন $f = g$ অর্থাৎ যখন লিফ্ট g ত্বরণ লইয়া নীচে নামে তখন $R = 0$। এই কারণে এক্ষেত্রেও চোরটি মাথায় বাক্সটির ভার অনুভব করিবে না, কারণ এক্ষেত্রেও অবাধ অবতরণ বলিয়া $f = g$.

(iv) বিবৃতিটি ঠিক নহে।

এক্ষেত্রে ইঞ্জিনের 'টান' ক্রিয়া ও 'বাধা বল' প্রতিক্রিয়া। ক্রিয়াবল ইঞ্জিনের 'টান' ট্রেনের উপর প্রযুক্ত হয় এবং প্রতিক্রিয়া বল 'বাধা বল' ইঞ্জিনের উপর প্রযুক্ত হয়। সুতরাং উহারা সমান ও বিপরীত হইলেও উহাদের ক্ষেত্রে সাম্য প্রতিষ্ঠার প্রশ্ন উঠিতে পারে না। সমান ও বিপরীতমুখী দুইটি বল একই বস্তুর উপর ক্রিয়া করিলে তবেই সাম্য প্রতিষ্ঠা হয়।

9. (*a*) দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P ও R একটি দৃঢ় বস্তুর উপরিস্থিত দুইটি বিন্দু A ও B তে ক্রিয়মান। বল দুইটির লব্ধি সম্পূর্ণভাবে নির্ণয় কর।

(*b*) একই বিন্দুতে ক্রিয়মান দুইটি বল 3P এবং 2P এর লব্ধি R ; প্রথম বলটির পরিমাপ দ্বিগুণিত হইলে লব্ধির পরিমাপও দ্বিগুণিত হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের পরিমাপ নির্ণয় কর।

Ans. (*a*) যে কোন Statics বই দেখ।

(*b*) মনে কর, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ হইল α ;

প্রথম শর্তানুযায়ী, $R^2 = 9P^2 + 4P^2 + 2.3P.2P. \cos\alpha$;

$$= 13P^2 + 12P^2 \cos\alpha \quad \cdots\cdots(1)$$

আবার দ্বিতীয় শর্তানুযায়ী,

$$(2R)^2 = (6P)^2 + (2P)^2 + 2.6P.2P.\cos\alpha$$

বা, $4R^2 = 36P^2 + 4P^2 + 24P^2 \cos\alpha$

বা, $4R^2 = 40P^2 + 24P^2 \cos\alpha$

বা, $4(13P^2 + 12P^2 \cos\alpha) = 40P^2 + 24P^2 \cos\alpha$

বা, $4P^2(13 + 12\cos\alpha) = 4P^2(10 + 6\cos\alpha)$

বা, $13 + 12\cos\alpha = 10 + 6\cos\alpha \quad (\because P \neq 0)$

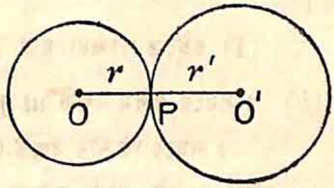
বা, $12\cos\alpha - 6\cos\alpha = 10 - 13$ বা, $6\cos\alpha = -3$

বা, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ বা, $\cos\alpha = \cos 120°$ $\quad \therefore \alpha = 120°$.

10. (*a*) একটি দৃঢ় বস্তুর উপর ক্রিয়ারত তিনটি বল P, Q ও R সাম্যাবস্থায় আছে। জানা আছে যে Q এবং R, C বিন্দুতে মিলিত হয় ; এক্ষণে প্রমাণ কর যে P বলের ক্রিয়ারেখা C বিন্দুগামী।

(*b*) একটি সরু সমতারকে দুইটি সমতলীয় বৃত্তাকার বলয়ের আকারে বাঁকান হইল। বৃত্তাকার বলয় দুইটির বাসার্ধ যথাক্রমে r এবং r', এবং তাহারা একে অপরকে বহিঃস্থ বিন্দুতে স্পর্শ করে। যদি $r' > r$ হয়, তাহা হইলে ঐ বৃত্তাকার বলয় দুইটির স্পর্শ বিন্দু হইতে বলয়দ্বয়ের দ্বারা গঠিত বস্তুটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

Ans. (*a*) প্রদত্ত তিনটি বল P, Q ও R সাম্যাবস্থায় আছে। অতএব বলগুলি যে সমতলে অবস্থিত সেই সমতলের যে-কোন বিন্দুর সাপেক্ষে বলগুলির ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল (algebraic sum) শূন্য হইবে। জানা আছে যে Q এবং R বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখাদ্বয় C বিন্দুতে মিলিত হয়। অতএব Q ও R উভয়েরই ভ্রামক C বিন্দুর সাপেক্ষে শূন্য। প্রদত্ত বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে বলিয়া C বিন্দুর সাপেক্ষে উহাদের ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য হইবে। অতএব এক্ষেত্রে C বিন্দুর সাপেক্ষে বল P-এর ভ্রামক শূন্য হইবে। ইহা হইতে গেলে P বলের ক্রিয়ারেখাকে C বিন্দুগামী হইতে হইবে।



(*b*) বৃত্তাকার বলয়ের ভারকেন্দ্র কেন্দ্রে অবস্থিত।

মনে কর, প্রতি একক দৈর্ঘ্য তারের ভর W.

মনে কর, বলয় দুইটি P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

মনে কর, P বিন্দু হইতে নূতন বস্তুটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব d.

স্পষ্টত : $d = \frac{(2\pi r' W)\, r' + (2\pi r W)(-r)}{2\pi r' W + 2\pi r W} = \frac{2\pi W\{(r')^2 - n^2\}}{2\pi W(r'+r)}$

$= \frac{(r'+r)(r'-r)}{r'+r}$ $(\because W \neq 0)$

$= r' - r.$ $(\because r'+r \neq 0)$

11. (*a*) নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র লিখ ও $P = mf$ সূত্রটি প্রমাণ কর।

(*b*) দুইটি বস্তুকণা একই বিন্দু হইতে একসঙ্গে একটি প্রদত্ত সরলরেখা অবলম্বন করিয়া যাত্রা করিল। প্রথমটি u সমবেগে ও দ্বিতীয়টি স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণ f সহ চলিতে লাগিল। প্রমাণ কর যে দ্বিতীয় কণাটি প্রথমটিকে ধরিয়া ফেলিবার পূর্বে উভয়ের মধ্যে সর্বাধিক দূরত্ব হইবে $\frac{u^2}{2f}$, এবং তখন যাত্রারম্ভ হইতে $\frac{u}{f}$ সময় অতিক্রান্ত হইয়াছে।

Ans. (*a*) সূত্র : কোন বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার বস্তুটির উপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক এবং বল যেদিকে প্রযুক্ত হয় ভরবেগের পরিবর্তনও সেই দিকে ঘটে।

মনে কর, m ভর সম্পন্ন কোন বস্তুর উপর P বল ক্রিয়া করার ফলে t সময় পরে উহার গতিবেগ হইল v.

$$\therefore \quad P \propto \frac{d}{dt}(mv)$$

বা, $P = K\frac{d}{dt}(mv)$, যেখানে $K(\neq 0)$ হইল ভেদ-ধ্রুবক।

বা, $P = Km\frac{dv}{dt}$ (m ধ্রুবক হইলে)

বা, $P = Kmf \cdots\cdots(1) \quad \left(\because \; \frac{dv}{dt} = f\right)$

এখন যদি ধরিয়া লওয়া হয় যে, একক ভরের উপর ক্রিয়া করিয়া একক ত্বরণ সৃষ্টি করিতে পারে যে বল তাহাই বলের একক, তাহা হইলে যখন $m=1$, $f=1$ তখন $P=1$.

$\therefore$ (1) হইতে পাওয়া যায় $1 = K.1.1$ অর্থাৎ $K=1$. $\therefore$ $P = mf$.

(b) t সময়ে প্রথম বস্তুটি ut দূরত্ব অতিক্রম করে।

t সময়ে দ্বিতীয় বস্তুটি $0+\frac{1}{2}ft^2 = \frac{1}{2}ft^2$ দূরত্ব অতিক্রম করে।

বস্তু দুইটি একই বিন্দু হইতে একই সময়ে একই দিকে প্রদত্ত সরলরেখা অবলম্বন করিয়া যাত্রা করে।

$\therefore$ স্পষ্টতঃ t সময় পরে উভয় বস্তুর মধ্যে দূরত্ব$= ut - \frac{1}{2}ft^2 = d$ (মনে কর)।

এখন $d = ut - \frac{1}{2}ft^2 = \frac{1}{2}(2ut - ft^2)$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{u^2}{f} - \left(ft^2 - 2\sqrt{f}t.\frac{u}{\sqrt{f}} + \frac{u^2}{f}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{u^2}{f} - \left(\sqrt{f}t - \frac{u}{\sqrt{f}}\right)^2\right\}$$

$\therefore$ $\left(\sqrt{f}t - \frac{u}{\sqrt{f}}\right)^2$ সর্বদাই $\geqslant 0$, স্পষ্টতঃ d সর্বদাই $\leqslant \frac{u^2}{2f}$.

$\therefore$ দ্বিতীয় কণাটি প্রথম কণাটিকে ধরিয়া ফেলিবার পূর্বে উহাদের মধ্যে সর্বাধিক দূরত্ব হইবে $\frac{u^2}{2f}$ এবং ইহা হইবে যখন $\left(\sqrt{f}t - \frac{u}{\sqrt{f}}\right)^2 = 0$,

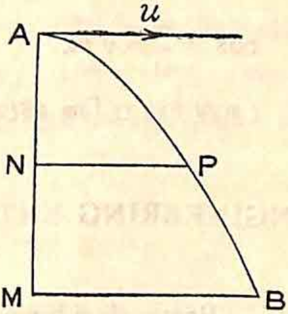
অর্থাৎ যখন $\sqrt{f}t = \frac{u}{\sqrt{f}}$, অর্থাৎ যখন $t = \frac{u}{f}$.

12. (a) একটি কেল্লার শীর্ষ হইতে একটি কণাকে অনুভূমিক দিকে নিক্ষেপ করা হইল। প্রমাণ কর যে প্রক্ষেপ পথটি অধিবৃত্তাকার।

(b) একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে a দূরত্বে অবস্থিত একটি বস্তুকণা স্থির অবস্থা হইতে শুরু করিয়া একটি বলের প্রভাবে চলিতে আরম্ভ করিল। ঐ বলটি সর্বদাই O

অভিমুখী এবং O হইতে দূরত্বের সহিত সমানুপাতী। চলিতে আরম্ভ করিবার t সময় পরে বস্তুকণাটির O বিন্দু হইতে দূরত্ব নির্ণয় কর।

Ans. (a) মনে কর, কেল্লার শীর্ষ A বিন্দু হইতে অনুভূমিক দিকে u বেগে প্রক্ষিপ্ত হইয়া একটি কণা t সময় পরে P অবস্থানে আসিয়াছে। A বিন্দুগামী উলম্বরেখার উপর PN লম্ব টানা হইয়াছে। P অবস্থানে কণার অনুভূমিক দিকে সরণ PN $= x$ (ধর); উলম্বদিকে সরণ AN $= y$ (ধর)।



যেহেতু অনুভূমিক দিকে কোন ত্বরণ নাই,

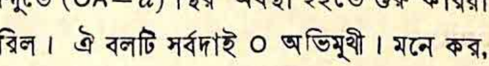
$\therefore \quad x = \text{PN} = ut.$

যেহেতু উলম্বদিকে কোন প্রারম্ভিক বেগ ছিল না এবং ইহা g সমত্বরণ লইয়া চলিতেছে $\quad \therefore \quad y = \frac{1}{2}gt^2.$

এখন, $\dfrac{x^2}{y} = \dfrac{u^2t^2}{\frac{1}{2}gt^2} = \dfrac{2u^2}{g} \qquad \therefore \quad \dfrac{\text{PN}^2}{\text{AN}} = \dfrac{2u^2}{g}$, যাহা ধ্রুবক।

$\therefore$ P বিন্দু একটি অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত অর্থাৎ প্রক্ষেপ পথটি অধিবৃত্তাকার।

(b) মনে কর, বস্তু কণাটি A বিন্দুতে (OA $= a$) স্থির অবস্থা হইতে শুরু করিয়া একটি বলের প্রভাবে চলিতে আরম্ভ করিল। ঐ বলটি সর্বদাই O অভিমুখী। মনে কর, বস্তুটি চলিতে শুরু করার t সময় পরে P বিন্দুতে আসিল। মনে কর, OP $= x$



এক্ষেত্রে O বিন্দুর অভিমুখে ত্বরণ μx, যেখানে μ একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এক্ষেত্রে বলা যায় OX অভিমুখে ত্বরণ $-\mu x$.

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x \; (\mu > 0) \cdots (1) \quad \therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} . 2\frac{dx}{dt} = -\mu x . 2\frac{dx}{dt}$$

t-এর সাপেক্ষে integrate করে পাওয়া যায়, $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 = -\mu x^2 + c \cdots (2)$

এখন যখন $x = a, \; \dfrac{dx}{dt} = 0.$

$\therefore$ (2) হইতে পাওয়া যায়, $\quad 0 = -\mu a^2 + c \qquad \therefore \quad c = \mu a^2.$

$$\therefore \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \mu(a^2 - x^2) \qquad \therefore \quad \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\mu(a^2 - x^2)} \cdots\cdots (3)$$

এক্ষেত্রে $\dfrac{dx}{dt}$ এর মান ঋণাত্মক লওয়া হইয়াছে, কারণ বস্তুকণাটি O বিন্দুর দিকে আসে কিন্তু $\dfrac{dx}{dt}$ হইল OX অভিমুখে গতিবেগ।

(3) হইতে পাওয়া যায়, $-\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{\mu}dt$

Integration করিয়া পাওয়া যায়, $\cos^{-1}\dfrac{x}{a}=\sqrt{\mu}t+D.\cdots(4)$

এখন যখন $t=0,\ x=a.$

$\therefore$ (4) হইতে পাওয়া যায়, $0=\sqrt{\mu}.0+D \quad \therefore\ D=0.$

$\therefore\ \cos^{-1}\dfrac{x}{a}=\sqrt{\mu}t. \qquad \therefore\ x=a\cos(\sqrt{\mu}t)$

$\therefore$ t সময় পরে O বিন্দু হইতে বস্তু কণাটির দূরত্ব হইল $a\cos(\sqrt{\mu}t)$.

ENGINEERING ENTRANCE EXAMINATION—1978

Group A

1. (*a*) Prove that for any real values of x, y
$x^2+2xy+3y^2-6x-2y\geqslant -11.$

(*b*) Show that as x varies through all real values, the expression $\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+5x+2}$ takes any real value twice except the value unity.

Ans. (*a*) $x^2+2xy+3y^2-6x-2y+11$
$=x^2+y^2+9+2xy-6x-6y+2y^2+4y+2$
$=(x+y-3)^2+2(y^2+2y+1)=(x+y-3)^2+2(y+1)^2$

x ও y-এর বাস্তব মানের জন্য $(x+y-3)^2\geqslant 0$ এবং $(y+1)^2\geqslant 0.$

$\therefore$ x ও y-এর বাস্তব মানের জন্য $x^2+2xy-3y^2-6x-2y+11\geqslant 0$

$\therefore\ x^2+2xy-3y^2-6x-2y\geqslant -11.$

(*b*) মনে কর, $y=\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+5x+2}$

বা, $x^2y+5xy+2y=x^2+3x+1$

বা, $x^2(y-1)+x(5y-3)+(2y-1)=0,\ldots\ldots(1)$

যাহা হইল x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

$\because$ x বাস্তব, $\therefore\ (5y-3)^2-4(y-1)(2y-1)\geqslant 0$

বা, $25y^2-30y+9-8y^2+12y-4\geqslant 0$

বা, $17y^2-18y+5\geqslant 0$ বা, $y^2-\frac{18}{17}y+\frac{5}{17}\geqslant 0$

বা, $y^2-2\times\frac{9}{17}y+(\frac{9}{17})^2+\frac{5}{17}-(\frac{9}{17})^2\geqslant 0$

বা, $(y-\frac{9}{17})^2+\frac{85-81}{17^2}\geqslant 0$

বা, $(y-\frac{9}{17})^2+\frac{4}{289}\geqslant 0$ যাহা সর্বদা বৈধ হইবে যদি y বাস্তব হয়।

$\therefore$ x বাস্তব হইলে yকে অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিকে বাস্তব হইতে হইবে।

$y=1$ হইলে (1)নং সমীকরণের x^2-এর সহগ শূন্য হয়।

অতএব $y=1$ হইতে পারে না।

(1) নং দ্বিঘাত সমীকরণ হইতে বলা যায় y-এর একটি নির্দিষ্ট বাস্তব মানের জন্য (ধর, $y=\alpha$) x-এর দুইটি বাস্তব মান (ধর $x=\beta, \gamma$) পাওয়া যায়। অতএব বলা যাইতে পারে, y (অর্থাৎ প্রদত্ত রাশির)-এর মান x-এর দুইটি বাস্তব মানের জন্য ($x=\beta$ ও γ) একই (γ) হয়।

অতএব x-এর মান বাস্তব হইলে y অর্থাৎ প্রদত্তরাশির 1 ব্যতীত একই বাস্তব মান দুইবার করিয়া হয়।

2. (*a*) Prove by mathematical induction that for all positive integral values of n,

$$1.\,3+2.\,3^2+3.\,3^3+\cdots+n.\,3^n=\frac{(2n-1)\,3^{n+1}+3}{4}$$

(*b*) From seven capitals, three vowels and five consonants, how many words of four letters each can be formed if each word beigns with a capital and contains at least one vowel, all the letters of each word being different ?

Ans. (*a*) মনে কর, বামপক্ষের শ্রেণীটির যোগফলকে S_n দ্বারা সূচীত করা হয়।

অতএব, প্রমাণ করিতে হইবে, $S_n=\frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$

যখন $n=1$, L.H.S. $=S_1=1.3=3$.

R.H.S. $=\frac{(2\times 1-1)3^{1+1}+3}{4}=\frac{9+3}{4}=3$. $\therefore$ L.H.S. = R.H.S.

$n=1$-এর জন্য সমীকরণটি ঠিক।

যখন $n=2$, L.H.S. $=S=1.3+2.3^2=21$.

R.H.S. $=\frac{(2\times 2-1)3^{2+1}+3}{4}=\frac{3\times 3^3+3}{4}=21$.

$\therefore$ $n=2$-এর জন্যও সমীকরণটি ঠিক।

এখন মনে করা যাক, $n=m$-এর জন্য সমীকরণটি ঠিক।

$\therefore$ $S_m=1.3+2.3^2+3.3^3+\cdots\cdots+m.3^m=\frac{(2m-1)3^{m+1}+3}{4}$

আমরা প্রমাণ করিব, সমীকরণটি $n=m+1$-এর জন্যও সত্য।

এখন $S_{m+1}=\{1.3+2.3^2+3.3^3+\cdots+m.3^m\}+(m+1).3^{m+1}$

$$=S_m+(m+1).3^{m+1}=\frac{(2m-1).3^{m+1}+3}{4}+(m+1).3^{m+1}$$

$$=\frac{(2m-1).3^{m+1}+3+4(m+1).3^{m+1}}{4}$$

$$=\frac{(2m-1+4m+4).3^{m+1}+3}{4}$$

$$=\frac{(6m+3).3^{m+1}+3}{4}=\frac{(2m+1)3.3^{m+1}+3}{4}$$

$$=\frac{\{2\ m+1)-1\}.3^{m+2}+3}{4}=\text{R.H.S.}$$

অতএব দেখা গেল যে, $n=m$ হইলে যদি সমীকরণটি ঠিক হয়, তবে $n=m+1$ হইলেও সমীকরণটি ঠিক হয়।

পূর্বে দেখানো হইয়াছে যে, $n=2$-এর জন্য সমীকরণটি ঠিক। সুতরাং $n=2+1=3$-এর জন্যও সমীকরণটি ঠিক। আবার যেহেতু $n=3$ হইলে সমীকরণটি ঠিক হয়, অতএব $n=3+1=4$ হইলেও উহা ঠিক হইবে। এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, n-এর যে কোন ধনাত্মক অখণ্ড মানের জন্য সমীকরণটি ঠিক।

(b) সাতটি Capital-এর যে কোন একটিকে প্রথমে নির্দিষ্ট করিয়া নেওয়া হল। মনে কর, ঐ নির্দিষ্ট Capital চার অক্ষরের প্রত্যেক শব্দের প্রথমে বসে। এখন বাকী তিনটি অক্ষর নিম্নলিখিত উপায়ে নির্বাচন করা যাইতে পারে।

(i) 3টি স্বরবর্ণের 1টি ও 5টি ব্যঞ্জনবর্ণের 2টি,
(ii) 3টি " 2টি ও 5টি " 1টি,
(iii) 3টিই স্বরবর্ণ।

(i)নং প্রকারে নির্বাচন সংখ্যা $= {}^3C_1\times{}^5C_2$
(ii)নং " " " $={}^3C_2\times{}^5C_1$
(iii)নং " " " $={}^3C_3\times{}^5C_0$

একটি নির্দিষ্ট Capital-কে প্রথমে বসাইয়া মোট বিন্যাস নির্ণয়ের জন্য উপরের 3টি শ্রেণীর অন্তর্গত প্রত্যেকটি নির্বাচনের 3টি অক্ষরকে যত প্রকারে সম্ভব বিন্যস্ত করিতে হইবে।

স্পষ্টতঃ একটি নির্দিষ্ট Capitalকে প্রথমে বসাইয়া মোট বিন্যাস সংখ্যা

$$=({}^3C_1\times{}^5C_2)\times\underline{|3}+({}^3C_2\times{}^5C_1)\times\underline{|3}+({}^3C_3\times{}^5C_0)\times\underline{|3}$$

$$=\left\{\left(3\times\frac{5\times4}{2}\right)+\left(\frac{3\times2}{1\times2}\times\frac{5}{1}\right)+\left(1\times1\right)\right\}\underline{|3}$$

$$=(30+15+1)\times6=46\times6=276$$

যেহেতু 7টি Capital আছে, নির্ণেয় মোট বিন্যাস সংখ্যা $=7\times 276=1932$.

$\therefore$ নির্ণেয় অক্ষরের সংখ্যা $=1932$.

3. (*a*) If $13\theta=\pi$, prove that

$$\cos\theta.\cos 2\theta.\cos 3\theta.\cos 4\theta.\cos 5\theta.\cos 6\theta=\frac{1}{2^6}$$

(*b*) Show that

$$\cos^{-1}\left(\frac{\cos x+\cos y}{1+\cos x.\cos y}\right)=2\tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}.\tan\frac{y}{2}\right)$$

Ans. (*a*) L.H.S. $=\cos\theta.\cos 2\theta.\cos 3\theta.\cos 4\theta.\cos 5\theta.\cos 6\theta$

$$=\cos\theta.\cos 2\theta.\cos 3\theta.\cos 4\theta.\cos(13\theta-8\theta).\cos 6\theta$$

$$=\cos\theta.\cos 2\theta.\cos 3\theta.\cos 4\theta.\cos(\pi-8\theta).\cos 6\theta$$

$$=-\frac{(2\cos\theta.\sin\theta).\cos 2\theta.\cos 4\theta.\cos 8\theta.\cos 3\theta.\cos 6\theta}{2\sin\theta}$$

$$=-\frac{(2\sin 2\theta.\cos 2\theta).\cos 4\theta.\cos 8\theta.\cos 3\theta.\cos 6\theta}{2^2\sin\theta}$$

$$=-\frac{(2\sin 4\theta.\cos 4\theta).\cos 8\theta.\cos 3\theta.\cos 6\theta}{2^3\sin\theta}$$

$$=-\frac{(2\sin 8\theta.\cos 8\theta).\cos 3\theta.\cos 6\theta}{2^4\sin\theta}$$

$$=-\frac{\sin 16\theta.\cos 3\theta.\cos 6\theta}{2^4\sin\theta}$$

$$=\frac{-\sin(13\theta+3\theta).\cos 3\theta.\cos 6\theta}{2^4\sin\theta}$$

$$=\frac{-\sin(\pi+3\theta).\cos 3\theta.\cos 6\theta}{2^4\sin\theta}$$

$$=\frac{(2\sin 3\theta.\cos 3\theta)\cos 6\theta}{2^5\sin\theta}=\frac{2\sin 6\theta.\cos 6\theta}{2^6\sin\theta}=\frac{\sin 12\theta}{2^6\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin(13\theta-\theta)}{2^6\sin\theta}=\frac{\sin(\pi-\theta)}{2^6\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{2^6\sin\theta}=\frac{1}{2^6}$$

(*b*) R.H.S. $=2\tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}.\tan\frac{y}{2}\right)$

$$=\cos^{-1}\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}.\tan^2\frac{y}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}.\tan^2\frac{y}{2}}$$

$$=\cos^{-1}\frac{1-\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos y}{1+\cos y}}{1+\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos y}{1+\cos y}}$$

$$=\cos^{-1}\frac{(1+\cos x)(1+\cos y)-(1-\cos x)(1-\cos y)}{(1+\cos x)(1+\cos y)+(1-\cos x)(1-\cos y)}$$

$$=\cos^{-1}\frac{2(\cos x+\cos y)}{2(1+\cos x.\cos y)}=\cos^{-1}\frac{\cos x+\cos y}{1+\cos x.\cos y}=\text{L.H.S.}$$

4. (*a*) If n be a positive integer, show that the coefficient of x^r in the expansion of $\frac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}}$ is $\frac{1}{\lfloor r}(1^r+2^r+\cdots\cdots+n^r)$. Hence find the sum of the series $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$.

(*b*) Eliminate θ from the equations

$$x\sin\theta-y\cos\theta=\sqrt{x^2+y^2},\quad \frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Ans. (*a*) $\frac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}}=\frac{e^{nx}-1}{e^{-x}(e^x-1)}=e^x\left(\frac{e^{nx}-1}{e^x-1}\right)$

$$=e^x\left\{\frac{(e^x)^n-1}{e^x-1}\right\}=e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots\cdots+e^{nx}$$

$$=\left(1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots\right)+\left(1+2x+\frac{2^2x^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots\right)$$

$$+\left(1+3x+\frac{3^2x^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots\right)+\cdots\cdots+\left(1+nx+\frac{n^2x^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots\right).$$

স্পষ্টতঃ ডানপক্ষে x^r-এর সহগ হইল

$$\frac{1^r}{\lfloor r}+\frac{2^r}{\lfloor r}+\frac{3^r}{\lfloor r}+\cdots\cdots+\frac{n^r}{\lfloor r}=\frac{1}{\lfloor r}(1^r+2^r+\cdots\cdots+n^r).$$

$\therefore$ $\frac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}}$-এর বিস্তৃতিতে x^r-এর সহগ হইল $\frac{1}{\lfloor r}(1^r+2^r+\cdots\cdots+n^r)$.

দ্বিতীয় অংশ : প্রথম অংশ হইতে বলা যায় $\frac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}}$-এর বিস্তৃতিতে x^2এর সহগ হইল $\frac{1}{\lfloor 2}(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)$.

এখন $\frac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}}=(e^{nx}-1)(1-e^{-x})^{-1}$

$$=\left(nx+\frac{n^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{n^3x^3}{\lfloor 3}\cdots\cdots\right)\left(x-\frac{x^2}{2!}+\frac{n^3}{3!}-\cdots\cdots\right)^{-1}$$

$$=x\left(n+\frac{n^2x}{\lfloor 2}+\frac{n^3x^2}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right)\times\frac{1}{x}\times\left(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}-\cdots\cdots\right)^{-1}$$

$$=\left(n+\frac{n^2x}{\lfloor 2}+\frac{n^3x^2}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right)\left\{1-\left(\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{3!}+\cdots\cdots\right)\right\}^{-1}$$

$$=\left(n+\frac{n^2x}{\lfloor 2}+\frac{n^3x^2}{\lfloor 3}+\cdots\right)\left\{1+\left(\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{3!}+\cdots\right)+\left(\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{3!}+\cdots\right)^2+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\left(n+\frac{n^2x}{2!}+\frac{n^3x^2}{\lfloor 3}\cdots\cdots\right)\left[1+\left(\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{3!}+\cdots\right)+\left\{\frac{x^2}{(2!)^2}+\left(\frac{x^2}{3!}\right)^2+\cdots\cdots\right\}+\cdots\cdots\right]$$

$$=\left(n+\frac{n^3x}{2!}+\frac{n^2x^2}{3!}+\cdots\cdots\right)\left[1+\frac{x}{2!}+\left\{-\frac{1}{3!}+\left(\frac{1}{2!}\right)^2\right\}x^2+\cdots\cdots\right]$$

স্পষ্টতঃ x^2-এর সহগ হইল $n.\left\{-\frac{1}{3!}+\left(\frac{1}{2!}\right)^2\right\}+\frac{n^2}{2!}\times\frac{1}{2!}+\frac{n^3}{3!}$

$$=n\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{6}\right)+\frac{n^2}{4}+\frac{n^3}{6}=\frac{n}{12}+\frac{n^2}{4}+\frac{n^3}{6}$$

$$=\frac{n+3n^2+2n^3}{12}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\lfloor 2}\left(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$$

$$\therefore\quad 1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(b) $x\sin\theta-y\cos\theta=\sqrt{x^2+y^2}\cdots\cdots(1)$

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{1}{x^2+y^2}\cdots\cdots(2)$$

মনে কর, $x=R\cos\alpha$, $y=R\sin\alpha$.

$\therefore\quad x^2+y^2=R^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$ বা, $R=\sqrt{x^2+y^2}$.

আবার $\dfrac{y}{x}=\dfrac{R\sin\alpha}{R\cos\alpha}=\tan\alpha$.

(1) হইতে পাওয়া যায়

$$R\cos\alpha\sin\theta-R\sin\alpha\cos\theta=\sqrt{x^2+y^2}$$

বা, $R(\cos\alpha\sin\theta-\sin\alpha\cos\theta)=R$ বা, $\sin(\theta-\alpha)=1$.

$\therefore\quad \theta-\alpha=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{2}+\alpha$.

∴ (2) হইতে পাওয়া যায়

$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{a^2}+\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{b^2}=\frac{1}{x^2+y^2}$$

বা, $\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}=\frac{1}{x^2+y^2}$

বা, $\frac{y^2}{R^2a^2}+\frac{x^2}{R^2b^2}=\frac{1}{x^2+y^2}$ $\left(\because \sin\alpha=\frac{y}{R},\ \cos\alpha=\frac{x}{R}\right)$

বা, $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=\frac{R^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}$

বা, $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, যাহা হইল নির্ণেয় অপনীতক।

5. (*a*) In any triangle prove that, $r_1+r_2+r_3-r=4R$ where the terms have their usual significances.

(*b*) In a plane triangle, $b=540$ cm. $c=420$ cm., $A=52°6'$; find B and C having given

L tan 26°3′=9·6891430
L tan 14°20′=9·4074189
L tan 14°21′=9·4079453
$\log_{10}2=0·3010300$.

Ans. (*a*) L.H.S. $=r_1+r_2+r_3-r$

$$=\frac{\Delta}{s-a}+\frac{\Delta}{s-b}+\frac{\Delta}{s-c}-\frac{\Delta}{s}=\Delta\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}\right)$$

$$=\Delta\left\{\frac{s-b+s-a}{(s-a)(s-b)}+\frac{s-(s-c)}{s(s-c)}\right\}$$

$$=\Delta\left\{\frac{2s-(a+b)}{(s-a)(s-b)}+\frac{c}{s(s-c)}\right\}$$

$$=\Delta\left\{\frac{c}{(s-a)(s-b)}+\frac{c}{s(s-c)}\right\} \qquad [\because\ 2s=a+b+c]$$

$$=\Delta c\left\{\frac{s(s-c)+(s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\right\}$$

$$=\Delta c\left\{\frac{s^2-sc+s^2-s(a+b)+ab}{\Delta^2}\right\}$$

$$=\frac{c}{\Delta}\left\{2s^2-s(a+b+c)+ab\right\} \quad (\because\ \Delta\neq0)$$

$$=\frac{c}{\Delta}\left\{2s^2-s\times2s+ab\right\}=\frac{abc}{\Delta}=\frac{4R\Delta}{\Delta}=4R. \quad (\because\ \Delta\neq0)$$

(b) $\frac{A}{2}=\frac{52°6'}{2}=26°3'$

$\therefore \quad \frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}=90°-26°3'=63°57' \quad \therefore \quad B+C=127°54'$

এখন, $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\frac{540-420}{540+420}\cot 26°3'$

$=\frac{120}{960}\cot 26°3'=\frac{1}{8}\cot 26°3'$

$\therefore \quad \log\tan\frac{B-C}{2}=\log 1-\log 8+\log\cot 26°3'$

বা, $\log\tan\frac{B-C}{2}=0-3\log 2+\log 1-\log\tan 26°3'$

বা, $10+\log\tan\frac{B-C}{2}=-3\times{\cdot}3010300+0+10-\log\tan 26°3'$

বা, $L\tan\frac{B-C}{2}=-{\cdot}9030900+10+10-L\tan 26°3'$

বা, $L\tan\frac{B-C}{2}=-{\cdot}9030900+20-9{\cdot}6891430$

$=20-10{\cdot}5922330=9{\cdot}4077670$

$L\tan 14°21'=9{\cdot}4079453$	$9{\cdot}4077670$
$L\tan 14°20'=9{\cdot}4074189$	$-9{\cdot}4074189$
1'-এর জন্য অন্তর= $0{\cdot}0005264$	$0{\cdot}0003481$

$0{\cdot}0003481$ অন্তর হয় $\left(\frac{0{\cdot}0003481}{0{\cdot}0005264}\right)'=\left(\frac{3481\times 60}{5264}\right)''=39''{\cdot}67$

$\therefore$ স্পষ্টত: $\frac{B-C}{2}=14°20'+39''{\cdot}67=14°20'39''{\cdot}67$

বা, $B-C=28°41'19''{\cdot}34$

আবার $B+C=127°54'$

(যোগ করিয়া) $2B=156°35'19''{\cdot}34$

$\therefore \quad B=78°17'39''{\cdot}67 \quad \therefore \quad C=127°54'-78°17'39''{\cdot}67=49°36'20''{\cdot}33.$

Group—B

6. (a) Make in one diagram rough sketches of the curves $y=12e^{-x}$ and $y=\frac{25}{2}(e^{x}-e^{-x})$.

Determine the abcissa of their point of intersection. Show that the area between the closed region bounded by the curves and the y-axis is 2 square units.

(b) Evaluate— $\int x\cos^2(2x)dx$.

Ans. (a) $\because\ y=12e^{-x}$ এবং $y=\dfrac{25}{2}(e^{x}-e^{-x})$

$\therefore\quad 12e^{-x}=\dfrac{25}{2}(e^{x}-e^{-x})$ বা, $\dfrac{24}{e^{x}}=\dfrac{25(e^{2x}-1)}{e^{x}}$

বা, $24+25$

$=25e^{2x}$

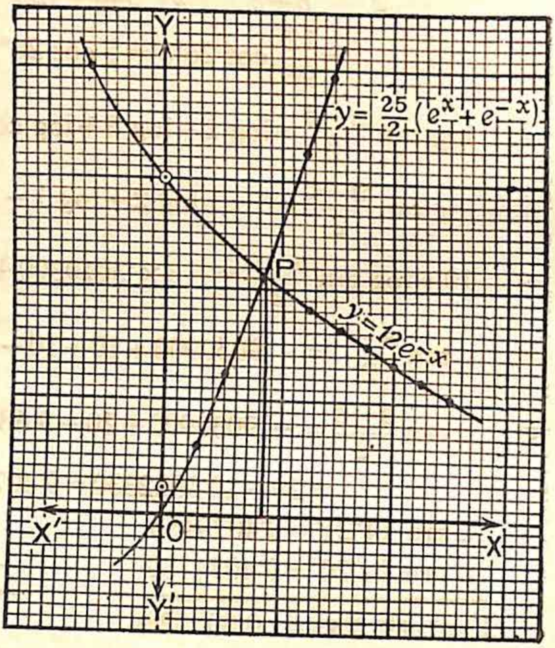
বা, $\frac{49}{25}=e^{2x}$

বা, $e^{x}=\frac{7}{5}$

[স্পষ্টতঃ e^{x} সর্বদা ধনাত্মক]

$\therefore\quad x=\log_{e}\frac{7}{5}$

$\therefore$ চিত্রে ছেদবিন্দু P বিন্দুর ভুজ হইল $\log_{e}\frac{7}{5}$.



মনে কর, $y=12e^{-x}$ এবং $y=\frac{25}{2}(e^{x}-e^{-x})$ রেখা দুইটি Y-অক্ষকে যথাক্রমে Q এবং O বিন্দুতে ছেদ করে।

স্পষ্টতঃই, O$\equiv(0, 0)$ এবং Q$\equiv(0, 12)$

$\therefore$ OPQ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$=\int_{0}^{\log_{e}\frac{7}{5}}\left\{12e^{-x}-\frac{25}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{0}^{\log_{e}\frac{7}{5}}\left\{\frac{49}{2}e^{-x}-\frac{25}{2}e^{x}\right\}dx=\left[-\frac{49}{2}e^{-x}-\frac{25}{2}e^{x}\right]_{0}^{\log_{e}\frac{7}{5}}$$

$$=-\tfrac{49}{2}\times(\tfrac{7}{5})^{-1}-\tfrac{25}{2}\times\tfrac{7}{5}-\{-\tfrac{49}{2}-\tfrac{25}{2}\}$$

$$=-\tfrac{49}{2}\times\tfrac{5}{7}-\tfrac{35}{2}+\tfrac{49}{2}+\tfrac{25}{2}=-\tfrac{35}{2}-\tfrac{35}{2}+\tfrac{49}{2}+\tfrac{25}{2}$$

$=-35+37=2$ বর্গ একক।

(b) $\int x\cos^{2}(2x)dx=\frac{1}{2}\int x(1+\cos 4x)dx$

$=\frac{1}{2}[\int x dx+\int x\cos 4x\, dx]$

$=\dfrac{1}{2}\Big[\dfrac{x^{2}}{2}+x\int\cos 4x-\int(1.\int\cos 4x\, dx)dx\Big]$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x\sin 4x}{4}-\int\frac{\sin 4x}{4}dx\right]$$

$$=\frac{x^2}{4}+\frac{x\sin 4x}{8}+\frac{\cos 4x}{32}+c.$$

7. (*a*) Evaluate the following :—

(*i*) $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (*ii*) $\int\frac{dx}{(x-3)\sqrt{2x^2-12x+17}}$.

(*b*) Evaluate— $\int_1^e \frac{(x+1)^3}{x^2}\log x\,dx$

Ans. (*a*) (*i*) মনে কর $I=\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

ধর, $z=\tan^{-1}x$. যখন, $x=0$, $z=0$ এবং যখন, $x=1$, $z=\frac{\pi}{4}$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+x^2} \qquad \therefore\ dz=\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\therefore\ I=\int_0^1\frac{\tan^{-1}x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(1+x^2)}dx=\int^{\frac{\pi}{4}}\frac{zdz}{(1+\tan^2 z)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{zdz}{\sec z}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}z\cos z\,dz=\Big[z\sin z\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1.\textstyle\int\cos z\,dz)dz$$

$$=\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin z\,dz=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+\Big[\cos z\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-1=\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\frac{1}{\sqrt{2}}-1.$$

(*ii*) ধর, $I=\int\frac{dx}{(x-3)\sqrt{2x^2-12x+17}}$

মনে কর, $x-3=\frac{1}{z}$. $\quad\therefore\ 1=-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dx} \quad \therefore\ dx=-\frac{dz}{z^2}$.

$$\therefore\ I=\int\frac{-zdz}{z^2\sqrt{2.\left(3+\frac{1}{z}\right)^2-12\left(3+\frac{1}{z}\right)+17}}$$

$$=-\int\frac{dz}{z\sqrt{18+\frac{12}{z}+\frac{2}{z^2}-36-\frac{12}{z}+17}}$$

$$=-\int\frac{dz}{\sqrt{-z^2+2}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{2-z^2}}=-\sin^{-1}\frac{z}{\sqrt{2}}+c.$$

$$=-\sin^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}(x-3)}\right]+c.$$

(b) ধর, $I=\int_1^e \frac{(x+1)^3}{x^2}\log x\,dx$

$$=\int_1^e \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2}\log x\,dx$$

$$=\int_1^e x\log x\,dx+3\int_1^e \log x\,dx+3\int_1^e \frac{\log x}{x}dx+\int_1^e \frac{\log x}{x^2}dx$$

$$=I_1+3I_2+3I_3+I_4.$$

$$I_1=\int_1^e x\log x\,dx=\left[(\log x).\frac{x^2}{2}\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\int_1^e \frac{x}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}.$$

$$I_2=\int_1^e \log x\,dx=\left[(\log x).x\right]_1^e-\int_1^e\left(x.\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=e-\left[x\right]_1^e=e-(e-1)=1.$$

$$I_3=\int_1^e \frac{\log x}{x}dx=\left[(\log x)^2\right]_1^e-\int_1^e\left\{(\log x)\times\frac{1}{x}\right\}dx$$

$$=1-\int_1^e \frac{\log x}{x}dx=1-I_3$$

$\therefore\ 2I_3=1.\qquad \therefore\ I_3=\frac{1}{2}.$

$$I_4=\int_1^e \frac{\log x}{x^2}dx=\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}.\log x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\cdot\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{x}\log x\right]_1^e+\int_1^e \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{e}+\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^e$$

$$=-\frac{1}{e}-\left[\frac{1}{x}\right]_1^e=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=-\frac{2}{e}+1.$$

$$\therefore\ I=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}+3\times1+3\times\frac{1}{2}-\frac{2}{e}+1$$

$$=\frac{e^2}{4}-\frac{2}{e}+\frac{1+12+6+4}{4}=\frac{e^2}{4}-\frac{2}{e}+\frac{23}{4}.$$

8. (a) Integrate the equations—

(i) $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$ given that $y=1$ when $x=0$

(ii) $x.\frac{dy}{dx}+2y=\sqrt{1+x^2}$ given that $y=1$ when $x=1$.

(*b*) A vessel containing V c.c. of liquid is in the form of a cone of semivertical angle 30° with vertex downwards and axis vertical. At time $t=0$ a small plug is removed from the bottom of the vessel and liquid flows out at rate $k\sqrt{y}$ c.c. per minute, k being a constant and y cm. the depth of the liquid in the vessel at time t mintues. If at $t=t_1$ the vessel contains volume $\frac{1}{2}V$ c.c. of liquid and at $t=t_2$ it is empty, show that $\frac{t_1}{t_2}=1-\frac{1}{2^{\frac{5}{6}}}$.

Ans. (*a*) (*i*) $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2 \quad \cdots(1)$

মনে কর, $x+y=z \quad \therefore \quad 1+\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}. \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$

$\therefore$ (1) হইতে পাওয়া যায় $\frac{dz}{dx}-1=z^2$

বা, $\frac{dz}{dx}=1+z^2$ বা, $\frac{dz}{1+z^2}=dx$

বা, $\int\frac{dz}{1+z^2}=\int dx$ বা, $\tan^{-1}z=x+c$

বা, $\tan^{-1}(x+y)=x+c \cdots(2)$ $y=1$ যখন $x=0$.

$\therefore$ (2) হইতে পাওয়া যায় $\tan^{-1}(1)=0+c$ বা, $c=\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ $\tan^{-1}(x+y)=x+\frac{\pi}{4}$, যাহা হইল নির্ণেয় সমাধান।

(ii) $\because \quad x.\frac{dy}{dx}+2y=\sqrt{1+x^2} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \quad \ldots(1)$

এক্ষেত্রে Integrating factor হইল $e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\int\frac{1}{x}dx}=e^{2\log x}$

$$=e^{\log x^2}=x^2.$$

(1) নং এর উভয়পক্ষকে x^2 দ্বারা গুণ করিয়া এবং integrate করিয়া পাওয়া যায়

$$yx^2=\int\frac{x^2\sqrt{1+x^2}}{x}dx=\int x\sqrt{1+x^2}\,dx=I, \text{ ধর}$$

$I=\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$ ধর, $z^2=1+x^2$

$\therefore \quad 2z\cdot\frac{dz}{dx}=2x$ বা, $\frac{zdz}{x}=dx$

$\therefore \quad I=\int x.z.\frac{z\,dz}{x}=\int z^2 dz=\frac{z^3}{3}+c=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}+c.$

$\therefore$ সাধারণ সমাধান হইল $yx^2=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}+c \quad \cdots(2)$

এখন $y=1$ যখন $x=1$.

$\therefore$ (2) হইতে পাওয়া যায় $1=\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}+c$ বা, $c=1-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হইল $yx^2=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$

বা, $3yx^2=(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+3-2\sqrt{2}.$

(*b*) মনে কর, t মিনিট পরে পাত্রে তরলের পরিমাণ হয় ν c.c.

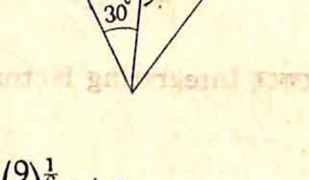
শর্তানুযায়ী যখন $t=0,\ \nu=\mathrm{V}$.

যখন $t=t_1,\quad \nu=\frac{\mathrm{V}}{2}$ এবং যখন $t=t_2,\quad \nu=0.$

চিত্রানুযায়ী $\nu=\frac{1}{3}\pi r^2 y=\frac{1}{3}\pi\times\frac{y^2}{3}\times y\ \left(\because\ \tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{r}{y}\right)$

$=\frac{1}{9}\pi y^3$

$\therefore \quad y=\left(\frac{9\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$



শর্তানুসারে, $\frac{d\nu}{dt}=-\mathrm{K}\sqrt{y}=-\mathrm{K}\left(\frac{9\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{6}}$

বা, $\frac{d\nu}{\nu^{\frac{1}{6}}}=-\mathrm{K}\left(\frac{9}{\pi}\right)^{\frac{1}{6}}dt$

Integration করিয়া পাওয়া যায় $\frac{\nu^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}}=-\mathrm{K}\left(\frac{9}{\pi}\right)^{\frac{1}{6}}t+\mathrm{C}$

বা, $\frac{6\nu^{\frac{5}{6}}}{5}=-\mathrm{K}\left(\frac{9}{\pi}\right)^{\frac{1}{6}}t+\mathrm{C}\cdots$ (1)

যখন $t=0,\quad \nu=\mathrm{V}$

$\therefore$ (1) হইতে পাওয়া যায় $\mathrm{C}=\frac{6}{5}\mathrm{V}^{\frac{5}{6}}$

আবার যখন $t=t_2$, $v=0$

$\therefore$ (1) হইতে পাওয়া যায় $C=K\left(\frac{9}{\pi}\right)^{\frac{1}{6}} t_2$ বা, $\frac{C}{t_2}=K\left(\frac{9}{\pi}\right)^{\frac{1}{6}}$

$\therefore$ (1) হইতে পাওয়া যায় $\frac{6v^{\frac{5}{6}}}{5}=-\frac{C}{t_2}t+C=C\left(1-\frac{t}{t_2}\right)$

বা, $\frac{6v^{\frac{5}{6}}}{5}=\frac{6}{5}V^{\frac{5}{6}}\left(1-\frac{t}{t_2}\right)$ ...(2)

এখন যখন $t=t_1$, $v=\frac{V}{2}$.

$\therefore$ (2) হইতে পাওয়া যায় $\frac{6}{5}\left(\frac{V}{2}\right)^{\frac{5}{6}}=\frac{6}{5}V^{\frac{5}{6}}\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)$

বা, $\frac{1}{2^{\frac{5}{6}}}=1-\frac{t_1}{t_2}$ বা, $\frac{t_1}{t_2}=1-\frac{1}{2^{\frac{5}{6}}}$.

9. (*a*) Differentiate the functions with respect to x—

(*i*) $2x\tan^{-1}x-\log_e(1+x^2)$ (*ii*) $\sin^{-1}(\sqrt{x-1})$.

State the restrictions on the value of x for the second of these functions.

(*b*) Using differential calculus, state the number of real roots of the equation $\sin^{-1}x-2x=0$.

Ans. (*a*) (*i*) মনে কর, $y=2x\tan^{-1}x-\log_e(1+x^2)$

$$\frac{dy}{dx}=2\tan^{-1}x+\frac{2x}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{d}{dx}(1+x^2)$$

$$=2\tan^{-1}x+\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}=2\tan^{-1}x.$$

(*ii*) মনে কর, $y=\sin^{-1}(\sqrt{x-1})$

এখানে অবশ্যই x-এর মানের সীমা হইল $1<x<2$.

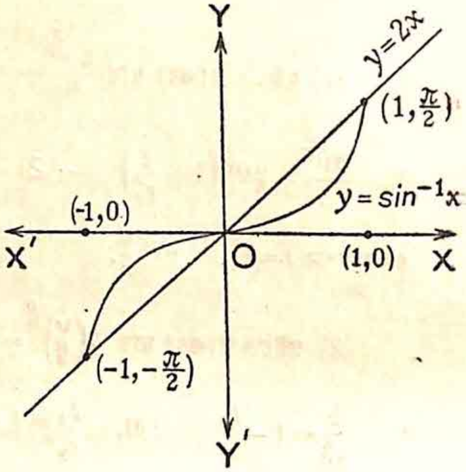
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x-1})^2}}\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{x-1})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)}}\cdot\frac{1}{2}\cdot(x-1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{d}{dx}(x-1)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2-x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-1}}\cdot 1=\frac{1}{2\sqrt{(x-1)(2-x)}}$$ যেখানে $1<x<2$.

(*b*) প্রশ্নটি সমাধানের জন্য Rolle's Theorem এর সাহায্য প্রয়োজন যাহা H. S. Syllabus বহির্ভূত। নিম্নে Graphical Solution দেওয়া হল।

$y=2x$ সরলরেখা $y=\sin^{-1}x$এর লেখকে তিনটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। অতএব প্রদত্ত সমীকরণের তিনটি বাস্তব মান আছে।



10. (*a*) A point P moves along the x-axis, its abcissa at time t being given by $x=2a \sin u(t)-a \sin (2nt)$ where a and n are constants. Show that in the interval $0<t\leqslant\frac{\pi}{n}$ the point P moves from the origin to a point A and then returns to the origin. Determine the abcissa of A and the acceleration of P when at A.

(*b*) Estimate the error made in calculating the area of the triangle ABC in which the sides a and b are measured accurately as 25 cm. and 16 cm. while the angle C is measured as $60°$ but $\frac{1}{2}°$ in error.

Ans. (*a*) $x=2a \sin (nt)-a \sin (2nt)$

$$\frac{dx}{dt}=2an \cos (nt)-2na \cos (2nt)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-2an^2 \sin (nt)+4n^2a \sin (2nt)$$

এখন $\frac{dx}{dt}=0$ যখন $2an \cos (nt)-2na \cos (2nt)=0$

অর্থাৎ যখন $\cos (nt)-\cos (2nt)=0$

" " $2 \sin \frac{3nt}{2} \sin \frac{nt}{2}=0 \quad \therefore \frac{3nt}{2}=\pi$ বা, $\frac{nt}{2}=$

$\therefore t=\frac{2\pi}{3n}$ বা, $t=\frac{2\pi}{n}$ $\quad \cdot \frac{2\pi}{3n}<\frac{2\pi}{n}$

$\therefore$ P বিন্দুটির গতিবেগ $t=\frac{2\pi}{3n}$ সময়ের সময় শূন্য হইবে। ঐ সময়ে বিন্দুটি শর্তানুযায়ী A বিন্দুতে হইবে।

ঐ A বিন্দুর ভুজ হইল $2a \sin\left(n\times\frac{2\pi}{3n}\right)-a \sin\left(2n\times\frac{2\pi}{3n}\right)$

$=2a \sin 120°-a \sin 240°=2a\times\frac{\sqrt{3}}{2}+a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}a}{2}.$

যখন $t=\frac{2\pi}{3n}$, $\frac{d^2x}{dt^2}=-2an^2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+4n^2a\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$$=-2an^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4n^2a\times-\frac{\sqrt{3}}{2}=-3\sqrt{3}an^2<0.$$

অতএব A বিন্দুতে গতিবেগ 0 হইলেও ত্বরণ ঋণাত্মক। অতএব P বিন্দুটি A বিন্দু হইতে পুনরায় মূলবিন্দুর দিকে যাত্রা শুরু করিবে।

$x=0$ যখন $2a\sin(nt)-a\sin(2nt)=0$

অর্থাৎ যখন $2\sin nt-\sin 2nt=0$

" " $2\sin nt(1-\cos nt)=0$

" " $\sin nt=0$ অথবা $\cos nt=1$

" " $nt=0$ বা, π অথবা $nt=0$

" " $t=0$ বা, $\frac{\pi}{n}$

$\therefore$ P বিন্দুটি $0<t\leqslant\frac{\pi}{n}$ সময় মূলবিন্দু হইতে A বিন্দুতে যাইবে এবং পুনরায় মূলবিন্দুতে ফিরিয়া আসিবে।

(*b*) ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল$=\frac{1}{2}ab\sin C=P$ (ধর)

$60°=\frac{\pi^c}{3}$. এখানে $\delta C=\frac{1}{2}°=\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{180}\right)^c=\left(\frac{\pi}{360}\right)^c$.

এখন $\delta P=\frac{1}{2}ab\cos C\,\delta C$ [এখানে a ও b ধ্রুবক]

$=\frac{1}{2}\times25\times16\times\cos\frac{\pi}{3}\times\frac{\pi}{360}$ [যখন $C=\frac{\pi^c}{3}$, $\delta C=\left(\frac{\pi}{360}\right)^c$, $a=25$ cm., $b=16$ cm.]

$=\frac{1}{2}\times25\times16\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{360}=\frac{5\pi}{18}$ sq. cm.

Group—C

11. (*a*) Write down the expression for the area of the triangle formed by the three points whose coordinates are (x_1, y_1), (x_2, y_2) and (x_3, y_3).

Use the result to prove that the three points $(a, b+c)$, $(b, c+a)$ and $(c, a+b)$ are collinear.

(*b*) Find the equation of the perpendicular bisector of the line joining the points (a, b) and (a', b').

Ans. (*a*) $\Delta=\frac{1}{2}\mid x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\mid$

Second Part :

এখানে $(x_1, y_1)\equiv(a, b+c)$; $(x_2, y_2)\equiv(b, c+a)$; $(x_3, y_3)\equiv(c, a+b)$

$\therefore$ বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$\Delta=\frac{1}{2}\mid a\{c+a-(a+b)\}+b\{a+b-(b+c)\}+c\{b+c-(c+a)\}\mid$$
$$=\frac{1}{2}\mid a(c-b)+b(a-c)+c(b-a)\mid$$
$$=\frac{1}{2}\mid ac-ab+ab-bc+bc-ac\mid=\frac{1}{2}\times 0=0.$$

$\because$ $\Delta=0$, অতএব বিন্দুগুলি সমরেখ।

(*b*) মনে কর, $A\equiv(a, b)$ এবং $B\equiv(a', b')$.

AB এর প্রবণতা (gradient) $=\dfrac{b-b'}{a-a'}$

$\therefore$ AB এর উপরে লম্ব যে কোন সরলরেখার প্রবণতা $=\dfrac{-(a-a')}{b-b'}=\dfrac{a'-a}{b-b'}$.

AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{a+a'}{2}, \dfrac{b+b'}{2}\right)$

$\therefore$ AB এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হইল

$$y-\frac{b+b'}{2}=\frac{a'-a}{b-b'}\left(x-\frac{a+a'}{2}\right)$$

বা, $2y(b-b')+2x(a-a')=-(a'-a)(a+a')+(b+b')(b-b')$

বা, $2y(b-b')+2x(a-a')=b^2-(b')^2+a^2-(a')^2$.

12. (*a*) Prove that the diagonals of the parallelogram formed by the four straight lines $\sqrt{3}x+y=0$, $\sqrt{3}y+x=0$, $\sqrt{3}x+y=1$, $\sqrt{3}y+x=1$ are at right angles to one another.

(*b*) Show that the two circles $x^2+y^2+2gx+2fy=0$ and $x^2+y^2+2g'x+2f'y=0$ will touch each other if $fg'=f'g$.

Ans. (*a*) মনে কর,

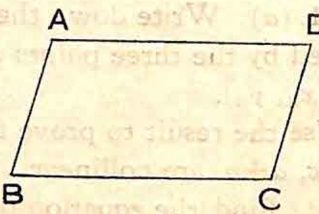
ABCD সামান্তরিকের

$AB\equiv\sqrt{3}x+y=0\cdots(1)$

$BC\equiv\sqrt{3}y+x=0\cdots(2)$

$CD\equiv\sqrt{3}x+y=1\cdots(3)$

$DA\equiv\sqrt{3}y+x=1\cdots(4)$



(1) ও (2) নং সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $B\equiv(0, 0)$

(2) ও (3) নং " " " " " $C\equiv\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

(1) ও (4) নং " " " " " $A\equiv\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(3) ও (4) নং " " " " " $D\equiv\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

কর্ণ AC এর প্রবণতা $(m_1)=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{-(\sqrt{3}+1)}=-1$

কর্ণ BD " " $(m_2)=\dfrac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}-0}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}-0}=1$

$\therefore \quad m_1\times m_2=1\times-1=-1.$

$\therefore$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে।

(b) স্পষ্টতঃ $x^2+y^2+2gx+2fy=0$ বৃত্তের কেন্দ্র হইল $A\equiv(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $(r_1)=\sqrt{g^2+f^2}$.

$x^2+y^2+2g'x+2f'y=0$ বৃত্তের কেন্দ্র হইল $B\equiv(-g', -f')$ এবং ব্যাসার্ধ $(r_2)=\sqrt{(g')^2+(f')^2}$.

যেহেতু বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করে, $\therefore$ $AB=r_1\pm r_2$.

$\therefore \quad \sqrt{(-g+g')^2+(-f+f')^2}=\sqrt{g^2+f^2}\pm\sqrt{(g')^2+(f')^2}$

বা, $g^2+(g')^2-2gg'+f^2+(f')^2-2ff'=g^2+f^2+(g')^2+(f')^2$
$\pm2\sqrt{(g^2+f^2)\{(g')^2+(f')^2\}}$

বা, $-2(gg'+ff')=\pm2\sqrt{(g^2+f^2)\{(g')^2+(f')^2\}}$

বা, $g^2(g')^2+f^2(f')^2+2gg'ff'=g^2(g')^2+g^2(f')^2+f^2(g')^2+f^2(f')^2$

বা, $f^2(g')^2+g^2(f')^2-2gg'ff'=0$ বা, $(fg'-gf')^2=0$

$\therefore \quad fg'-gf'=0$ বা, $fg'=gf'$.

13. (a) Find the locus of the middle points of all chords of the parabola $y^2=4ax$ which are drawn through the vertex.

(b) Prove that the straight line $4ax+3by=12c$ will be a normal to the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, if $5c=a^2e^2$, e being the eccentricity.

Ans. (a) মনে কর, সমান্তরাল জ্যা-গুলির একটির মধ্যবিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (h, κ). এখন প্রদত্ত অধিবৃত্তের যে জ্যা-র স্থানাঙ্ক (h, κ) তাহার সমীকরণ হইল

$y\kappa - 2a(x+h) = \kappa^2 - 4ah \cdots\cdots(1)$ [T=S']

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (0, 0).

(1)নং জ্যা (0, 0) বিন্দুগামী হইলে অবশ্যই

$0\times\kappa - 2a(0+h) = \kappa^2 - 4ah$ হইবে। বা, $\kappa^2 = 2ah$.

$\therefore$ P বিন্দুর সঞ্চারপথের অর্থাৎ নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ হইল $y^2 = 2ax$.

(b) মনে কর, $4ax+3by=12c$ সরলরেখাটি প্রদত্ত উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্ব।

এখন $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ যাহার প্রবণতা $= -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$.

অতএব উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1)$$

বা, $(y-y_1)\,b^2x_1 = a^2y_1(x-x_1)$

বা, $(a^2y_1)x+(-b^2x_1)y = x_1y_1(a^2-b^2)\cdots\cdots(1)$

(1) নং সমীকরণ ও $4ax+3by=12c$ সমীকরণটি একই সরলরেখার সমীকরণ।

$\therefore\ \frac{a^2y_1}{4a}=\frac{-b^2x_1}{3b}=\frac{x_1y_1(a^2-b^2)}{12c}$

বা, $\frac{ay_1}{4x_1y_1}=\frac{-bx_1}{3x_1y_1}=\frac{a^2-b^2}{12c}=\frac{a^2e^2}{12c}$

বা, $\frac{a}{4x_1}=\frac{-b}{3y_1}=\frac{a^2e^2}{12c}$ $\quad\therefore\ \frac{x_1}{a}=\frac{3c}{a^2e^2}$ এবং $\frac{y_1}{b}=\frac{-4c}{a^2e^2}$

$\because$ (x_1, y_1) বিন্দুটি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের উপর অবস্থিত

$\therefore\ \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ $\quad\therefore\ \frac{9c^2}{a^4e^4}+\frac{16c^2}{a^4e^4}=1$

বা, $25c^2=a^4e^4$ বা, $5c=a^2e^2$.

14. (a) Explain what is meant by 'Relative Velocity'.

Two particles start simultaneously from the same point and move along two straight lines inclined at an angle α, one with

uniform velocity u and the other from rest with uniform acceleration f. Show that their relative velocity is least after a time $\frac{u\cos\alpha}{f}$ and that the least velocity is $u\sin\alpha$.

(*b*) Particles are projected simultaneously with velocities of magnitude v from a given point in different directions in the same vertical plane. Prove that after t seconds they all lie on a circle.

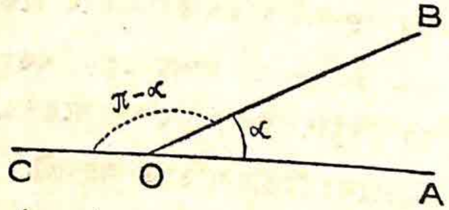
Ans. (*a*) যদি দুইটি বস্তু A ও B উভয়েরই অবস্থান পরিবর্তন হয় তাহা হইলে একের অবস্থান হইতে অপরের অবস্থান পরিবর্তনের হারকে দ্বিতীয়ের আপেক্ষিক গতিবেগ বলে।

A-এর সাপেক্ষে B-এর আপেক্ষিক গতিবেগ=B-এর নিজ গতিবেগ এবং A-এর গতিবেগের সমান কিন্তু বিপরীতমুখী গতিবেগের লব্ধি।

দ্বিতীয় অংশ: মনে কর, P ও Q বস্তুকণাদ্বয় O বিন্দু হইতে যাত্রা শুরু করে এবং যথাক্রমে OA ও OB পথে যথাক্রমে u গতিবেগে এবং f ত্বরণে যায়। $\angle AOB=\alpha$. AO-কে C পর্যন্ত বর্ধিত করা হল।

t সময় পরে P-এর গতিবেগ u এবং Q-এর গতিবেগ ft.

মনে কর, P-এর সাপেক্ষে Q-এর গতিবেগ v.



স্পষ্টত: $v^2=u^2+(ft)^2+2uft\cos(\pi-\alpha)$

$$=u^2\cos^2\alpha+f^2t^2-2uft\cos\alpha+u^2-u\cos^2\alpha$$

$$=(u\cos\alpha-ft)^2+u^2\sin^2\alpha$$

যেহেতু $(u\cos\alpha-ft)^2$ সর্বদাই $\geqslant 0$ স্পষ্টত: $v^2 \geqslant u^2\sin^2\alpha$. v^2-এর মান অর্থাৎ আপেক্ষিক গতিবেগের মান সর্বনিম্ন হয় যখন $(u\cos\alpha-ft)^2=0$ অর্থাৎ যখন $t=\frac{u\cos\alpha}{f}$ এবং স্পষ্টত: আপেক্ষিক গতিবেগের সর্বনিম্ন মান $\sqrt{u^2\sin^2\alpha}=u\sin\alpha$.

(*b*) কণাগুলির প্রক্ষেপ বিন্দুর মধ্যদিয়া অঙ্কিত অনুভূমিক রেখাকে এবং উল্লম্বরেখাকে যথাক্রমে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ ধরা হল।

মনে কর, t সেকেণ্ড সময় পরে একটি কণার অবস্থান P(x, y) বিন্দুতে। ঐ কণার প্রক্ষেপ কোণ α হইলে $x=v\cos\alpha.t$ এবং $y=v\sin\alpha.t-\frac{1}{2}gt^2$

$\therefore\quad x^2+(y+\frac{1}{2}gt^2)^2=v^2t^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$

বা, $x^2+(y+\frac{1}{2}gt^2)^2=v^2t^2\cdots\cdots(3)$

যেহেতু v ও t প্রদত্ত, (3) হইতে আমরা সিদ্ধান্ত করিতে পারি যে, P-এর সঞ্চার পথ একটি বৃত্ত। অতএব t সময় পরে কণাগুলি বৃত্তাকারে থাকিবে।

15. (*a*) Discuss how the equation of motion $P=mf$ may be deduced from Newton's Second Law of Motion.

A man in a lift, ascending with an acceleration f ft/sec^2, throws a ball vertically upwards with a velocity v ft/sec, relatively to the lift and catches it again in t seconds ; show that $f+g=2v/t$.

(*b*) From a uniform circular disc of radius r, is cut out a circle which passes through the centre and whose diameter is $\frac{1}{3}r$. Find the C. G. of the remainder.

Ans. (*a*) নিউটনের দ্বিতীয় গতি সূত্র : বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক এবং ইহা বল যে দিকে ক্রিয়া করে সেইদিকে ঘটিয়া থাকে।

মনে কর, m ভর সম্পন্ন কোন বস্তুর উপর P সমবল প্রযুক্ত হইল। ধর, বস্তুর ত্বরণের পরিমাণ হইল f. t সময় পরে ধর, বস্তুর বেগ হইল v.

নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র অনুযায়ী,

$$P\propto\frac{d}{dt}(mv)=\frac{dm}{dt}.v+m.\frac{dv}{dt}=m.\frac{dv}{dt}\quad\left[\because\ m\text{-ধ্রুবক হইলে }\frac{dm}{dt}=0\right]$$
$$=mf.$$

$\therefore\ P\propto mf\qquad\therefore\ P=Kmf\ \cdots\cdots(1)$ যেখানে K হইল ধ্রুবক।

এখন যদি আমরা ধরিয়া লই যে একক ভরের উপর ক্রিয়া করিয়া একক ত্বরণ সৃষ্টি করিতে পারে যে বল তাহাই বলের একক অর্থাৎ যখন $m=1$, $f=1$ তখন $P=1$, তাহা হইলে (1) হইতে পাওয়া যায়

$1=K.1.1\qquad$ বা, $K=1\qquad\therefore\ P=mf.$

দ্বিতীয় অংশ : লিফ্‌টের সাপেক্ষে বলের নিম্নাভিমুখে আপেক্ষিক ত্বরণ $(f+g)$. সর্তানুযায়ী, t সময়ে লিফ্‌টের সাপেক্ষে বলের সরণ শূন্য।

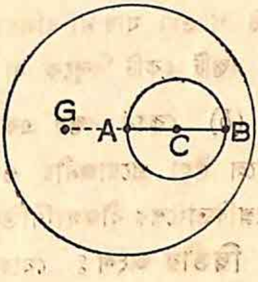
$\therefore \quad 0=vt-\frac{1}{2}(f+g)t^2$ বা, $(f+g)t=2v \quad (\because \; t\neq 0)$

বা, $f+g=\dfrac{2v}{t}$.

(*b*) মনে কর, A কেন্দ্রীয় বৃত্তাকার ব্যাসার্ধ r.

উহা C কেন্দ্রীয় বৃত্তাকার পাত কাটিয়া লওয়া হইল যাহা A বিন্দুগামী।

সর্তানুযায়ী $AC=\frac{1}{2}\left(\frac{r}{3}\right)=\frac{r}{6}$.



মনে কর, পাতের পদার্থের ঘনত্ব হইল ρ.

A বিন্দু সমগ্র বৃত্তাকার পাতের ভারকেন্দ্র এবং কাটিয়া ফেলা বৃত্তাকার পাতের ভারকেন্দ্র C বিন্দুতে, স্পষ্টত: অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র BA-এর বর্ধিতাংশের উপর একটি বিন্দু। ধর ঐ বিন্দুটি G.

স্পষ্টত: $(\pi r^2\rho g)\times 0=\pi\left(\frac{r}{6}\right)^2\rho g.\,AC-\left\{\pi r^2-\pi\left(\frac{r}{6}\right)^2\right\}\rho g.AG$

বা, $0=\pi r^2\rho g(\frac{1}{36}.AC-\frac{35}{36}AG)$ বা, $\frac{35}{36}AG=\frac{1}{36}\times\frac{r}{6}$.

বা, $AG=\dfrac{r\times 36}{36\times 6\times 35}=\dfrac{r}{210}$

$\therefore$ নির্ণেয় ভরকেন্দ্র কেন্দ্র A হইতে BA-এর বর্ধিতাংশ বরাবর A-এর $\dfrac{r}{210}$ দূরত্বে অবস্থিত।

16. (*a*) Define a 'couple' and 'moment of a couple'. Give some practical examples of a couple. What is the effect of a couple on a rigid body ?

(*b*) State the conditions of equilibrium of a system of coplanar forces acting at a point of a body.

A string *ABC* has its extremities tied to two fixed points *A* and *B* in the same horizontal line ; to a given point *C* in the string is knotted a given weight *W*. Prove that the tension in the portion *CA* is $\dfrac{Wb(c^2+a^2-b^2)}{4c\Delta}$ where *a*, *b*. *c* are the lengths of the sides and Δ the area of the triangle *ABC*.

Ans.(*a*) দুইটি সমান, অসদৃশ সমান্তরাল বলকে (যাহাদের ক্রিয়ারেখা এক নহে) যুগ্মবল বা কাপ্‌ল বলে।

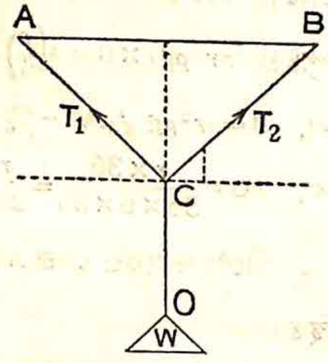
কাপ্‌লের ভ্রামক বলিতে একটি বল এবং বলদ্বয়ের ক্রিয়ারেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী লঘু দূরত্বের গুণফল বুঝায়।

ঘড়িতে যখন চাবি দেওয়া হয় তখন কাপ্‌ল ক্রিয়া করে, দরজার হাতল ঘুরাইয়া যখন দরজা খোলা হয় তখন কাপ্‌ল প্রয়োগ করা হয়। জলের কল খুলিবার সময়ে কাপ্‌ল প্রয়োগ করা হয়।

কোন বস্তুর উপর কাপ্‌ল ক্রিয়া করিলে বস্তুটি ঘুরিতে থাকে। দুইটি সমান, অসদৃশ সমান্তরাল (যাহাদের ক্রিয়ারেখা এক নয়) বলের লব্ধি বল নির্ণয় করা সম্ভব হয়। লব্ধি পাওয়া যায় না বলিয়া কাপ্‌ল প্রয়োগে বস্তুর কোন সারণ (Translation) হয় না, বস্তুটি একটি বিন্দুকে বা অক্ষকে কেন্দ্র করিয়া ঘুরিতে থাকে।

(*b*) কোন বস্তুর একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত কতিপয় বলকে সাম্যাবস্থায় আসিতে হইলে ইহা প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট যে দুইটি পরস্পর লম্বাভিমুখী দিকে বলসমূহের বিশ্লেষিতাংশের বীজগাণিতিক যোগফল পৃথকভাবে শূন্য হইবে।

দ্বিতীয় অংশ : যেহেতু T_1, T_2 ও W বল একই বিন্দু C-তে ক্রিয়ারত এবং উহারা সাম্য অবস্থায় আছে, লেমির উপপাদ্য অনুযায়ী



$$\frac{T_1}{\sin \angle BCO}=\frac{W}{\sin \angle ACB}$$

বা, $$\frac{T_1}{\sin (90^\circ+B)}=\frac{W}{\sin C}$$

বা, $$\frac{T_1}{\cos B}=\frac{W}{\sin C}$$

বা, $$T_1=\frac{W \cos B}{\sin C}=\frac{W(a^2+c^2-b^2)}{2ac.\frac{2\Delta}{ab}}$$

বা, $$T_1=\frac{Wb(c^2+a^2-b^2)}{4c\Delta}$$

I. I. T. EXAMINATION—1978
MATHEMATICS

1. Show that the square of $\dfrac{\sqrt{26-15\sqrt{3}}}{5\sqrt{2}-\sqrt{38+5\sqrt{3}}}$ is a rational number.

Ans. Given expression $=\dfrac{\sqrt{26-15\sqrt{3}}}{5\sqrt{2}-\sqrt{38+5\sqrt{3}}}$

$$=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{26-15\sqrt{3}}}{\sqrt{2}(5\sqrt{2}-\sqrt{38+5\sqrt{3}})}=\frac{\sqrt{52-30\sqrt{3}}}{10-\sqrt{76+10\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{25+27-30\sqrt{3}}}{10-\sqrt{75+1+10\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{(5)^2+(3\sqrt{3})^2-2.5.3\sqrt{3}}}{10-\sqrt{(5\sqrt{3})^2+(1)^2+2.5\sqrt{3}.1}}$$

$$=\frac{\sqrt{(3\sqrt{3}-5)^2}}{10-\sqrt{(5\sqrt{3}+1)^2}}=\frac{3\sqrt{3}-5}{10-(5\sqrt{3}+1)}=\frac{3\sqrt{3}-5}{9-5\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(3\sqrt{3}-5)(9+5\sqrt{3})}{(9)^2-(5\sqrt{3})^2}=\frac{27\sqrt{3}+45-45-25\sqrt{3}}{81-75}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\therefore\ \left(\frac{\sqrt{26-5\sqrt{3}}}{5\sqrt{2}-\sqrt{38+5\sqrt{3}}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ which is a rational number.

2. The value of $x+y+z$ is 15 if a, x, y, z, b are in A.P., while the value of $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ is $\frac{5}{3}$, if a, x, y, z, b are in H.P. Find a and b.

Ans. If a, x, y, z, b an in A.P. we have

$2x=a+y,\ 2y=x+z,\ 2z=y+b.$

$\because\ x+y+z=15\quad \therefore\ 3y=15\qquad (\because\ x+z=2y)$

or, $y=\frac{15}{3}=5$

Again $2x+2y+2z=a+(x+y+z)+y+b$

or, $x+y+z=a+b+y$ or, $15=a+b+5$ or, $a+b=10$...(i)

If a, x, y, z, b are in H.P. we have

$\frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{y},\ \frac{2}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z},\ \frac{2}{z}=\frac{1}{y}+\frac{1}{b}$

$\because\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{3},\quad \therefore\ \frac{3}{y}=\frac{5}{3}\ \left(\because\ \frac{2}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right),$ or, $y=\frac{9}{5}.$

Again $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{y}$

or, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{y}$

or, $\frac{5}{3}=\frac{b+a}{ab}+\frac{5}{9}$ (Since in this case $y=\frac{9}{5}$)

or, $\frac{5}{3}-\frac{5}{9}=\frac{10}{ab}$ or, $\frac{10}{9}=\frac{10}{ab}$

or, $ab=9$ or, $a(10-a)=9\qquad (\because\ a+b=10)$

or, $10a-a^2=9$ or, $a^2-10a+9=0$
or, $(a-9)(a-1)=0$ $\therefore$ $a=9$ or, $a=1$
when $a=9$, $b=1$
$a=1$, $b=9$.

Note : The student should note that the values of x, y, z are not the same in two cases.

3. If $(m, n)=\dfrac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\cdots\cdots(1-x^{m-n+1})}{(1-x)(1-x^2)\cdots\cdots(1-x^n)}$, where m, and n are positive integers $(n\leqslant m)$, prove that

$$(m, n+1)=(m-1, n+1)+x^{m-n-1}(m-1, n).$$

Ans. R. H. S. $=(m-1, n+1)+x^{m-n-1}(m-1, n)$

$$=\frac{(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\cdots\cdots(1-x^{m-1-n-1+1})}{(1-x)(1-x^2)\cdots\cdots(1-x^{n+1})}$$

$$+\frac{x^{m-n-1}(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\cdots\cdots(1-x^{m-1-n+1})}{(1-x)(1-x^2)\cdots\cdots(1-x^n)}$$

$$=\frac{(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\cdots\cdots(1-x^{m-n})}{(1-x)(1-x^2)\cdots\cdots(1-x^n)}\left\{\frac{1-x^{m-n-1}}{1-x^{n+1}}+\frac{x^{m-n-1}}{1}\right\}$$

$$=\frac{(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\cdots\cdots(1-x^{m-n})(1-x^m)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots\cdots(1-x^n)(1-x^{n+1})}$$

$$=\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\cdots\cdots(1-x^{m-n})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots\cdots(1-x^n)(1-x^{n+1})}$$

$$=\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\cdots\cdots(1-x^{m-\overline{n+1}+1})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots\cdots(1-x^n)(1-x^{n+1})}$$

$$=(m, n+1).$$

4. If a, b are the roots of $x^2+px+1=0$ and c, d are the roots of $x^2+qx+1=0$, show that $q^2-p^2=(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$.

Ans. By the given conditions we have

$$a+b=-p,\ ab=1,\ c+d=-q,\ cd=1$$

R. H. S. $=(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$
$=\{ab-(a+b)c+c^2\}\{ab+(a+b)d-d^2\}$
$=(1+pc+c^2)(1-pd+d^2)$
$=1-pd+d^2+pc-p^2cd+pcd^2+c^2-pdc^2+c^2d^2$
$=1-pd+d^2+pc-p^2+pd+c^2-pc+1$ $(\because\ cd=1)$
$=2+d^2+c^2-p^2=2+(c+d)^2-2cd-p^2$
$=2+q^2-2-p^2=q^2-p^2.$

5. Given $x=cy+bz$, $y=az+cx$, $z=bx+ay$, where x, y, z are not all zero, prove that $a^2+b^2+c^2+2abc=1$.

Ans. From the given equations we have

$$x-cy-bz=0 \ldots\ldots(1)$$
$$cx-y+az=0 \ldots\ldots(2)$$
$$bx+ay-z=0 \ldots\ldots(3)$$

By cross-multiplication from (1) and (2) we get

$$\frac{x}{-ca-b}=\frac{y}{-bc-a}=\frac{z}{-1+c^2}$$

or, $\dfrac{x}{b+ca}=\dfrac{y}{a+bc}=\dfrac{z}{1-c^2}=k$ (say), where k is a non-zero constant.

$\therefore \quad x=k(b+ca),\ y=k(a+bc),\ z=k(1-c^2)$.

Putting the values of x, y, z in the equation (3) we get

$$b\times k(b+ca)+a\times k(a+bc)-k(1-c^2)=0$$

or, $b^2+abc+a^2+abc-1+c^2=0 \qquad (\because \ k\neq 0)$

or, $a^2+b^2+c^2+2abc=1$.

6. Solve for x: $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$.

Ans. $\because \quad 4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

$\therefore \quad 2^{2x}+2^{2x-1}=3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x-\frac{1}{2}}$

or, $2^{2x}(1+2^{-1})=3^x(3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}})$

or, $2^{2x}\left(1+\frac{1}{2}\right)=3^x\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ or, $\dfrac{3\times 2^{2x}}{2}=3^x\times\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

or, $\dfrac{2^{2x}}{8}=\dfrac{3^x}{3\sqrt{3}}=\dfrac{3^x}{3^{\frac{3}{2}}}$ or, $2^{2x-3}=3^{x-\frac{3}{2}}=(\sqrt{3})^{2(x-\frac{3}{2})}$

or, $2^{2x-3}=(\sqrt{3})^{2x-3}$ or, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x-3}=1$

or, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x-3}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^0 \quad \therefore \ 2x-3=0$ or, $x=\frac{3}{2}$.

7. If $x=a+b$, $y=a\gamma+b\beta$ and $z=a\beta+b\gamma$, where are γ and β the complex cube roots of unity, show that $xyz=a^3+b^3$.

Ans. Given that β and γ are the complete cube roots of unity. Hence $1, \beta, \gamma$ are the cube roots of unity.

$\therefore \quad 1+\beta+\gamma=0,\ \beta^3=\gamma^3=1,\ \beta=\gamma^2,\ \gamma=\beta^2$.

L. H. S. $=xyz=(a+b)(a\gamma+b\beta)(a\beta+b\gamma)$

$=(a+b)\{a^2\beta\gamma+ab(\beta^2+\gamma^2)+b^2\beta\gamma\}$

Now $\beta\gamma=\gamma^2.\gamma=\gamma^3=1,\ \beta^2+\gamma^2=(\beta+\gamma)^2-2\beta\gamma$

$=(-1)^2-2\gamma^2.\gamma=1-2\gamma^3=1-2\times1=-1.$

$\therefore$ L. H. S. $=(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$

8. For $a>0$, solve for x the equation

$$2\log_x a+\log_{ax} a+3\log_{a^2x}a=0.$$

Ans. $2\log_x a+\log_{ax}a+3\log_{a^2x}a=0$

$\therefore\ \dfrac{2\log a}{\log x}+\dfrac{\log a}{\log(ax)}+\dfrac{3\log a}{\log(a^2x)}=0$

or, $\dfrac{2}{\log x}+\dfrac{1}{\log(ax)}+\dfrac{3}{\log(a^2x)}=0\quad(\because\ \log a\neq0)$

or, $2\log(ax)\log(a^2x)+\log x\log(a^2x)+3\log x\log(ax)=0$

or, $2(\log a+\log x)(2\log a+\log x)+(2\log a+\log x)\log x$
$+3(\log a+\log x)\log x=0$

or, $4(\log a)^2+6\log a\log x+2(\log x)^2+2\log a\log x$
$+(\log x)^2+3\log a\log x+3(\log x)^2=0$

or, $6(\log x)^2+11\log x\log a+4(\log a)^2=0$

or, $6(\log x)^2+8\log x\log a+3\log x\log a+4(\log a)^2=0$

or, $2\log x(3\log x+4\log a)+\log a(3\log x+4\log a)=0$

or, $(3\log x+4\log a)(2\log x+\log a)=0$

$\therefore\ \log x=-\frac{4}{3}\log a$ or $\log x=-\frac{1}{2}\log a$

or, $\log x=\log a^{-\frac{4}{3}}$ or $\log x=\log a^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore\ x=a^{-\frac{4}{3}}$ or $x=a^{-\frac{1}{2}}$

i.e. $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^4}}$ or $x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}.$

9. Show that

$({}^{2n}C_0)^2-({}^{2n}C_1)^2+({}^{2n}C_2)^2-\cdots\cdots+({}^{2n}C_{2n})^2=(-1)^n\,{}^{2n}C_n.$

Ans. We have $(1+x)^{2n}={}^{2n}C_0+{}^{2n}C_1x+{}^{2n}C_2x^2+{}^{2n}C_3x^3$
$+\cdots\cdots+{}^{2n}C_{2n}x^{2n}\cdots\cdots(1)$

Again $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2n}={}^{2n}C_0-{}^{2n}C_1.\frac{1}{x}+{}^{2n}C_2.\frac{1}{x^2}-{}^{2n}C_3.\frac{1}{x^3}$
$+\cdots\cdots+(-1)^{2n}.\,{}^{2n}C_{2n}.\frac{1}{x^{2n}}$

$$= {}^{2n}C_0 - {}^{2n}C_1 . \frac{1}{x} + {}^{2n}C_2 . \frac{1}{x^2} - {}^{2n}C_3 . \frac{1}{x^3} + \cdots\cdots + {}^{2n}C_{2n} . \frac{1}{x^{2n}} \quad \cdots\cdots(2)$$

Multiplying the identities (1) and (2) we have

$$(1+x)^{2n}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2n} = ({}^{2n}C_0 + {}^{2n}C_1 x + {}^{2n}C_2 x^2 + {}^{2n}C_3 x^3 + \cdots\cdots + {}^{2n}C_{2n} x^{2n})$$

$$\times\left({}^{2n}C_0 - {}^{2n}C_1 . \frac{1}{x} + {}^{2n}C_2 . \frac{1}{x^2} - {}^{2n}C_3 . \frac{1}{x^3} + \cdots\cdots + {}^{2n}C_{2n} . \frac{1}{x^{2n}}\right) \quad \cdots\cdots(3)$$

Evidently the absolute term (*i.e.*, the term independent of x) in the R.H.S. is $({}^{2n}C_0)^2 - ({}^{2n}C_1)^2 + ({}^{2n}C_2)^2 - \cdots\cdots + ({}^{2n}C_{2n})^2$.

$$\text{L.H.S.} = (1+x)^{2n} . \left(1-\frac{1}{x}\right)^{2n} = (1+x)^{2n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2n}$$

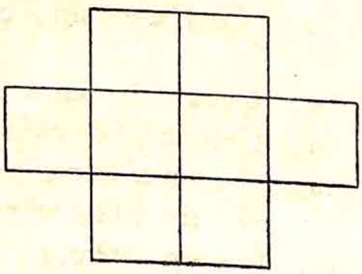
$$= \frac{(1+x)^{2n}(x-1)^{2n}}{x^{2n}} = \frac{(x^2-1)^{2n}}{x^{2n}} = \frac{(1-x^2)^{2n}}{x^{2n}}.$$

Now the term containing x^{2n} in the expansion of $(1-x^2)^{2n}$ is evidently ${}^{2n}C_n(-x^2)^n = (-1)^n\ {}^{2n}C_n . x^{2n}$.

$\therefore$ absolute term in the L.H.S. is $(-1)^n . {}^{2n}C_n$.

Hence we have $({}^{2n}C_0)^2 - ({}^{2n}C_1)^2 + ({}^{2n}C_2)^2 - \cdots\cdots + ({}^{2n}C_{2n})^2 = (-1)^n . {}^{2n}C_n$.

10. Six X's have to be placed in the squares of the figure below, such that each row contains at least one X. In how many different ways can this be done ?



Ans. There are 3 rows and 8 squares.

Now the selection of one square from each row where one X is to be placed can be jointly done in ${}^2C_1 \times {}^4C_1 \times {}^2C_1 = 2 \times 4 \times 2 = 16$ ways.

Now out of given $6X$'s, $3X$'s are left and these are 5 squares left where the remaining $3X$'s can be placed. This can be done in ${}^5C_3$ *i.e.* in 10 ways.

$\therefore$ required number of ways $= 16 \times 10 = 160$.

11. Prove that $\sin x \sin y \sin(x-y)+\sin y \sin z \sin(y-z)+\sin z \sin x \sin(z-x)+\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)=0.$

Ans. L.H.S. $=\frac{1}{2}\{\cos(x-y)-\cos(x+y)\}\sin(x-y)+\frac{1}{2}\{\cos(y-z)-\cos(y+z)\}\sin(y-z)+\frac{1}{2}\{\cos(z-x)-\cos(z+x)\}\sin(z-x)+\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)$

$=\frac{1}{2}\{\cos(x-y)\sin(x-y)+\cos(y-z)\sin(y-z)+\cos(z-x)\sin(z-x)\}-\frac{1}{2}\{\cos(x+y)\sin(x-y)+\cos(y+z)\sin(y-z)+\cos(z+x)\sin(z-x)\}+\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)$

$=\frac{1}{4}\{\sin 2(x-y)+\sin 2(y-z)+\sin 2(z-x)\}$
$-\frac{1}{4}\{(\sin 2x-\sin 2y)+(\sin 2y-\sin 2z)+(\sin 2z-\sin 2x)\}$
$+\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)$

$=\frac{1}{4}\{2\sin(x-z)\cos(x-2y+z)+2\sin(z-x)\cos(z-x)\}$
$+\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)$

$=\frac{1}{2}\sin(z-x)\{\cos(z-x)-\cos(x-2y+z)\}$
$+\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)$

$=\frac{1}{2}\sin(z-x).2\sin(z-y)\sin(x-y)+\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)$

$=-\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)+\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x)$
$=0.$

12. Solve for x, $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$, the equation

$$2(\cos x+\cos 2x)+\sin 2x(1+2\cos x)=2\sin x.$$

Ans. $\because\ 2(\cos x+\cos 2x)+\sin 2x(1+2\cos x)=2\sin x$

$\therefore\ 2\cos x+2\cos 2x+\sin 2x+2\sin 2x\cos x=2\sin x$

or, $2\cos x+2(2\cos^2 x-1)+2\sin x\cos x+4\sin x\cos^2 x=2\sin x$

or, $4\cos^2 x+4\sin x\cos^2 x+2\cos x+2\sin x\cos x-2-2\sin x=0$

or, $4\cos^2 x(1+\sin x)+2\cos x(1+\sin x)-2(1+\sin x)=0$

or, $(1+\sin x)(4\cos^2 x+2\cos x-2)=0$

or, $(1+\sin x)(2\cos^2 x+\cos x-1)=0$

or, $(1+\sin x)(2\cos^2 x+2\cos x-\cos x-1)=0$

or, $(1+\sin x)\{2\cos x(\cos x+1)-1(\cos x+1)\}=0$

or, $(1+\sin x)(\cos x+1)(2\cos x-1)=0$

$\therefore\ \sin x=-1$ or $\cos x=-1$ or $\cos x=\frac{1}{2}$

when $\sin x=-1$, $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ $\therefore\ x=-\frac{\pi}{2}$

when $\cos x=-1$, $\cos x=\cos(\pm\pi)$, $\therefore\ x=\pm\pi$

when $\cos x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$, $\therefore\ x = \pm\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ x = -\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3},\ \pi.$

13. If p_1, p_2, p_3 are the altitudes of a triangle from the vertices A, B, C and Δ, the area of the triangle, prove that

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_3}=\frac{2ab}{(a+b+c)\Delta}\cos^2\frac{C}{2}.$$

Ans. By the given conditions, we have

$$\Delta=\tfrac{1}{2}ap_1=\tfrac{1}{2}bp_2=\tfrac{1}{2}cp_3$$

$$\therefore\ p_1=\frac{2\Delta}{a},\ p_2=\frac{2\Delta}{b},\ p_3=\frac{2\Delta}{c}.$$

$$\therefore\ \text{L.H.S.}=\frac{a}{2\Delta}+\frac{b}{2\Delta}-\frac{c}{2\Delta}$$

$$=\frac{a+b-c}{2\Delta}=\frac{a+b+c-2c}{2\Delta}=\frac{2s-2c}{\Delta}=\frac{s-c}{\Delta}.$$

$$\text{R.H.S.}=\frac{2ab}{(a+b+c)\Delta}\cos^2\frac{C}{2}=\frac{2ab}{2s\Delta}\times\frac{s(s-c)}{ab}=\frac{s-c}{\Delta}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S.

14. A tower is observed from two stations A and B, where B is East of A at a distance 100 metres. The tower is due North of A and due North-West of B. The angles of elevation of the tower from A and B are complementary. Find the height of the tower.

Ans. Let PQ be the tower. In the figure $\angle APQ=90°$, $\angle BPQ=90°$, $\angle PAB=90°$, $\angle ABP=45°$.

Let $\angle PAQ=\theta$. and $\angle PBQ=90°-\theta$, according to the condition.

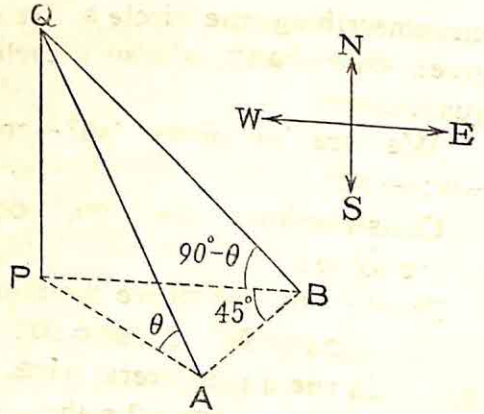
AB = 100 metres.

Let PQ = h metres.

From the ΔAPQ, we have

$$\tan\theta=\frac{PQ}{AP}=\frac{h}{AP}$$

or, $AP = h\cot\theta$.



Again from the ΔBPQ, we have $\tan(90°-\theta)=\frac{PQ}{BP}=\frac{h}{BP}$

or, $\cot\theta=\frac{h}{BP}$ or, $BP=h\tan\theta$

Fron the $\triangle APB$ we have

$\tan 45^\circ=\frac{AP}{AB}$ $[\angle PAB=90^\circ]$

or, $AB=AP$ or, $100=h\cot\theta$......(1)

Also $\cos 45^\circ=\frac{AB}{BP}$ or, $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{100}{h\tan\theta}$ or, $h\tan\theta=100\sqrt{2}$

By (1)×(2) we have $h\tan\theta\times h\cot\theta=100\sqrt{2}\times 100$

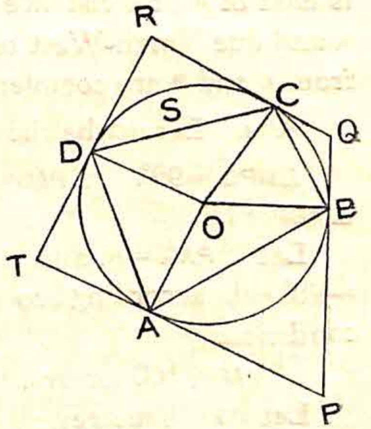
or, $h^2=100^2\sqrt{2}$ $\therefore$ $h=100\sqrt[4]{2}$

Hence the height of the tower is $100\sqrt[4]{2}$ metres.

15. From a point O inside a triangle ABC, perpendiculars OD, OE, OF are drawn to the sides BC, CA, AB respectively. Prove that the perpendiculars from A, B, C to the sides EF, FD, DE respectively of $\triangle DEF$ are concurrent.

[The problem can not be solved with the help of the theorems of Pure Geometry.]

16. A quadrilateral ABCD is inscribed in a circle S and A, B, C, D, are the points of contact with S of another quadrilateral which is circumscribed about S. If this quadrilateral is also cyclic, prove that $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$.



Ans. According to the condition the figure is drawn.

PQRT is the quadrilateral circumscribing the circle S. It is given that PQRT is also a cyclic quadrilateral.

We are to prove $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$.

Construction : OA, OB, OC, OD are joined.

Proof : PA and PB are the tangents to the circle S.

$\therefore$ $\angle OAP=90^\circ$, $\angle OBP=90^\circ$.

$\therefore$ In the quadrilateral OAPB,

$\angle AOB+\angle APB=2$ right angles······(1)

Similarly considering the quadrilateral OCRD we have

$\angle COD+\angle CRD=2$ right angles......(2)

$\therefore$ From (1) and (2) we have

$\angle AOB + \angle APB + \angle COD + \angle CRD = 4$ rt. angles......(3)

Again as PQRT is a cyclic quadrilateral (given), we have

$\angle CRD + \angle APB = 2$ rt. angles......(4)

Hence from (3) and (4) we have

$\angle AOB + \angle COD = 2$ rt. angles......(6)

Considering $\triangle AOB$ we have

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\ OA.OB \cos \angle AOB$......(7)

Again from $\triangle COD$ we have

$CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2\ OC.OD \cos \angle COD$

$= OC^2 + OD^2 - 2\ OC.OD \cos (180° - \angle AOB)$ [From (6)]

$= OC^2 + OD^2 + 2\ OA.OB \cos \angle AOB$......(8)

Adding (7) and (8) we have

$AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$.

Similarly we may have

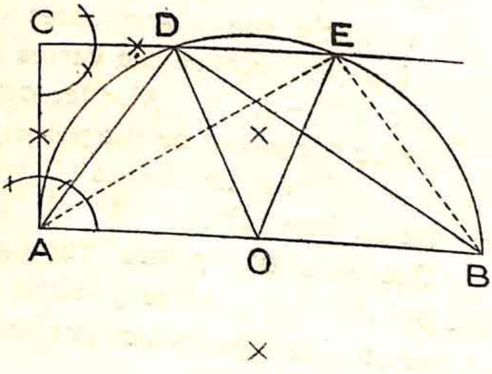
$BC^2 + AD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$

$\therefore$ $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

17. Construct a right-angled triangle, given that the median and the altidude to the hypotenuse are 6 cm. and 4 cm. respectively. Justify your construction.

Ans. Procedure : In any right-angled triangle, the length of the median joining the mid-point of the hypotenuse is half the length of the hypotenuse. Hence here the hypotenuse of the required rignt-angled triangle is of length 12 cm.

[The fig. is not drawn according to the given scale.]



Take $AB = 12$ cm. With AB as diameter a semi-circle is drawn. Draw $AC \perp AB$ such that $AC = 4$ cms. Through C draw a st. line CDE parallel to AB which intersects the semi-circle at D and E. Join AD, BD, AE, BE, OD, OE. The triangles ADB and AEB are the required triangles.

Justification : The angles ADB and AEB are in a semi-circular segment. Hence these are right-angles. OD and OE are the medians each being of measure 6 cm. ($=\frac{1}{2}$ AB). Also the height of each triangle is CA$=4$ cm.

18. The area of a triangle is 5. Two of its vertices are (2, 1) and (3, -2). The third vertex lies on $y=x+3$. Find the third vertex.

Ans. Let ABC be the triangle of which area is 5.

Let A$\equiv(2, 1)$, B$\equiv(3, -2)$, C$\equiv(h, k)$, say.

As (h, k) lies on the st. line $y=x+3$, we have

$$k=h+3\ldots\ldots(1)$$

2	1
3	-2
h	K
2	1

$\because$ $\triangle$ABC$=5$

$\therefore$ $\frac{1}{2}(-4-3+3K+2h+h-2k)=5$

or, $-7+k+3h=10$

or, $h+3+3h=10+7$ $(\because\ k=h+3)$

or, $4h=17-3=14$ $\therefore$ $h=\frac{7}{2}$

$\therefore$ $k=h+3=\frac{7}{2}+3=\frac{13}{2}$ $\therefore$ C$\equiv(\frac{7}{2}, \frac{13}{2})$.

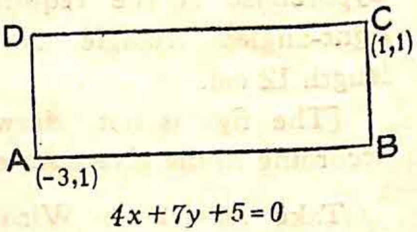
19. One side of a rectangle lies along the line $4x+7y+5=0$. Two of its vertices are $(-3, 1)$ and $(1, 1)$. Find the equations to the other three sides.

Ans. Let ABCD be the rectangle. Let the equation of the side AB be $4x+7y+5=0\ldots\ldots(1)$.

Evidently the co-ordinates of the point $(-3, 1)$ satisfies the equation (1). Hence the vertex $(-3, 1)$ lies on the st. line (1).

Let A$\equiv(-3, 1)$. Also let C$\equiv(1, 1)$.

[Here D can not be the point (1, 1) because it is evident that the st. line joining the points (1, 1) and $(-3, 1)$ is not perpendicular to the st. line (1)].



The side BC passes through the point C (1, 1) and perpendicular to the st. line (1) of which gradient is $-\frac{4}{7}$.

Hence the equation of the side BC is $y-1=\frac{7}{4}(x-1)$

or, $4y-4=7x-7$ or, $7x-4y=3$.

Again the side AD passes through A $(-3, 1)$ and perpendicular to the st. line $4x+7y+5=0$.

Hence the equation of the side AD is $y-1=\frac{7}{4}(x+3)$

or, $4y-4=7x+21$ or, $7x-4y+25=0$.

The side CD passes through the point C (1, 1) and is parallel to the st. line (1).

Hence the equation of the side CD is $y-1=-\frac{4}{7}(x-1)$

or, $7y-7=-4x+4$ or, $4x+7y=11$.

20. A straight line segment of length l moves with its ends on two mutually perpendicular lines. Find the locus of the point which divides the line in the ratio 1 : 2.

Ans. Let the equation of the moving st. line in one position be $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ......(1).

Evidently the st. line (1) meets the x-axis at A $(a, 0)$ and the y-axis at B $(0, b)$.

$\therefore$ $AB=\sqrt{a^2+b^2}=l$ (given) $\therefore$ $a^2+b^2=l^2$ ...(2)

Let P(h, k) be the point which divides AB in the ratio 1 : 2 *i.e.* $\frac{AP}{PB}=\frac{1}{2}$.

$$\therefore \quad (h, k)\equiv\left(\frac{0+2a}{1+2}, \frac{b+0}{1+2}\right)\equiv\left(\frac{2a}{3}, \frac{b}{3}\right)$$

$$\therefore \quad h=\frac{2a}{3} \text{ and } k=\frac{b}{3} \quad \therefore \quad a=\frac{3h}{2} \text{ and } b=3k.$$

Hence from (2) we have $\frac{9h^2}{4}+9k^2=l^2$

or, $9h^2+36k^2=4l^2$.

Hence the equation of the locus of P *i.e.* the equation of the required locus is $9x^2+36y^2=4l^2$ which represents an ellipse.

21. A bucket in the shape of a frustrum of a right circular cone is full of water. The radii of the open and closed ends of the bucket are 24 cm. and 12 cm. respectively and its depth is 30 cm. An iron solid sphere of radius 20 cm., is placed inside the bucket. Find the surface area of the portion of the sphere in contact with water.

Ans. The diagram represents a section of the sphere and the section of the frustrum (BFHC) through the axis of the frustrum. ABC is the section of the cone of which the frustrum is a part.

In the fig. BD$=24$ cm., OE$=20$ cm., FG$=12$ cm., DG$=30$ cm , $\angle$OEA$=90°$.

From the similar triangles $\triangle$AGH and $\triangle$ADC we have,

$\frac{AG}{AD}=\frac{GH}{DC}$ or, $\frac{AG}{AG+30}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$ or, $2AG=AG+30$

or, $AG=30$ cm. $\therefore$ $AD=AG+30$ cm.$=60$ cm.

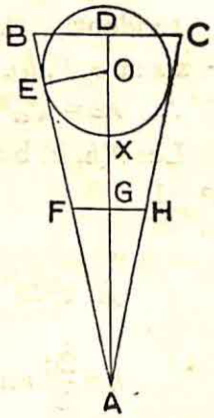
Again from the similar triangles $\triangle$OEA and $\triangle$ABD we have

$\frac{OE}{AO}=\frac{BD}{AB}$ or, $\frac{20}{AO}=\frac{24}{\sqrt{AD^2+BD^2}}=\frac{24}{\sqrt{60^2+24^2}}=\frac{24}{\sqrt{4176}}$

or, $AO=\frac{20\sqrt{4176}}{24}=\frac{5\sqrt{4176}}{6}=53{\cdot}8516$ cm.

$\therefore$ $OG=AO-AG=53{\cdot}8516-30$

$=23{\cdot}8516$ cm.



$XG=OG-OX=23{\cdot}8516-20=3{\cdot}8516$ cm.

Since $XG=3{\cdot}8516$ cm. it is evident that the sphere does not touch the bottom of the frustrum.

Hence the surface area of the position of the sphere in contact with water$=\pi dh$ sq. cm., where

$d=2\times20=40$ cm., $h=(30-3{\cdot}8516)$ cm. $=26{\cdot}1484$ cm.

$\therefore$ Surface area of the sphere in contact with water

$=\frac{22}{7}\times40\times26{\cdot}1484$ sq. cm.

$=3284{\cdot}2$ sq. cm. (Approximately).

22. A frustrun of a right hexagonal pryamid has base side 5 cm., top side 4 cm. and height 6 cm. Find its volume.

Ans. Volume of a frustrum of a right pyramid

$=\frac{h}{3}(A_1+A_2+\sqrt{A_1A_2})$, where A_1 and A_2 are the areas of the top and bottom surfaces and h is the height of the pyramid.

Here A_1=area of the top surface

$=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4)^2=24\sqrt{3}$ sq. cm.

A_2=area of the bottom surface

$=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(5)^2=\frac{75\sqrt{3}}{2}$ sq. cm. ; $h=6$ cm.

$\therefore$ Volume$=\frac{6}{3}\left(24\sqrt{3}+\frac{75\sqrt{3}}{2}+\sqrt{24\sqrt{3}\times\frac{75}{2}\sqrt{3}}\right)$

$=2\left(\frac{123\sqrt{3}}{2}+30\sqrt{3}\right)=183\sqrt{3}=183\times1{\cdot}732=316{\cdot}956$ sq. cm.

23. (i) Solve the equation $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1$.

(ii) If $\tan\alpha=\frac{m}{m+1}$ and $\tan\beta=\frac{1}{2m+1}$, show that $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

(iii) A sequence of numbers $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ satisfies the relation $a_n{}^2-a_{n-1}\,a_{n+1}=(-1)^n$. Find a_3, given $a_0=1$ and $a_1=3$.

(iv) Express $\frac{1}{1-\cos\theta+2i\sin\theta}$ in the from $X+iY$.

(v) Draw the the graph of $y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ for $-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$.

Ans. (i) $\because\quad \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1 \quad\therefore\quad \sqrt{x+1}=1+\sqrt{x-1}$

or, $x+1=1+x-1+2\sqrt{x-1}$ or, $1=2\sqrt{x-1}$

or, $1=4(x-1)$ or, $x=\frac{5}{4}$.

$x=\frac{5}{4}$ satisfies the given equation.

$\therefore$ Required solution is $x=\frac{5}{4}$.

(ii) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{m}{m+1}+\frac{1}{2m+1}}{1-\frac{m}{m+1}\cdot\frac{1}{2m+1}}$

$=\frac{2m^2+m+m+1}{2m^2+3m+1-m}=\frac{2m^2+2m+1}{2m^2+2m+1}=1=\tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore\quad \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

(iii) $a_n{}^2-a_{n-1}a_{n+1}=(-1)^n \quad\cdots\cdots(1)$

Putting $n=1$ in the relation (1) we have $a_1{}^2-a_0a_2=-1$

or, $9-1\times a_2=-1 \quad [\because\ a_1=3, a_0=1]$

or, $a_2=10$

Again putting $n=2$ in the relation (1) we get $a_2{}^2-a_1a_3=1$

or, $10^2-3\times a_3=1$ or, $100-1=3a_3$ or, $a_3=33$.

(iv) Given expression$=\frac{1}{(1-\cos\theta)+i(2\sin\theta)}$

$$=\frac{(1-\cos\theta)-2i\sin\theta}{\{(1-\cos\theta)-i(2\sin\theta)\}\{(1-\cos\theta)+i(2\sin\theta)\}}$$

$$=\frac{(1-\cos\theta)-2i\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2+4\sin^2\theta}=\frac{(1-\cos\theta)-2i\sin\theta}{1+\cos^2\theta-2\cos\theta+4\sin^2\theta}$$

$$=\frac{(1-\cos\theta)-2i\sin\theta}{1+1-\sin^2\theta-2\cos\theta+4\sin^2\theta}=\frac{(1-\cos\theta)-2i\sin\theta}{2-2\cos\theta+3\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1-\cos\theta}{2-2\cos\theta+3\sin^2\theta}+i\left(\frac{-2\sin\theta}{2-2\cos\theta+3\sin^2\theta}\right),$$

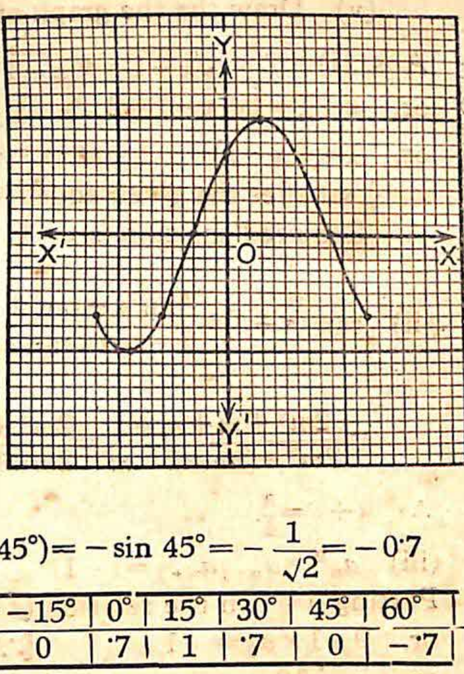
which is of the form $X+iY$.

(v) When $x=-\frac{\pi}{3}=-60°$, $y=\sin(-180°+45°)=\sin(-135°)$

$$=-\sin(135°)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-0{\cdot}7.$$

when $x=-45°$, $y=\sin(-135°+45°)=\sin(-90°)=-1$.
when $x=-30°$, $y=\sin(-90°+45°)=\sin(-45°)$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-0{\cdot}7.$$



when $x=-15°$. $y=\sin(-45°+45°)=\sin 0°=0$.

when $x=0°$, $y=\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}=0{\cdot}7$

when $x=15°$, $y=\sin(45°+45°)=\sin 90°=1$.

when $x=30°$, $y=\sin(90°+45°)=\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}=0{\cdot}7$

when $x=45°$, $y=\sin(135°+45°)=\sin 180°=0$.

when $x=60°$, $y=\sin(180°+45°)=-\sin 45°=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-0{\cdot}7$

x	$-60°$	$-45°$	$-30°$	$-15°$	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$
y	$-{\cdot}7$	-1	$-{\cdot}7$	0	${\cdot}7$	1	${\cdot}7$	0	$-{\cdot}7$

$5°\equiv$ side of the smallest square of the graph paper along the x-axis.

$0{\cdot}1\equiv$ side of the smallest square of the graph paper along the y-axis.